

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
**Вологодский государственный технический университет**

---

**Ю.Р.Осипов**

# **ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

*Утверждено редакционно-издательским советом  
университета в качестве учебного пособия*

**Вологда**  
**2013**

УДК 531 (075.8)  
ББК 88.8  
0 74

**Рецензенты:**

**Н.И. Шестаков**, доктор технических наук, профессор  
(Череповецкий государственный университет);  
**Н.Н. Сеницын**, доктор технических наук, профессор.

**Осипов Ю.Р.**  
0 74      Техническая механика: учебное пособие / Ю.Р. Осипов.-  
Вологда: ВоГТУ, 2013.- 204 с.

ISBN 978-5-87851-504-7

Пособие подготовлено применительно к программе по технической механике для студентов направления 270800.62 СТРОИТЕЛЬСТВО, профили подготовки: теплогазоснабжение и вентиляция, городское строительство и хозяйство, промышленное и гражданское строительство, водоснабжение и водоотведение.

Учебное пособие может быть так же использовано студентами заочной формы обучения и других направлений бакалавриата.

УДК 531 (075.8)  
ББК 88.8

ISBN 978-5-87851-504-7

© Вологодский государственный  
технический университет, 2013  
© Осипов Ю.Р., 2013

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Техническая механика является одной из основных машиностроительных дисциплин. Она посвящена изучению наиболее общих вопросов исследования и проектирования механизмов и машин. К таким вопросам относятся:

- 1) Изучение строения (структуры) механизмов;
- 2) Определение положений механизмов и траекторий, описываемых отдельными точками;
- 3) Определение скоростей и ускорений отдельных точек и звеньев механизма;
- 4) Исследование и проектирование различных механизмов (зубчатых, кулачковых и рычажных);
- 5) Определение различных сил (внешних, реакций, трения, инерций), действующих на звенья механизма;
- 6) Изучение энергетического баланса машин (к.п.д. и др.);
- 7) Изучение истинного закона движения машин под действием заданных сил;
- 8) Изучение способов регулирования скорости хода машины;
- 9) Изучение способов уравновешивания сил инерции в машинах и др.

В соответствии с этими вопросами техническая механика является наукой, изучающей строение, кинематику и динамику механизмов и машин.

Техническая механика привлекает для решения своих задач методы математики, физики и особенно теоретической механики, твердое знание которых необходимо для усвоения этого курса.

## Раздел 1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

### 1.1. Кинематическая пара

Механизм характеризуется определенностью движения его частей. Но, как известно, одно свободное тело (ничем не ограниченное) может под действием сил двигаться в любом направлении.

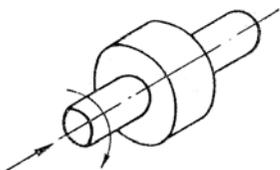


Рис. 1.1. Подвижное соединение двух звеньев – кинематическая пара

Для того чтобы тело двигалось определенным образом, необходимо его подвижность ограничить другим телом (или телами). Например, цилиндрический стержень, ничем не ограниченный, может совершать разнообразные движения, но если этот стержень поместить внутрь полого цилиндра, то движение стержня относительно полого цилиндра станет более определенным — оно будет состоять только из двух независимых движений: вращательного и поступательного (рис. 1.1).

Так как определенность движения какого-либо тела может быть достигнута только путем ограничения его движения другим телом, то при исследовании движения какой-либо части машины необходимо рассматривать ее совместно с другой частью, в большей или меньшей мере ограничивающей ее движение.

Соединение двух соприкасающихся тел, допускающее их относительное движение, называется **кинематической парой**.

Тела, образующие кинематическую пару, называются **звеньями**. Звено может состоять из одного или нескольких жестко соединенных твердых тел.

### 1.2. Классификация кинематических пар

Способы соединения звеньев в кинематические пары весьма разнообразны. В зависимости от этого возможные движения одного звена относительно другого могут быть различными как по числу, так и по виду (поступательное или вращательное).

Возможные независимые движения одного звена относительно другого называются **степенями свободы кинематической пары**. А ограничения, накладываемые на относительные движения звеньев кинематической пары, называются **условиями связи в кинематических парах**.

Сколько же степеней свободы (или какое количество условий связи) может быть в кинематических парах?

Известно, что свободное тело в пространстве обладает шестью степенями свободы — тремя независимыми поступательными движениями вдоль трех осей координат и тремя вращательными движениями вокруг этих осей. Но если это тело вступает в кинематическую пару (в соприкосновение) с другим телом, то минимум одно движение у него ограничивается (движение в направлении общей нормали к поверхностям звеньев в точке их соприкосновения) — на это движение накладывается условие связи. Следовательно, кинематическая пара может иметь максимум пять степеней свободы.

Минимально кинематическая пара может иметь одну степень свободы, так как если количество степеней свободы будет равно нулю, то это уже будет не кинематическая пара, а неподвижное соединение звеньев.

Таким образом, количество степеней свободы кинематических пар может быть от одной до пяти. В соответствии с количеством степеней свободы кинематические пары делятся на классы.

В табл. 1.1 приведены классы и возможные по характеру независимых движений виды кинематических пар, а также количество степеней свободы и условий связи для каждого класса.

Таблица 1.1

Класс кинематической пары	Виды кинематических пар (по виду движения)			Кол-во степеней свободы	Кол-во условий связи
	В	П			
1	В	П		1	5
2	ВВ	ВП		2	4
3	ВВВ	ВВП	ВПП	3	3
4	ВВВП	ВВПП		4	2
5	ВВВПП			5	1

*Примечание.* В – Вращательное движение;  
П – поступательное движение.

Кинематические пары видов ПП, ППП, ВППП, ВВППП существовать не могут. Кинематическая пара вида ПП существовать не может, так как если имеется два независимых поступательных движения, то обязательно должно быть и вращательное движение. Кинематические пары с тремя независимыми поступательными движениями (ППП, ВППП, ВВППП) также существовать не могут, ибо одно (из трех) относительно поступательное движение звеньев в направлении общей нормали в точке их касания всегда исключено.

На рис 1.2 представлены примеры кинематических пар различных классов и видов. Возможные независимые движения звеньев показаны стрелками.

Кроме указанных кинематических пар имеются пары, относительные движения звеньев которых являются зависимыми. Отметим часто применяемую на практике винтовую кинематическую пару винт — гайка (рис. 1.3). Гайка относительно винта имеет два движения: вращательное вокруг оси винта и поступательное вдоль оси винта. Однако эти движения не являются независимыми: они связаны между собой. Величина перемещения гайки вдоль винта зависит от угла поворота гайки. Следовательно, независимое относительное движение здесь только одно (вращательное или поступательное), и поэтому винтовая кинематическая пара является парой первого класса.

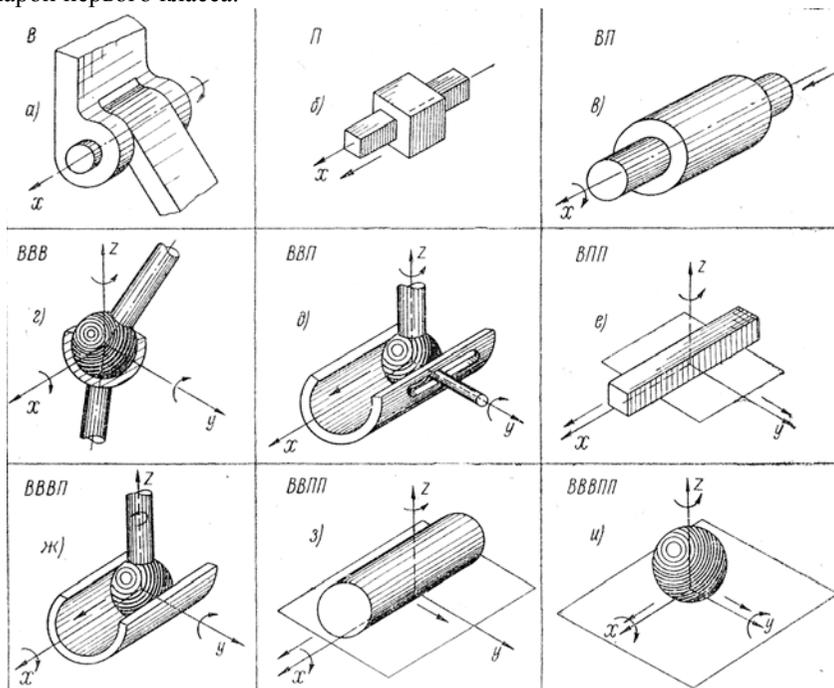


Рис. 1.2. Примеры кинематических пар различных классов и видов

Кинематические пары делятся на пространственные и плоские. **Пространственными кинематическими парами** называются пары, точки звеньев которых в относительном движении описывают пространственные кривые. **Плоскими кинематическими парами** называются такие пары, точки звеньев которых в относительном движении перемещаются в параллельных плоскостях, т.е. их траектории являются плоскими кривыми.

Плоские кинематические пары могут быть только парами 1-го и 2-го классов. В самом деле, свободное тело, совершающее плоскопараллельное движение, обладает тремя степенями свободы: двумя поступательными движениями вдоль двух взаимно перпендикулярных осей координат  $x$ ,  $y$  и одним вращательным движением вокруг оси  $z$ , перпендикулярной плоскости  $хоу$ . Но если звено вступает в кинематическую пару с другим звеном, то минимум на одно из этих трех движений накладывается условие связи (на поступательное движение в направлении общей нормали), и, следовательно, плоская кинематическая пара может иметь не более двух степеней свободы, т.е. плоские кинематические пары могут быть только 1-го и 2-го классов.

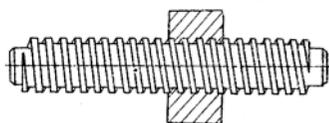


Рис. 1.3. Винтовая кинематическая пара

Классы и виды плоских кинематических пар, количество их степеней свободы и условий связи представлены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Класс кинематической пары	Виды кинематических пар		Кол-во степеней свободы	Кол-во условий связи
1	В	П	1	2
2	ВП		2	1

Плоскими кинематическими парами 1-го класса являются только вращательная пара В (рис. 1.2,а) и поступательная пара П (рис. 1.2,б).

Общий вид плоской кинематической пары 2-го класса представлен на рис. 1.4. Необходимо отметить, что таких кинематических пар бесконечное множество, ибо направляющими поверхностями звеньев такой пары могут быть любые кривые.

Примером плоской кинематической пары 2-го класса могут быть зубцы двух зацепляющихся зубчатых колес, толкатель и кулачок кулачкового механизма и т.д. (рис. 1.5,а, б). Все остальные ранее указанные кинематические пары (рис. 1.1, рис. 1.2, в, г, д, е, ж, з, и, рис. 1.3) являются пространственными кинематическими парами.

Кинематические пары различаются также по характеру соприкосновения звеньев. Поверхности, линии или точки соприкосновения звеньев называются **элементами кинематических пар**.

Если элементами соприкосновения звеньев являются поверхности, то кинематическая пара называется **низшей**. Если элементами соприкосновения звеньев являются линия или точка, то кинематическая пара называется **высшей**.

Так как в низших кинематических парах элементами соприкосновения звеньев являются площадки (поверхности), то удельное давление в них невелико, вследствие чего износ в низших парах сравнительно невелик. В высших парах элементами соприкосновения звеньев являются линии или точки, поэтому удельное давление в них очень велико, что вызывает их повышенный износ. Это большой недостаток высших кинематических пар по сравнению с низшими.

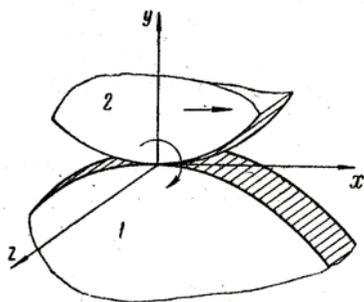


Рис. 1.4. Высшая кинематическая пара

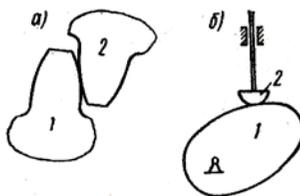


Рис. 1.5. Примеры высших кинематических пар:  
а – зубья зубчатых колес;  
б – кулачок и толкатель кулачкового механизма

Однако они имеют и большое преимущество: если количество низших пар ограничено, то высших пар большое разнообразие, их количество практически неограниченно (поверхности соприкосновения звеньев высших кинематических пар могут быть различными). Поэтому при помощи высших кинематических пар значительно проще создать механизмы, обеспечивающие заданный закон движения.

### 1.3. Кинематические цепи

Связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары, называется **кинематической цепью**.

Кинематические цепи по характеру относительного движения звеньев разделяются на плоские и пространственные.

Кинематическая цепь называется **плоской**, если точки ее звеньев описывают траектории, лежащие в параллельных плоскостях. Кинематическая цепь называется **пространственной**, если точки ее звеньев описывают неплоские траектории или траектории, лежащие в пересекающихся плоскостях.

Наибольшее распространение имеют на практике плоские кинематические цепи.

По виду звеньев, входящих в кинематические цепи, последние разделяются на простые и сложные.

**Простой кинематической цепью** называется такая цепь, в которой каждое звено входит не более чем в две кинематические пары (рис. 1.6, а, в). **Сложной кинематической цепью** называется такая цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематические пары (рис. 1.6, б, г).

Все кинематические цепи, кроме того, подразделяются на незамкнутые и замкнутые.

**Незамкнутыми кинематическими цепями** называются такие цепи, в которых имеются звенья, входящие только в одну кинематическую пару (рис. 1.6, а, б). **Замкнутыми** называются такие цепи, в которых каждое звено входит не менее чем в две кинематические пары (рис. 1.6, в, г).

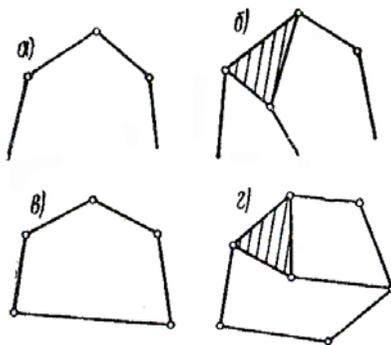


Рис. 1.6. Кинематические цепи:  
 а – простая незамкнутая;  
 б – сложная незамкнутая;  
 в – простая замкнутая;  
 г – сложная замкнутая

#### 1.4. Степень подвижности плоской кинематической цепи

Пусть плоская кинематическая цепь состоит из  $k$  звеньев, соединенных в  $p_1$  кинематических пар 1-го класса и  $p_2$  кинематических пар 2-го класса (плоских кинематических пар других классов, как известно, нет).

Каждое свободное тело (звено) при плоскопараллельном движении обладает тремя степенями свободы. Поэтому до соединения звеньев в кинематические пары они все обладали  $3k$  степенями свободы. При соединении звеньев в кинематические пары последние отнимают у них определенное количество степеней свободы: пары 1-го класса отнимают две степени свободы (из трех), оставляя одну; пары 2-го класса отнимают одну степень свободы, оставляя две.

Таким образом, плоская кинематическая цепь будет обладать следующим количеством степеней свободы:

$$H = 3k - 2p_1 - p_2.$$

Обычно нас интересует движение звеньев кинематической цепи относительно одного из звеньев, которое является неподвижным. Такие

звенья есть в любой машине. Например, станина у любого станка, блок цилиндров у двигателя внутреннего сгорания и т.д.

Звено, которое принимается за неподвижное, называется **стойкой**.

Если одно звено кинематической цепи сделать неподвижным, то число степеней свободы уменьшится еще на три и относительно неподвижного звена будет равно

$$W = H - 3$$

или

$$W = 3(k - 1) - 2p_1 - p_2.$$

Обозначая  $k - 1 = n$  (число подвижных звеньев), окончательно получим

$$W = 3n - 2p_1 - p_2. \quad (1.1)$$

Число степеней свободы кинематической цепи относительно неподвижного звена  $W$  называется **степенью подвижности** кинематической цепи.

Формула (1.1) была впервые получена известным русским ученым П. Л. Чебышевым в 1869 г. и носит его имя. Следует указать, что эта формула пригодна только для плоских кинематических цепей. Для пространственных цепей ею пользоваться нельзя.

### 1.5. Механизм

Дадим новое определение для механизма на основании понятия о кинематической цепи.

Предварительно отметим, что звенья, законы движения которых являются заданными, называются **ведущими**; остальные звенья называются **ведомыми**.

Для кинематических цепей, у которых звенья являются твердыми телами, механизм можно определить следующим образом.

**Механизмом** называется замкнутая кинематическая цепь с одним неподвижным звеном (стойкой), в которой при заданном законе движения одного или нескольких ведущих звеньев все остальные (ведомые) звенья движутся вполне определенным образом.

Рассмотрим, всякая ли кинематическая цепь является механизмом.

Известно, что если, например, точка при плоскопараллельном движении обладает двумя степенями свободы, то для того, чтобы ее положение на плоскости было вполне определенным, необходимо задать два параметра  $x$  и  $y$  (рис. 1.7). Или если тело при плоскопараллельном движении обладает тремя степенями свободы, то для того, чтобы его положение на плоскости было вполне определенным, необходимо задать три параметра  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$  (рис 1.8) и т.д.

Аналогично и у кинематической цепи. Чтобы положения всех звеньев кинематической цепи относительно стойки были вполне определенными, необходимо задать столько параметров, сколько степеней подвижности

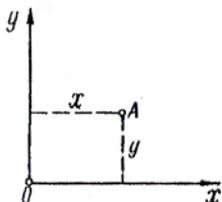


Рис. 1.7. Положение точки на плоскости

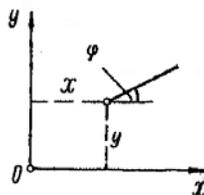


Рис. 1.8. Положение прямой на плоскости

(степеней свободы относительно стойки) имеет кинематическая цепь. Параметры, которые задаются кинематической цепью, определяются заданным законом движения ведущего звена (или ведущих звеньев).

Поэтому, чтобы движения ведомых звеньев кинематической цепи были вполне определенными, необходимо, чтобы количество ведущих звеньев цепи было равно количеству ее степеней подвижности. Только в этом случае кинематическая цепь является механизмом.

Ведущие звенья на кинематических схемах отмечаются стрелками.

### 1.6. Принцип образования механизмов. Группы Ассура

Простую и вместе с тем рациональную классификацию механизмов, тесно связанную с их образованием, строением и методами кинематического и силового исследования, предложил в 1916 г. проф. Петербургского политехнического института Л.В. Ассур. Классификация Л.В. Ассура была в дальнейшем развита и дополнена в работах русских ученых И.И. Артоболевского, Н. Г. Бруевича, В. В. Добровольского и др.

Придерживаясь классификации механизмов по Л.В. Ассуру, мы примем в дальнейшем нумерацию классов по Г.Г. Баранову.

Основной принцип образования механизмов, высказанный Л.В. Ассуром, заключается в следующем.

Любой механизм может быть образован путем последовательного присоединения («наслоения») сначала к ведущему звену и к стойке, а затем и к любым другим звеньям кинематических цепей с нулевой степенью подвижности. В самом деле, степень подвижности механизма должна быть равна числу ведущих звеньев. Но каждое ведущее звено относительно стойки обладает одной степенью подвижности. Следовательно, для того чтобы степень подвижности механизма не изменилась при при-

соединении ведомых звеньев, кинематическая цепь, ими образованная, должна обладать нулевой степенью подвижности.

Кинематические цепи, обладающие нулевой степенью подвижности (степенью свободы относительно стойки), называются **группами Ассура**.

Какие бывают группы Ассура, сколько звеньев и кинематических пар в них входят?

Рассмотрим сначала кинематические цепи, в состав которых входят кинематические пары только 1-го класса ( $p_2=0$ ). Степень подвижности плоской кинематической цепи определяется по формуле Чебышева:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2.$$

Для группы Ассура ( $p_2=0$ )

$$W = 3n - 2p_1 = 0 \quad (1.2)$$

или

$$p_1 = \frac{3}{2}n. \quad (1.2a)$$

Так как количества звеньев и кинематических пар могут быть только целыми числами, то количество звеньев группы Ассура может быть только четным числом. Следовательно, равенству (1.2a) может удовлетворять следующий ряд чисел:

$n$	2	4	6...
$p_1$	3	6	9...
Класс группы Ассура	I	II	III...

Простейшая группа Ассура, состоящая из двух звеньев и трех кинематических пар, относится к I классу; группа, состоящая из четырех звеньев и шести кинематических пар, относится ко II классу и т. д.

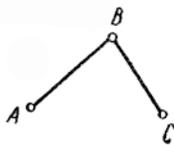


Рис. 1.9. Группа Ассура I класса

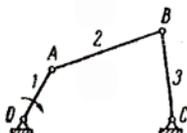


Рис. 1.10. Механизм с одной группой Ассура I класса

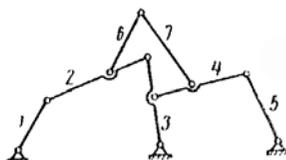


Рис. 1.11. Механизм с тремя группами Ассура I класса

Группа Ассура I класса представлена на рис. 1.9. Она называется **двухповодковой группой**. Вращательная кинематическая пара (точка *B*), образованная звеньями самой группы, называется **внутренней**. Вращательные пары в точках *A* и *C* образуются звеньями группы со звеньями, к которым данная группа присоединяется. Эти кинематические пары называются **внешними**. Они всегда считаются входящими в состав данной группы Ассура.

Если двухповодковую группу присоединить точками *A* и *C* шарнирно к стойке, то получим кинематическую цепь, у которой  $W=0$ .

Если эту группу присоединить шарнирно точкой *A* к ведущему звену, а точкой *C* — к стойке, то получим механизм, у которого  $W=1$  (рис. 1.10). К этому механизму можно в дальнейшем присоединять еще группы Ассура, например группы, состоящие из звеньев 4 и 5, затем 6 и 7 (рис. 1.11). В результате получим новый механизм, степень подвижности которого при этом не изменится. На рис. 1.9 показана группа Ассура I класса, в которой все кинематические пары являются вращательными. Если заменить вращательные кинематические пары поступательными (и те и другие являются парами I-го класса), то можно получить другие виды групп Ассура, принадлежащие также к I классу.

На рис. 1.12 изображены различные виды групп Ассура I класса:

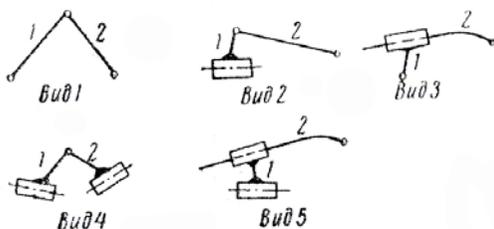


Рис. 1.12. Группы Ассура I класса различных видов

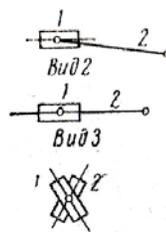


Рис. 1.13. Виды некоторых групп Ассура I класса, наиболее часто применяемые на практике

- вид 1-й — все кинематические пары вращательные;
- вид 2-й — звенья соединены между собой вращательной кинематической парой, одна крайняя пара является вращательной, а другая крайняя — поступательной;
- вид 3-й — звенья соединены между собой поступательной кинематической парой, а крайние пары являются вращательными;
- вид 4-й — звенья соединены между собой вращательной кинематической парой, а обе крайние являются поступательными;

вид 5-й — звенья соединены между собой поступательной кинематической парой, одна крайняя пара является поступательной, а другая крайняя — вращательной.

Вид с тремя поступательными парами не относится к этому классу, он принадлежит к другому семейству, и поэтому здесь мы его не рассматриваем.

На рис. 1.12 показаны общие схемы отдельных видов групп Ассура I класса. Обычно в применяемых на практике механизмах центры вращательных кинематических пар совпадают с направляющими поступательных пар. Поэтому группы видов 2, 3 и 4 чаще имеют вид, показанный на рис. 1.13.

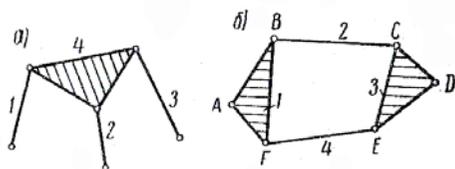


Рис. 1.14. Группы Ассура II класса:  
а — трехповодковая группа;  
б — группа с замкнутым контуром

На рис. 1.14 представлены варианты групп Ассура II класса, состоящих из четырех звеньев и шести кинематических пар.

В группе первого варианта (рис. 1.14, а) звено 4, называемое **базисным**, входит в три внутренние кинематические пары со звеньями 1, 2 и 3, которые называются **поводками**.

Звенья 1, 2 и 3 своими внешними кинематическими парами присоединяются к другим звеньям механизма. Эта группа называется **трехповодковой**, или группой Ассура II класса третьего порядка (порядок определяется количеством внешних кинематических пар).

В группе второго варианта (рис. 1.14, б) имеется четыре внутренние кинематические пары в точках B, C, E, F и две внешние в точках A, D, которыми она присоединяется к другим звеньям механизма. Характерной особенностью этой группы является наличие внутреннего замкнутого контура BCEF. Поводков в этой группе нет. Она называется **группой Ассура II класса второго порядка** (так как присоединяется к другим звеньям двумя кинематическими парами).

Если заменить вращательные кинематические пары поступательными в указанных группах, то можно получить различные виды групп. Этих видов много и рассматривать их не будем.

Отметим еще раз, что если любую из групп Ассура присоединить внешними кинематическими парами к стойке, то получим кинематическую цепь с нулевой степенью подвижности, т.е. ферму (рис. 1.15), а если присоединить ее внешними кинематическими парами к ведущему звену и

к стойке или к любым звеньям первоначального механизма, то получим новый механизм, степень подвижности которого не изменится.

На рис. 1.16 к ведущему звену 1 и стойке присоединена трехпроводковая группа Ассур II класса (звенья 2, 3, 4, 5). Полученный механизм, как легко убедиться, обладает одной степенью подвижности.

На рис. 1.17 такая же группа (звенья 4, 5, 6, 7) присоединена к звеньям 2

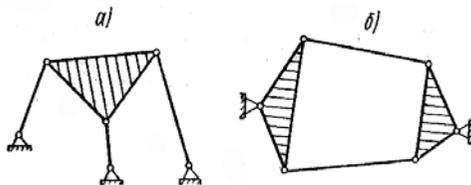


Рис. 1.15. Группы Ассур II класса, присоединенные свободными элементами кинематических пар к стойке

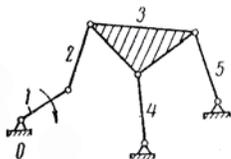


Рис. 1.16. Группа Ассур II класса (трехпроводковая) присоединена к стойке и ведущему звену

и 3 первоначального четырехзвенного механизма и стойке. Степень подвижности нового механизма в этом случае также не изменилась. (Предлагаем убедиться в этом самостоятельно.)

Группы Ассур более высоких классов мы рассматривать не будем.

В заключение отметим, что плоские механизмы, содержащие только низшие кинематические пары (вращательные и поступательные), называются **рычажными**. Механизмы, содержащие только вращательные кинематические пары, называются **шарнирными**.

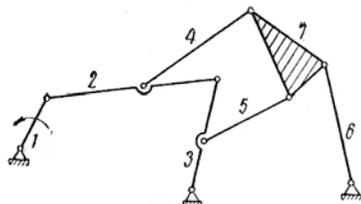


Рис. 1.17. Механизм, в состав которого входят группы Ассур I (звенья 2 и 3) и II (звенья 4, 5, 6 и 7) классов

### 1.7. Классификация механизмов. Их строение

Механизмы делятся на классы. Класс механизма зависит от его строения, т.е. от классов группы Ассур, входящих в его состав. Если в состав механизма входят группы Ассур различных классов, то номер класса механизма определяется номером класса наивысшей группы Ассур.

Механизмы, не содержащие групп Ассура, а состоящие только из ведущего звена, будем относить к механизмам нулевого класса. Такие механизмы часто встречаются на практике. К ним, например, относятся механизмы электродвигателей, генераторов, турбин и др.

Для того чтобы определить, из каких групп Ассура составлен механизм, рекомендуется поступать следующим образом. Сначала надо попытаться отсоединить от механизма простейшую группу Ассура I класса, состоящую из двух звеньев и трех кинематических пар (если можно присоединить группы Ассура без изменения степени подвижности, то можно их и отсоединить). Оставшаяся кинематическая цепь должна остаться замкнутой и тоже быть механизмом. Если отсоединить группы Ассура I класса невозможно, следует пытаться отсоединить группы II класса и т. д. После отсоединения одной группы нужно перейти к отсоединению следующих групп, придерживаясь указанной последовательности. После отсоединения всех групп Ассура, входящих в состав механизма, должно остаться только ведущее звено (или ведущие звенья), которое в группу Ассура не входит.

### ***1.8. Замена высших кинематических пар в механизмах низшими***

Мы рассматривали классификацию механизмов, которые содержат только кинематические пары 1-го класса. Если в состав механизма входят кинематические пары 2-го класса, то для их структурного анализа, а также для кинематического исследования часто очень удобно заменять их кинематическими парами 1-го класса. При этом закон движения звеньев механизма не должен измениться.

На рис. 1.18,а представлена схема механизма, в котором звенья 1 и 2 соединены высшей кинематической парой. Пусть элементами этой кинематической пары  $ab$  и  $cd$  являются цилиндрические поверхности с постоянными радиусами кривизны  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Тогда расстояние между центрами кривизны  $A$  и  $B$  является постоянным (пока звенья касаются на участках  $ab$  и  $cd$ ) и будет равным сумме радиусов  $\rho_1 + \rho_2$ .

Следовательно, если соединить звенья 1 и 2 дополнительным звеном 3, которое соединяется с этими звеньями в точках  $A$  и  $B$  вращательными кинематическими парами (рис. 1.18, б), то оно препятствовать движению механизма не будет. Но тогда можно ликвидировать высшую кинематическую пару 1—2: последняя оказалась замененной. Кинематическая схема заменяющего механизма изображена на рис. 1.18, в.

Движение ведомого звена 2 в обоих механизмах будет одинаковым.

Таким образом, высшая кинематическая пара заменяется дополнительным звеном, которое входит в центрах кривизны звеньев высшей пары в две новые вращательные (низшие) пары.

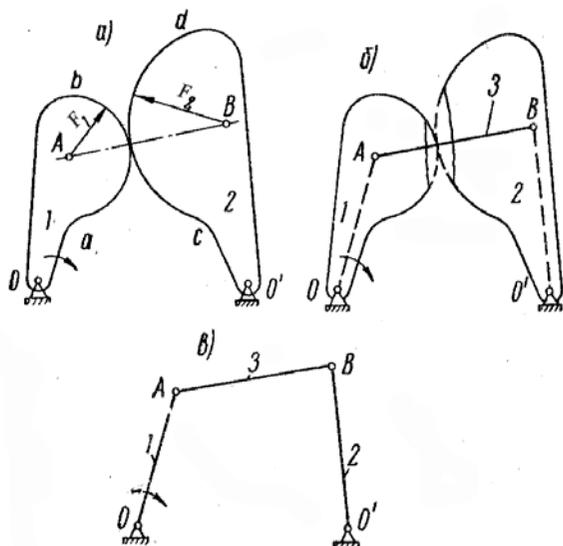


Рис. 1.18. Замена высшей кинематической пары низшими

Если радиусы кривизны элементов высшей кинематической пары переменны, то поступать следует точно таким же образом. Действительно, при переменных радиусах кривизны профилей звеньев высшей пары на бесконечно малых участках около точки касания их можно считать постоянными. Однако вследствие изменения радиусов кривизны и изменения положения центров кривизны звеньев расстояние между центрами кривизны будет изменяться. Поэтому в этом случае заменяющий механизм для каждого нового положения механизма будет иным, и его следует строить для каждого положения заново.

Но ввиду того, что замену производят не в действительности, а только для

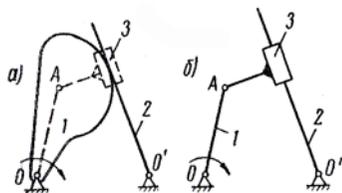


Рис. 1.19. Замена высшей кинематической пары, в которой одно из звеньев является плоскостью, низшими

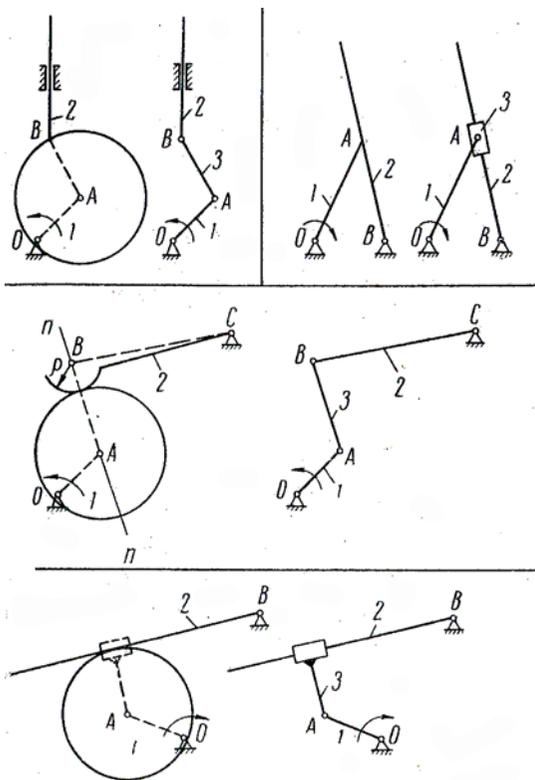


Рис. 1.20. Примеры механизмов с высшими кинематическими парами и их заменяющие механизмы

мена эта фиктивная, она производится только для классификации механизма, а также для облегчения, как мы увидим дальше, кинематического исследования — определения скоростей и ускорений звеньев и точек механизма.

На рис. 1.20 показаны некоторые механизмы с высшими кинематическими парами и их заменяющие механизмы.

облегчения дальнейшего исследования механизма (например, для построения планов скоростей и ускорений), то это не имеет значения.

На рис. 1.19, а изображен механизм, в котором одно из звеньев (звено 2) касается другого прямолинейным участком. Центр кривизны прямолинейного участка находится в бесконечности. Поэтому вращательная кинематическая пара переходит в поступательную, и дополнительное звено 3 будет вступать со звеном 2 в поступательную кинематическую пару. Со звеном 1 дополнительное звено 3 будет, как и в предыдущем примере, вступать в центре кривизны (точка А) во вращательную кинематическую пару (рис. 1.19, б).

Подчеркнем, что за

## Раздел 2. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

### 2.1. Общие положения

Взаимное расположение звеньев механизма при его движении все время меняется. При заданном законе движения ведущего звена все остальные (ведомые) звенья механизма движутся вполне определенным образом, т.е. каждому положению ведущего звена соответствуют вполне определенные положения, скорости и ускорения остальных звеньев и точек звеньев механизма.

В соответствии с этим задачами кинематического исследования являются:

- а) определение положений звеньев механизма и траекторий точек;
- б) определение скоростей звеньев и точек механизма;
- в) определение ускорений звеньев и точек механизма.

Движение механизма периодически повторяется, поэтому вполне достаточно исследовать его движение за один период, который совпадает с одним оборотом ведущего звена. Решение указанных задач может быть осуществлено различными способами: аналитическим или графоаналитическим.

Аналитический способ исследования в общем случае довольно сложен. Этим способом мы в дальнейшем рассмотрим исследование только центрального кривошипно-ползунного механизма.

Основным способом исследования механизмов в теории механизмов и машин является графоаналитический, который значительно проще и хорошо разработан для подавляющего большинства механизмов. Этим способом мы и будем в дальнейшем пользоваться.

### 2.2. Масштабные коэффициенты

При графических построениях на чертежах приходится изображать не только длины (размеры) звеньев, но и векторы скоростей и ускорений точек, векторы сил, а также и другие величины. Поэтому в теории механизмов и машин очень важное значение имеет понятие о масштабе.

**Вычислительным масштабом** называется отношение действительного значения какой-либо величины к длине отрезка (мм), который представляет данную величину на чертеже;

$$\mu = \frac{A \text{ размерность величины } A}{[A] \text{ мм}} \quad (2.1)$$

где  $\mu$  — вычислительный масштаб;  
 $A$  — действительное значение величины;

[A] — длина отрезка, который представляет величину A на чертеже, мм.

Вычислительный масштаб показывает, сколько единиц данной величины заключается в 1 мм отрезка, изображающего эту величину на чертеже.

Например, если масштаб линейной величины M 1:5, т.е. на чертеже данная линейная величина уменьшена в 5 раз, то 1 мм чертежа соответствует 5 мм истинного размера и вычислительный масштаб в этом случае равен

$$\mu_l = \frac{l}{[l]} = \frac{5}{1} = 5 \frac{\text{мм}}{\text{мм}},$$

или

$$\mu_l = 0,005 \frac{\text{м}}{\text{мм}}.$$

Если, например, вектор скорости  $v = 5 \text{ м/сек}$  на чертеже изображен отрезком  $[v] = 50 \text{ мм}$ , то вычислительный масштаб скорости

$$\mu_v = \frac{v}{[v]} = \frac{5}{50} = 0,1 \frac{\text{м/сек}^2}{\text{мм}}.$$

Размерность вычислительного масштаба ускорения

$$\mu_a = \dots \frac{\text{м/сек}^2}{\text{мм}};$$

силы

$$\mu_p = \dots \frac{\text{н}}{\text{мм}}$$

и т. д.

Зная масштаб  $\mu$  и величину отрезка на чертеже [A], легко вычислить истинное значение данной величины

$$A = \mu[A]. \tag{2.1a}$$

Или, зная истинное значение величины A, можно, задаваясь масштабом  $\mu$ , определить величину отрезка [A], которую необходимо отложить на чертеже,

$$[A] = \frac{A}{\mu}. \tag{2.1б}$$

При выборе масштаба желательно, чтобы он выражался целыми числами или числами с простой десятичной дробью. Это значительно облегчает вычисления.

Стандартными являются следующие вычислительные масштабы:

0,001	0,01	0,1	1	10	100
0,002	0,02	0,2	2	20	200
0,005	0,05	0,5	5	50	500 и т.д.

Этими числами рекомендуется в основном пользоваться при выборе масштаба.

### 2.3. Построение планов положений механизмов. Построение траекторий

При кинематическом исследовании механизма задана его кинематическая схема и размеры всех звеньев.

Пусть задан механизм (рис. 2.1), состоящий из ведущего звена  $I$  группы Ассуря I класса 1-го вида (2, 3) и группы Ассуря I класса 2-го вида (4, 5), в положении 1 (звенья механизма в этом положении показаны сплошными линиями). Требуется построить план механизма для положения 2, т.е. найти положения всех ведомых звеньев, соответствующих положению ведущего звена  $OA_2$ .

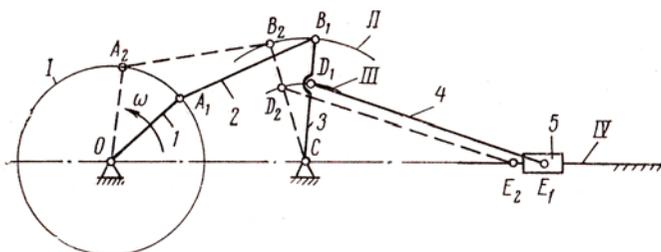


Рис. 2.1. К определению положений звеньев механизма

Построение ведем в такой последовательности:

1. Проводим известные траектории движения точек:  
 точки  $A$  — окружность  $I$  с центром в точке  $O$ ;  
 точки  $B$  — дуга окружности  $II$  с центром в точке  $C$ ;  
 точки  $D$  — дуга окружности  $III$  с центром в точке  $C$ ;  
 точки  $E$  — прямая  $IV$ ,  
 2. Проводим положение звена  $I$  ( $OA_2$ ).

3. Ищем положения звеньев первой присоединенной к ведущему звену группы Ассуря (2, 3). Для этого из точки  $A_2$  радиусом, равным длине  $AB$  звена 2, делаем засечку на дуге окружности  $II$  — это будет искомое положение точки  $B_2$ . Соединяя точку  $B_2$  с точкой  $A_2$ , получаем искомое положение звена 2 ( $A_2B_2$ ) и, соединяя точку  $B_2$  с точкой  $C$ , получаем искомое положение звена 3 ( $B_2C$ ). Пересечение этого звена с дугой окружности  $III$  дает положение точки  $D_2$ , к которой присоединена следующая группа Ассуря (4, 5).

4. Для определения положений этой группы достаточно из точки  $D_2$  радиусом, равным длине звена 4 ( $DE$ ), сделать засечку на прямой  $IV$  — это есть положение точки  $E_2$ . Соединяя точки  $D_2$  и  $E_2$ , получаем положение звена 4 ( $D_2E_2$ ).

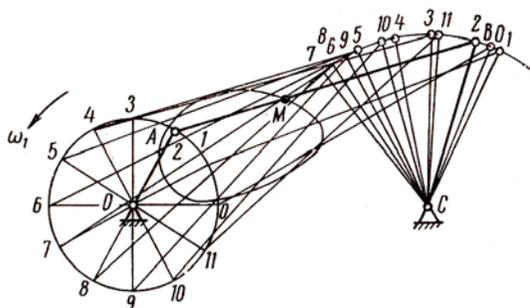


Рис. 2.2. Определение ряда последовательных положений механизма и построение траектории точки  $M$  для шарнирного четырехзвенника

Искомое положение механизма построено. Мы показали построение только одного положения механизма. Аналогично строятся и другие положения.

Обычно исследование механизма производится за полный период, который, как отмечали ранее, соответствует полному обороту ведущего звена (кривошипа). Ведущее звено и вместе с ним ведомые звенья занимают ряд последовательных положений, проследив за которыми, можно получить представление о движении механизма. Обычно строят 12 (или 24) последовательных положений механизма, соответствующих 12 (или 24) равноотстоящим положениям ведущего звена. Чем больше положений, тем точнее исследование.

Такие последовательные положения различных механизмов показаны на рис. 2.2, 2.3 и 2.4. Построение положений механизмов на этих рисунках мы не объясняем. Это понятно из предыдущего.

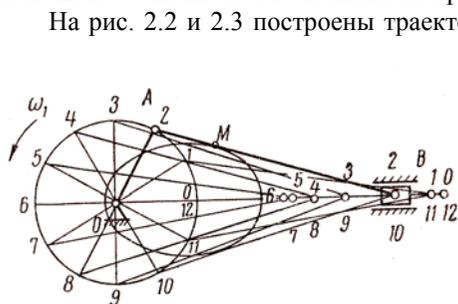


Рис. 2.3. Определение ряда последовательных положений механизма и построение траектории точки  $M$  для кривошипно-ползунного механизма

На рис. 2.2 и 2.3 построены траектории точки  $M$ . Для этого, во всех положениях механизма отмечено положение точки  $M$ , для чего на шатуне  $AB$  от точек  $A$  отложено постоянное расстояние  $AM$ . Соединив плавной кривой ряд последовательных положений точки  $M$ , получаем ее траекторию. На рис. 2.4 аналогично построена траектория точки  $D$ .

На рис. 2.5 построены траектории точки  $D$  и других точек шатуна. Эти тра-

ектории называются **шатунными кривыми**. Как видно, шатунные кривые весьма разнообразны.

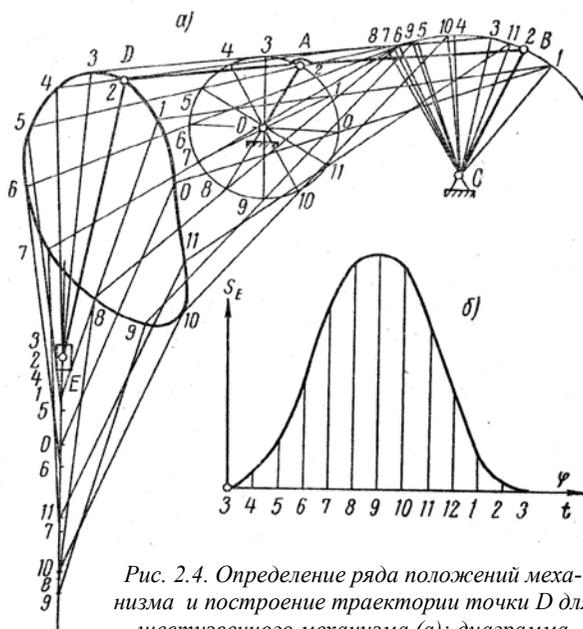


Рис. 2.4. Определение ряда положений механизма и построение траектории точки D для шестизвенного механизма (а); диаграмма перемещения ползуна (б)

Во многих механизмах движение некоторых точек должно быть обеспечено по заранее заданным траекториям. Подбирая шатунную кривую, близкую по форме к заданной кривой, можно выбрать размеры и схему механизма, обеспечивающего приближенное движение точки по заданной траектории. Например, в подъемном кране конец D стрелы должен на некотором участке перемещаться по прямолинейному пути (рис. 2.6). Из шатунных кривых для этого могли бы подойти кривые I, II и III (рис. 2.5), которые на некотором протяжении близки к прямой линии.

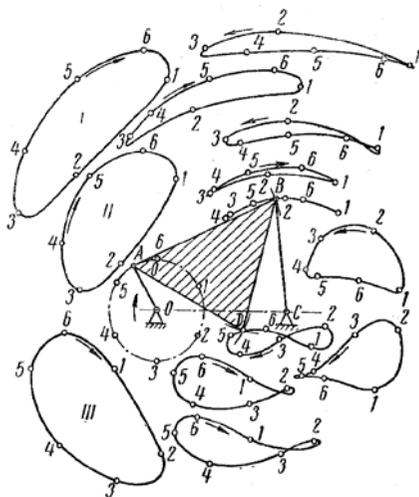


Рис. 2.5. Шатунные кривые

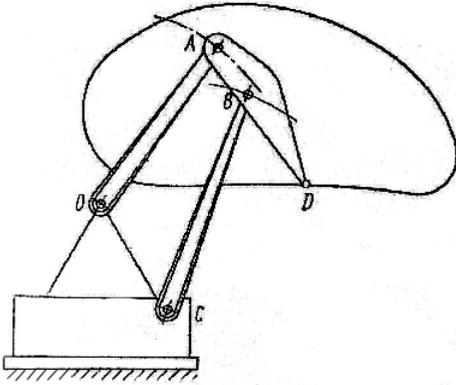


Рис. 2.6. Применение шатунной кривой в технике (подъемный кран)

Выбрав подходящую шатунную кривую, легко определить размеры механизма.

На рис. 2.7 изображена кинематическая схема тестомесильной машины, в которой конец  $K$  мешалки (составляющей с шатуном одно звено) движется по соответствующей траектории. Сосуд, в котором помещается тесто, при этом вращается (механизм, приводящий во вращательное движение сосуд, на схеме не показан), и тесто нужным образом перемешивается.

#### 2.4. Определение крайних положений звеньев механизма

В шарнирном четырехзвенном механизме (см. рис. 2.2) кривошип  $OA$  делает полный оборот, а ведомое звено  $BC$ —коромысло не делает полного оборота, а поворачивается лишь между двумя крайними (мертвыми) положениями. Эти крайние положения коромысла в общем случае не соответствуют ни одному из 12 равноотстоящих положений кривошипа. Их нужно определить отдельно.

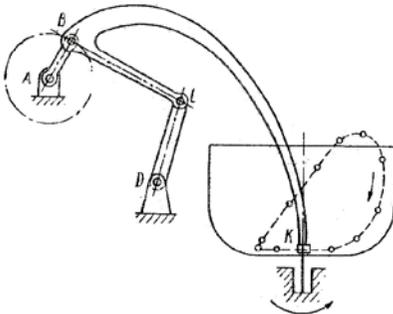


Рис. 2.7. Применение шатунной кривой в технике (тестомесильная машина)

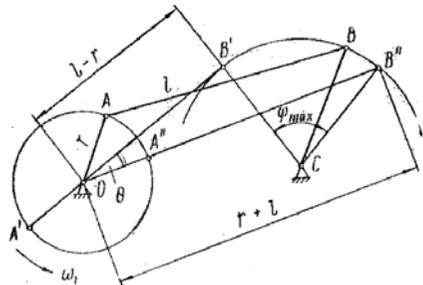


Рис. 2.8. Определение крайних положений коромысла в шарнирном четырехзвенном механизме

Для шарнирного четырехзвенника определение крайних положений коромысла весьма несложно. Совершенно очевидно, что правое крайнее положение коромысла будет занимать тогда, когда кривошип радиусом  $r$  и шатун длиной  $l$  вытянутся в одну линию — дальше вправо коромысло двигаться не сможет (рис. 2.8). Поэтому для определения крайнего правого положения коромысла достаточно из точки  $O$  радиусом, равным  $r+l$ , сделать засечку на траектории точки  $B$  (дуге окружности радиусом  $CB$ ). Полученную точку  $B''$  соединяем с точкой  $C$ . Отрезок  $B''C$  есть крайнее правое положение коромысла. Соединяя точку  $B''$  с точкой  $O$ , получим соответствующие положения кривошипа  $OA''$  и шатуна  $A''B''$ .

Крайнее левое положение коромысла будет занимать тогда, когда кривошип и шатун сложатся в одну линию. Поэтому для определения крайнего левого положения коромысла нужно из точки  $O$  радиусом, равным разности длин шатуна и кривошипа  $l-r$ , сделать засечку на траектории точки  $B$ . Соединяя полученную точку  $B'$  с точкой  $C$ , получим отрезок  $B'C$  — левое крайнее положение коромысла. Проведя прямую через точки  $B'$  и  $O$ , получим соответствующие положения кривошипа  $OA'$  и шатуна  $A'B'$ .

Угол  $\psi_{\max}$  между крайними положениями коромысла называется **углом размаха коромысла**.

Аналогично определяются крайние положения ползуна (точки  $B$ ) для кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.9). Из точки  $O$  делаем засечки на прямой  $x-x$  (траектория точки  $B$ ) радиусом  $r+l$  для крайнего правого положения ползуна (точка  $B''$ ) и радиусом  $l-r$  для крайнего левого положения (точка  $B'$ ). Соединяя точки  $B'$  и  $B''$  с точкой  $O$ , получим соответствующие положения кривошипа и шатуна:  $OA''$  и  $A'B''$  — для крайнего правого положения ползуна и  $OA$  и  $A'B'$  — для крайнего левого положения.

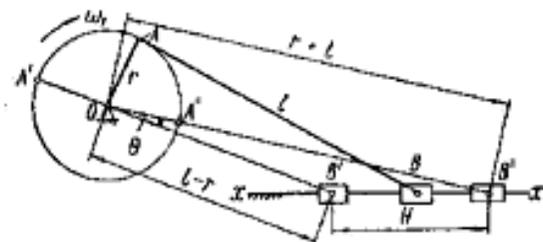


Рис. 2.9. Определение крайних положений ползуна в кривошипно-ползунном механизме

Расстояние  $H$  между крайними положениями ползуна называется **ходом ползуна**.

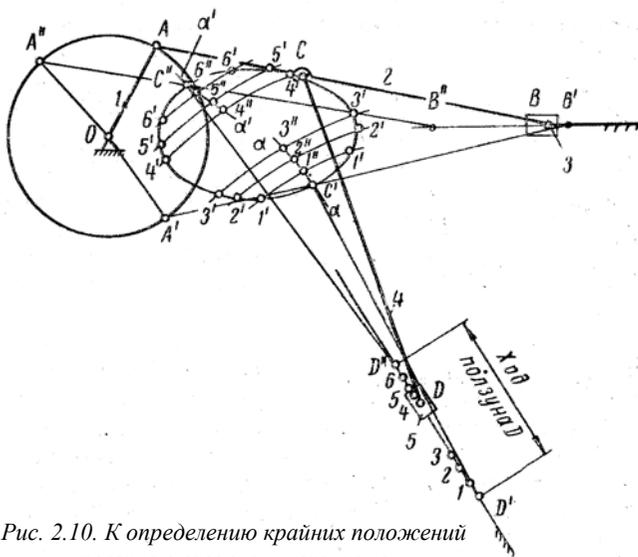


Рис. 2.10. К определению крайних положений ползуна в сложном механизме

Не для всех звеньев всегда так просто отыскиваются крайние положения. На рис. 2.10 и 2.11 представлены шестизвенные механизмы. Для точки  $B$  этих механизмов крайние положения отыскиваются таким же способом, а для точки  $D$  несколько сложнее. Сначала необходимо построить траекторию точки  $C$ , к которой присоединена группа Ассур (4, 5). Для этого нужно построить, например, 12 положений механизма, соответствующих 12 равноотстоящим положениям кривошипа  $OA$ . При этом в общем случае крайние положения точки  $D$  могут не соответствовать ни одному из этих положений. (На рис. 2.10 и 2.11 построение 12 положений опущено). Затем вокруг произвольно выбранных точек  $1, 2, 3$  на траектории точки  $D$  вблизи ее, например, нижнего положения описываем дуги окружностей радиусом  $DC$  и отмечаем точки их пересечения с траекторией точки  $C$  —  $1'$  и  $1''$ ,  $2'$  и  $2''$ ,  $3'$  и  $3''$ . Далее находим середины дуг  $1'-1''$ ,  $2'-2''$ ,  $3'-3''$  (точки  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ ) и через них проводим плавную кривую  $\alpha\alpha$ , которая пересекает траекторию точки  $C$  в точке  $C'$ , соответствующей нижнему крайнему положению точки  $D$ . Для определения мертвого положения точки  $D$  остается радиусом  $CD$  сделать из точки  $C'$  засечку на траектории точки  $D$  (точка  $D'$ ). Далее, зная положение точки  $C'$ , легко построить соответствующие положения остальных звеньев: для опре-

деления точки  $A'$  нужно из точки  $C'$  сделать засечку на траектории точки  $A$  радиусом  $AC$ ; для определения точки  $B'$  нужно через точки  $A'$  и  $C'$  провести прямую до пересечения с траекторией точки  $B$ . Аналогично, выбрав точки 4, 5, 6 вблизи верхнего положения точки  $D$ , определяются верхнее крайнее положение точки  $D$  (точка  $D'$ ) и соответствующие положения всех звеньев механизма.

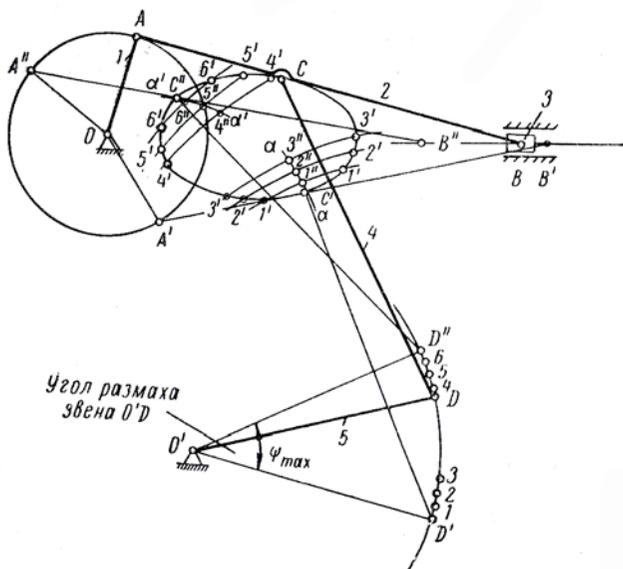


Рис. 2.11. К определению крайних положений коромысла в сложном механизме

## 2. 5. Основные уравнения для определения скоростей и ускорений

Для применения графических методов кинематического исследования необходимо хорошо знать основные зависимости по определению величин скоростей и ускорений, направления векторов этих скоростей и ускорений и уметь составлять векторные уравнения для скоростей и ускорений для различных случаев.

Напомним основные положения, известные из курса теоретической механики.

1. Звено движется поступательно.

При поступательном движении звена скорости его точек имеют одинаковую величину и направление. Ускорения всех точек также имеют одинаковую величину и направление (рис. 2.12):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \dots$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = \dots$$

2. Звено совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси (рис. 2.13).

В этом случае величины линейной скорости точки  $A$ , угловой скорости звена  $\omega$  и радиуса  $l_{OA}$  связаны зависимостью

$$v_A = \omega \cdot l_{OA} .$$

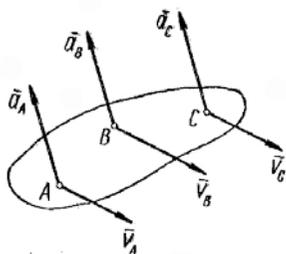


Рис. 2.12. Направление векторов скоростей и ускорений точек звена при его поступательном движении

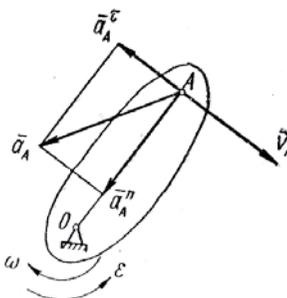


Рис. 2.13. Направление векторов скоростей и ускорений точки звена при вращении его относительно неподвижной оси

Вектор скорости перпендикулярен радиусу и направлен в сторону движения точки. Это определяется по направлению  $\omega$ .

Величина нормального ускорения точки  $A$  равна

$$a_A^n = \omega^2 \cdot l_{OA} \tag{2.2}$$

или

$$a_A^n = \frac{v_A^2}{l_{OA}} . \tag{2.2a}$$

Вектор нормального ускорения всегда направлен по радиусу к центру вращения – от точки  $A$  к точке  $O$ .

Касательное ускорение точки  $A$  равно

$$a_A^\tau = \varepsilon \cdot l_{OA} . \tag{2.3}$$

Вектор касательного ускорения перпендикулярен радиусу, и его направление определяется направлением углового ускорения  $\epsilon$ .

Направления угловой скорости и углового ускорения могут или совпадать или не совпадать. В первом случае вращательное движение является ускоренным, во втором — замедленным.

Вектор полного ускорения точки  $A$  равен векторной сумме нормального и касательного ускорений этой точки

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$$

По величине полное ускорение точки  $A$  равно

$$a_A = l_{OA} \cdot \sqrt{\omega^4 + \epsilon^2} \quad (2.4)$$

Угол отклонения вектора ускорения точки  $A$  от радиуса можно определить по формуле

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_A^\tau}{a_A^n} = \frac{\epsilon}{\omega^2} \quad (2.5)$$

или

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{\epsilon}{\omega^2} \quad (2.5a)$$

3. Две точки принадлежат одному звену и удалены друг от друга на расстояние  $l_{AB}$  (рис. 2.14).

Из теоретической механики известно, что движение какой-либо точки звена (например, точки  $B$ ) можно представить состоящим из двух движений: из движения какой-либо другой точки этого звена, например точки  $A$ , и из вращательного движения точки  $B$  вокруг точки  $A$ . В соответствии с этим векторное уравнение, связывающее скорости обеих точек, имеет вид

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad (2.6)$$

где  $\vec{v}_A$  — вектор скорости точки  $A$ ;

$\vec{v}_B$  — вектор скорости точки  $B$ ;

$\vec{v}_{BA}$  — вектор скорости точки  $B$  в ее движении относительно  $A$

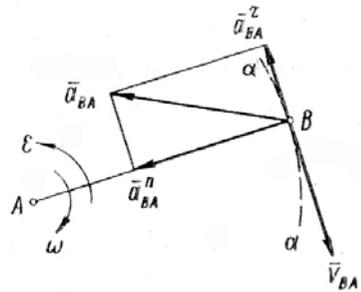


Рис. 2.14. Направление векторов относительных скоростей и ускорений точки звена при его сложном движении

При движении звена точка  $B$  движется относительно точки  $A$  всегда по дуге окружности  $\alpha\alpha$ , описанной из точки  $A$ . Поэтому вектор скорости точки  $B$  относительно точки  $A$  –  $\overline{v_{BA}}$  направлен по касательной к этой дуге, т.е. перпендикулярен линии  $AB$ , соединяющей эти точки,

$$\overline{v_{BA}} \perp \overline{AB}.$$

Величины скорости  $\overline{v_{BA}}$  и угловой скорости звена  $\omega$  связаны формулой

$$v_{BA} = \omega \cdot l_{AB}, \quad (2.7)$$

где  $l_{AB}$  – действительное расстояние между точками  $A$  и  $B$  (не масштабная величина).

Зная величины  $\omega$  и  $l_{AB}$ , можно определить по этой формуле  $\overline{v_{BA}}$ , и наоборот, если известно  $\overline{v_{BA}}$ , то можно определить угловую скорость  $\omega$ :

$$\omega = \frac{v_{BA}}{l_{AB}}. \quad (2.7a)$$

Направление  $\omega$  определяется соответственно с направлением  $\overline{v_{BA}}$ , и наоборот.

Ускорение точки  $B$  также состоит из двух ускорений

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}}, \quad (2.8)$$

где  $\overline{a_A}$  – вектор ускорения точки  $A$ ;

$\overline{a_B}$  – вектор ускорения точки  $B$ ;

$\overline{a_{BA}}$  – вектор ускорения точки  $B$  относительно точки  $A$ .

Относительное ускорение  $\overline{a_{BA}}$  в свою очередь состоит из двух ускорений – нормального  $\overline{a_{BA}^n}$  и касательного  $\overline{a_{BA}^\tau}$ :

$$\overline{a_{BA}} = \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}. \quad (2.9)$$

На основании этого векторное уравнение для ускорения точки  $B$  имеет вид

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}. \quad (2.10)$$

Нормальное ускорение  $\overline{a_{BA}^n}$  точки  $B$  относительно точки  $A$  направлено от точки  $B$  к точке  $A$  (т.е. к центру относительного вращения). По величине  $\overline{a_{BA}^n}$  равно

$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot l_{AB} = \frac{v_{BA}^2}{l_{AB}}. \quad (2.11)$$

Касательное ускорение  $\overline{a_{BA}^{\tau}}$  направлено по касательной к дуге  $\alpha\alpha$ , т.е. перпендикулярно отрезку  $AB$ . Касательное ускорение  $\overline{a_{BA}^{\tau}}$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  связаны уравнением

$$\overline{a_{BA}^{\tau}} = \varepsilon \cdot l_{AB}. \quad (2.12)$$

Если известно  $\overline{a_{BA}^{\tau}}$ , то по этому уравнению можно определить угловое ускорение  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{\overline{a_{BA}^{\tau}}}{l_{AB}}. \quad (2.12a)$$

По направлению  $\overline{a_{BA}^{\tau}}$  можно определить направление  $\varepsilon$ , и наоборот.

4. Две точки принадлежат двум звеньям, соединенным в поступательную кинематическую пару, и в данный момент совпадают (рис. 2.15).

Пусть точка  $A$  принадлежит звену 1, а точка  $B$  — звену 2. Точки  $A$  и  $B$  в данный момент совпадают (например, точка  $B$  лежит над точкой  $A$ ). Звенья 1 и 2 соединены в поступательную кинематическую пару.

Движение точки  $B$  состоит из двух движений: из переносного движения вместе с точкой  $A$  и движения относительно точки  $A$ . В соответствии с этим скорость точки  $B$  складывается из двух скоростей — скорости точки  $A$  и скорости относительно точки  $A$ :

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + \overline{v_{BA}}. \quad (2.13)$$

Относительная скорость  $\overline{v_{BA}}$  направлена параллельно направляющей  $xx$ .

Ускорение точки  $B$ , как известно из теоретической механики, складывается из трех ускорений: ускорения точки  $A$ , ускорения относительно точки  $A$  и поворотного ускорения. В данном случае относительное дви-

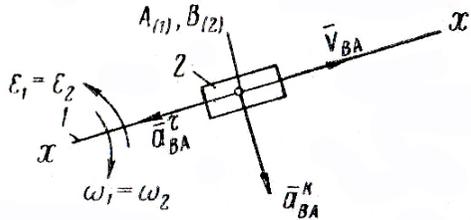


Рис. 2.15. Направление векторов относительных скоростей и ускорений точек двух звеньев, соединенных поступательной кинематической парой

жение является прямолинейным, поэтому в нем будет только касательное ускорение.

Векторное уравнение для ускорения точки  $B$  будет иметь вид

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{\tau} + \overline{a}_{BA}^k, \quad (2.14)$$

где  $\overline{a}_{BA}^{\tau}$  — вектор касательного ускорения точки  $B$  относительно точки  $A$ ;

$\overline{a}_{BA}^k$  — вектор поворотного ускорения точки  $B$  относительно точки  $A$ .

Вектор касательного ускорения  $\overline{a}_{BA}^{\tau}$  направлен так же, как и вектор относительной скорости  $\overline{v}_{BA}$  — параллельно направляющей  $xx$ .

Поворотное ускорение, появляющееся в результате переносного (вращательного) и относительного движений, по величине равно

$$a_{BA}^k = 2 \cdot \omega \cdot v_{BA}. \quad (2.15)$$

Вектор поворотного ускорения  $\overline{a}_{BA}^k$  направлен в ту сторону, куда окажется направленным вектор относительной скорости  $\overline{v}_{BA}$ , если повернуть его на  $90^\circ$  по направлению угловой скорости  $\omega$ .

## 2.6. Построение планов скоростей и ускорений

Определение скоростей и ускорений ведется, как уже указывалось, графическим способом — построением планов скоростей и ускорений.

Планы скоростей и ускорений строятся по векторным уравнениям, которые составляются отдельно для каждой группы Ассур в порядке присоединения их к ведущему звену и к другим звеньям механизма.

Построение планов скоростей и ускорений рассмотрим на частном примере для шарнирного четырехзвенника (рис. 2.16, а).

Известными являются:

а) размеры звеньев  $l_{OA}$ ,  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ ,  $l_{OC}$ ;

б) положение механизма;

в) закон движения ведущего звена  $\omega_1$ . (Движение ведущего звена будем считать равномерным. Принципиального отличия в построении планов скоростей и ускорений при неравномерном движении звена нет.)

Построение планов ведется в порядке построения механизма, т.е. сначала строится план для ведущего звена, затем для первой присоединенной к нему группы Ассур и т. д.

Для ведущего звена определяем величину скорости точки  $A$ :

$$\overline{v}_A = \omega_1 \cdot l_{OA}.$$

Вектор  $\vec{U}_A$  перпендикулярен радиусу, т.е. отрезку  $OA$ , и направлен в сторону, определяемую направлением  $\omega_1$  (по часовой стрелке).

Задаемся масштабом плана скоростей  $\mu_v$  и вычисляем отрезок  $[pa]$ , изображающий в выбранном масштабе вектор  $\vec{U}_A$ ,

$$[pa] = \frac{U_A}{\mu_v}.$$

Из произвольной точки  $p$ , называемой полюсом плана скоростей, откладываем в указанном направлении отрезок  $[pa]$  (рис. 2.1, б). Условимся здесь и в дальнейшем концы векторов скорости и ускорения данной точки (например, точки  $A$ ) на планах скоростей и ускорений обозначать соответствующей малой строчной буквой  $a$ .

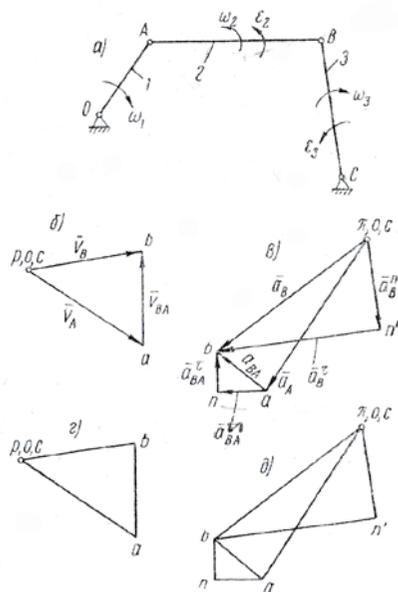


Рис. 2.16. К построению планов скоростей и ускорений для шарнирного четырехзвенного механизма

Переходим к составлению векторных уравнений для группы Ассура (2, 3). Точка  $B$  принадлежит звеньям 2 и 3, поэтому

$$\vec{U}_B = \vec{U}_A + \vec{U}_{BA}, \quad (a)$$

$$\vec{U}_B = \vec{U}_C + \vec{U}_{BC}. \quad (b)$$

В нашем случае (так как скорость  $u_C=0$ ) уравнение (b) превращается в тождество, поэтому можно обойтись одним уравнением (a). Скорость точки  $B$  известна по направлению: так как точка  $B$  движется по окружности радиусом  $CB$ , то она перпендикулярна радиусу —  $\vec{U}_B \perp \vec{BC}$ . Величина скорости точки  $B$  нам неизвестна. Скорость точки  $B$  относительно точки  $A$   $\vec{U}_{BA}$  также известна по направлению —  $\vec{U}_{BA} \perp \vec{AB}$ . Величина ее нам неизвестна. Вектор, известный по величине и направлению, будем всегда подчеркивать двумя линиями, а вектор, известный только по направлению, — одной линией.

Векторное уравнение эквивалентно двум скалярным уравнениям, так как для плоскости векторное уравнение можно заменить двумя уравнениями по

осям координат. Поэтому векторное уравнение всегда можно решить, если в нем два неизвестных. В нашем векторном уравнении два неизвестных (величины скоростей  $v_B$  и  $v_{BA}$ ). Следовательно, оно решается.

Решая векторное уравнение графическим способом, получим план скоростей.

В соответствии с векторным уравнением через конец вектора  $\overline{v_A}$  (точку  $a$ ) проводим направление вектора  $\overline{v_{BA}} (\perp \overline{AB})$ , а через полюс  $p$  — направление вектора  $\overline{v_B} (\perp \overline{BC})$ . Пересечение этих направлений (точка  $b$ ) определяет отрезки  $[pb]$  и  $[ab]$ , изображающие в выбранном ранее масштабе скорости соответственно  $v_B$  и  $v_{BA}$ . Величины этих скоростей равны:

$$v_B = [pb]\mu_v;$$

$$v_{BA} = [ab]\mu_v.$$

Пользуясь построенным планом скоростей, можно определить угловые скорости звеньев 2 и 3:

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{l_{AB}}; \quad \omega_3 = \frac{v_B}{l_{BC}}.$$

Для определения направления  $\omega_2$  переносим вектор  $\overline{v_{BA}}$  в точку  $B$  механизма и рассматриваем движение этой точки относительно точки  $A$  по направлению скорости  $\overline{v_{BA}}$ . Из рисунка видно, что  $\omega_2$  направлена против часовой стрелки.

Аналогично определяем направление угловой скорости  $\omega_3$ . Перенеся вектор  $\overline{v_B}$  в точку  $B$ , видно, что  $\omega_3$  направлена по часовой стрелке.

Перейдем к построению плана ускорений. Так как звено 1 движется равномерно, то ускорение точки  $A$  состоит только из нормального ускорения и оно равно

$$a_A = a_A^n = \omega_1 \cdot l_{OA}.$$

Вектор  $\overline{a_A}$  направлен по радиусу к центру — от точки  $A$  к точке  $O$ .

Задаемся масштабом плана ускорений  $\mu_a$  и вычисляем длину отрезка  $[\pi a]$ , изображающего вектор  $\overline{a_A}$  в этом масштабе.

$$[\pi a] = \frac{a_A}{\mu_a}.$$

Из произвольной точки  $\pi$ , называемой **полюсом плана ускорений**, в направлении вектора  $\underline{a}_A$  откладываем отрезок  $[\pi a]$  (рис. 2.16, в).

Переходим к группе Ассур (2, 3).

Векторные уравнения для точки  $B$  группы имеют вид:

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{a}_{BA}, \quad (c)$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_C + \underline{a}_{BC}. \quad (d)$$

Так как точка  $C$  неподвижна, то ее ускорение равно нулю и уравнение (d) превращается в тождество. Поэтому можно ограничиться только первым уравнением (c).

Ускорения  $\underline{a}_B$  и  $\underline{a}_{BA}$  слагаются из нормальных и касательных составляющих:

$$\underline{a}_B = \underline{a}_B^{\underline{n}} + \underline{a}_B^{\underline{\tau}}, \quad (e)$$

$$\underline{a}_{BA} = \underline{a}_{BA}^{\underline{n}} + \underline{a}_{BA}^{\underline{\tau}}. \quad (f)$$

Подставляя значения  $\underline{a}_B$  и  $\underline{a}_{BA}$  в уравнение (c), получим

$$\underline{a}_B^{\underline{n}} + \underline{a}_B^{\underline{\tau}} = \underline{a}_A + \underline{a}_{BA}^{\underline{n}} + \underline{a}_{BA}^{\underline{\tau}}. \quad (g)$$

В этом уравнении три вектора известны полностью — и по величине и по направлению, а два — только по направлению:

ускорение  $\underline{a}_B^{\underline{n}}$  по величине равно

$$\underline{a}_B^{\underline{n}} = \frac{v_B^2}{l_{BC}},$$

вектор  $\underline{a}_B^{\underline{n}}$  направлен вдоль звена  $BC$  от точки  $B$  к точке  $C$  — оси вращения звена;

вектор  $\underline{a}_B^{\underline{\tau}}$  направлен перпендикулярно звену  $BC$ ;

ускорение  $\underline{a}_A$  известно полностью (отрезок  $[\pi a]$ , изображающий это ускорение на чертеже, уже отложен);

ускорение  $\underline{a}_{BA}^{\underline{n}}$  по величине равно

$$\underline{a}_{BA}^{\underline{n}} = \frac{v_{BA}^2}{l_{AB}},$$

направлен вектор  $\overline{a_{BA}^{-n}}$  вдоль звена  $AB$  от точки  $B$  к точке  $A$ ;

вектор  $\overline{a_{BA}^{-\tau}}$  направлен перпендикулярно звену  $AB$ .

Приступим к построению плана ускорений. Согласно правой части уравнения (g), из конца вектора  $\overline{a^A}$ , (отрезка  $[\pi a]$ ) откладываем в масштабе в указанном выше направлении вектор  $\overline{a_{BA}^{-n}}$ , представляемый отрезком  $[an]$ , который вычисляется по формуле

$$[an] = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}.$$

Из конца вектора  $\overline{a_{BA}^{-n}}$  (точки  $n$ ) проводим направление вектора  $\overline{a_{BA}^{-\tau}}$  ( $\perp AB$ ).

Переходим к левой части уравнения (g). Из полюса плана ускорений  $\pi$  откладываем в указанном ранее направлении вектор  $\overline{a_{BA}^{-n}}$ , изображаемый отрезком  $[\pi n']$ , который вычисляется по формуле

$$[\pi n'] = \frac{a_B^n}{\mu_a}.$$

Из конца вектора  $\overline{a_B^{-n}}$  (точки  $n'$ ) проводим направление вектора  $\overline{a_B^{-\tau}}$  ( $\perp BC$ ). Пересечение направлений  $\overline{a_{BA}^{-\tau}}$  и  $\overline{a_B^{-\tau}}$  (точка  $b$ ) дает нам решение векторного уравнения: отрезок  $[nb]$  изображает вектор  $\overline{a_{BA}^{-\tau}}$ , а отрезок  $[n'b]$  — вектор  $\overline{a_B^{-\tau}}$ . Величины этих ускорений равны:

$$a_{BA}^{\tau} = [nb]\mu_a; \quad a_B^{\tau} = [n'b]\mu_a.$$

Складывая, согласно векторному уравнению (e), векторы  $\overline{a_B^{-n}}$  и  $\overline{a_B^{-\tau}}$ , т.е. соединяя точку  $\pi$  с точкой  $b$ , получим отрезок  $[\pi b]$ , который изображает вектор полного ускорения точки  $B$  —  $\overline{a_B}$ .

Складывая, согласно векторному уравнению (f), векторы  $\overline{a_{BA}^{-n}}$  и  $\overline{a_{BA}^{-\tau}}$ , т.е. соединяя точки  $a$  и  $b$ , получим отрезок  $[ab]$ , который изображает вектор ускорения точки  $B$  относительно точки  $A$  —  $\overline{a_{BA}}$ .

Величины этих ускорений равны:

$$a_B = [\pi b] \mu_a; \quad a_{BA} = [ab] \mu_a.$$

Определяем угловые ускорения звеньев 2 и 3:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l_{AB}}; \quad \varepsilon_3 = \frac{a_B^\tau}{l_{BC}}.$$

Для определения направления этих ускорений переносим векторы  $\overline{a_{BA}^\tau}$  и  $\overline{a_B^\tau}$  в точку  $B$  механизма. Рассматривая движение точки  $B$  относительно точки  $A$  в направлении ускорения  $\overline{a_{BA}^\tau}$ , устанавливаем, что  $\varepsilon_2$  направлено против часовой стрелки. Рассматривая движение точки  $B$  относительно точки  $C$  в направлении  $\overline{a_B^\tau}$ , устанавливаем, что  $\varepsilon_3$  также направлено против часовой стрелки.

Следует отметить, что часто при построении планов скоростей и ускорений стрелки на векторах не ставят (рис. 2.16,  $z, d$ ), а только обозначают соответствующими малыми буквами концы векторов абсолютных скоростей и ускорений. Например, концы векторов скорости и ускорения точки  $A$  обозначают буквой  $a$ , точки  $B$  — буквой  $b$  и т. д. При этом необходимо всегда помнить, что векторы абсолютных скоростей и ускорений точек всегда направлены от полюса к данным точкам. Например, вектор скорости точки  $A$ , изображаемый на плане отрезком  $[pa]$ , направлен от полюса  $p$  к точке  $a$ ; вектор скорости точки  $B$ , изображаемый отрезком  $[pb]$ , направлен от полюса  $p$  к точке  $b$  и т. д.

Векторы относительных скоростей и ускорений каких-либо точек всегда соединяют концы векторов соответствующих абсолютных скоростей и ускорений и также направлены к данной точке. Например, вектор скорости точки  $B$  относительно точки  $A$  —  $\overline{v_{BA}}$ , изображаемый отрезком  $[ab]$ , направлен от точки  $a$  к точке  $b$ . Если считать вектор направленным от точки  $b$  к точке  $a$ , то это будет вектор  $\overline{v^{AB}}$  (скорость точки  $A$  относительно точки  $B$ ).

Сказанное следует хорошо запомнить и усвоить, чтобы не путать написание обозначений векторов ( $\overline{v_{BA}}$  или  $\overline{v^{AB}}$ ) и их направлений.

## 2.7. Теоремы подобия для планов скоростей и ускорений

Пусть требуется определить скорость точки  $D$  какого-либо звена (рис. 2.17, а), если скорости других двух точек этого звена  $A$  и  $B$  уже известны. План скоростей  $rab$  для этих точек изображен на рис. 2.17, б. (Напомним, что вектор  $\underline{v}_{BA}$ , изображаемый на плане отрезком  $[ab]$ , перпендикулярен линии  $AB$ ).

Напишем векторные уравнения для определения скорости точки  $D$ :

$$\underline{v}_D = \underline{v}_A + \underline{v}_{DA};$$

$$\underline{v}_D = \underline{v}_B + \underline{v}_{DB}.$$

Вектор  $\underline{v}_{DA}$  перпендикулярен отрезку  $AD$ ; вектор  $\underline{v}_{DB}$  — отрезку  $BD$ .

В соответствии с первым уравнением через конец вектора  $\underline{v}_a$  (точку  $a$ ) проводим направление вектора  $\underline{v}_{DA}$ . В соответствии со вторым уравнением через конец вектора  $\underline{v}_b$  (точку  $b$ ) проводим направление вектора  $\underline{v}_{DB}$ . Точку пересечения этих направлений (точку  $d$ ) соединим с полюсом  $p$ . Отрезок  $[pd]$  изображает в масштабе  $\mu_v$  вектор скорости точки  $D$  —  $v_D$ , отрезок  $[ad]$  — вектор  $\underline{v}_{DA}$ , отрезок  $[bd]$  — вектор  $\underline{v}_{DB}$ .

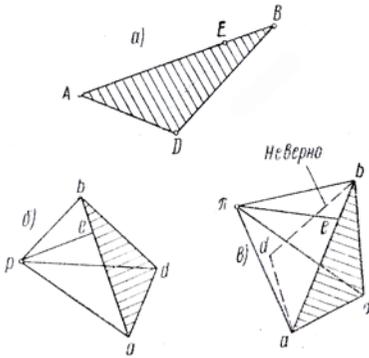


Рис. 2.17. К теоремам подобия для планов скоростей и ускорений

Отсюда следует теорема подобия для плана скоростей: *векторы относительных скоростей точек звена на плане скоростей образуют фигуру, подобную фигуре, образованной отрезками, соединяющими эти точки на звене.*

Легко видеть, что треугольник  $abd$  на плане скоростей подобен треугольнику  $ABD$  на плане звена, как треугольники со взаимно перпендикулярными сторонами. Треугольник  $abd$  повернут относительно треугольника  $ABD$  на  $90^\circ$ .

Отсюда следует теорема подобия для плана ускорений: *векторы относительных ускорений точек звена на плане ускорений образуют фигуру, подобную фигуре, образованной отрезками, соединяющими эти точки на звене.*

Математически эту теорему можно записать так:

$$\frac{v_{BA}}{l_{AB}} = \frac{v_{DA}}{l_{AD}} = \frac{v_{DB}}{l_{BD}} \quad (2.16)$$

или

$$\frac{[ab]}{l_{AB}} = \frac{[ad]}{l_{AD}} = \frac{[bd]}{l_{BD}}. \quad (2.16a)$$

Теорема подобия дает возможность легко определить скорости любых точек звена, если известны скорости двух других точек этого звена.

Если точки звена расположены не на одной прямой, то подобную фигуру на плане скоростей легко построить, проведя направления относительных скоростей точек перпендикулярно отрезкам, соединяющим соответствующие точки на звене. Если точки расположены на одной прямой (например, точки  $A, B, E$ ), то для определения скорости точки  $E$  нужно воспользоваться уравнением (2.16a)

$$\frac{[ae]}{l_{AE}} = \frac{[ab]}{l_{AB}},$$

откуда

$$[ae] = [ab] \frac{l_{AE}}{l_{AB}}.$$

Вычисленную длину отрезка следует отложить на плане скоростей (от точки  $a$ ). Затем, соединив точку  $e$  с полюсом  $p$ , получим отрезок  $[pe]$ , изображающий вектор скорости точки  $E$  —  $\overline{v_E}$ .

Докажем аналогичную теорему для плана ускорений.

Относительные ускорения точек звена можно выразить через его размеры и угловые скорости и ускорение звена:

$$\begin{aligned} a_{BA} &= l_{AB} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}; \\ a_{DA} &= l_{AD} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}; \\ a_{DB} &= l_{BD} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{a_{BA}}{l_{AB}} = \frac{a_{DA}}{l_{AD}} = \frac{a_{DB}}{l_{BD}} \quad (2.17)$$

или

$$\frac{[ab]}{l_{AB}} = \frac{[ad]}{l_{AD}} = \frac{[bd]}{l_{BD}}, \quad (2.17a)$$

т.е. треугольник  $abd$  на плане ускорений (рис. 2.17, в) подобен треугольнику  $ABD$  на плане звена. Другими словами: *векторы относительных ускорений точек звена на плане ускорений образуют фигуру, подобную фигуре, образованной отрезками, соединяющими эти точки на звене.*

Построение подобной фигуры на плане ускорений несколько сложнее, чем на плане скоростей. Это объясняется тем, что подобная фигура на плане ускорений повернута не на  $90^\circ$  относительно соответствующей фигуры плана звена, как на плане скоростей. Поэтому подобную фигуру на плане ускорений следует строить методом засечек, вычислив предварительно по уравнению (2.17a) величины отрезков  $[ad]$  и  $[bd]$ .

При построении подобной фигуры необходимо обращать внимание на то, что фигуры должны быть сходственно расположены, т.е. если на звене при обходе контура, например, по часовой стрелке, точки чередуются в последовательности  $A, B, D$ , то и на планах скоростей и ускорений соответствующие точки при обходе контура фигуры по часовой стрелке должны чередоваться в такой же последовательности  $a, b, d$ . Пунктиром на рис. 2.17, в показана неверно построенная фигура.

## 2. 8. Кинематические диаграммы

Наглядное представление о законе движения интересующего нас звена или точки механизма дают так называемые кинематические диаграммы, т.е. зависимости пути скорости и ускорения от времени —  $s = f(t)$ ,  $v = f(t)$ ,  $a = f(t)$ , построенные графически. Эти диаграммы могут быть построены после кинематического исследования механизма для ряда достаточно близких положений механизма, соответствующих одному кинематическому циклу, т. е. одному обороту ведущего звена.

Рассмотрим построение диаграммы  $s = f(t)$  для ползуна (точки  $B$ ) кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.18,а).

Строим 12 положений механизма, соответствующих 12 равноотстоящим положениям кривошипа  $OA$ , и отмечаем 12 положений точки  $B$  (можно строить и больше положений, например 24). Проводим оси координат  $s$  и  $\varphi$  (рис. 2.18,б). На оси  $\varphi$  откладываем 12 равновеликих отрезков  $O-1$ ,  $1-2$ ,  $2-3$  и т.д., соответствующих углу поворота кривошипа на  $\frac{1}{12}$  часть оборота ( $30^\circ$ ). Через точки  $1, 2, 3$  и т.д. проводим ординаты и откладываем на них отрезки  $1-1'$ ,  $2-2'$ ,  $3-3'$  и т.д., равные координатам точки  $B$  —  $s_B$  в соответствующих положениях, отсчитываемых от правого крайнего положения точки  $B$ . Соединяя точки  $0, 1', 2', 3', \dots, 12$  плавной кривой, получим диаграмму  $s = f(\varphi)$ .

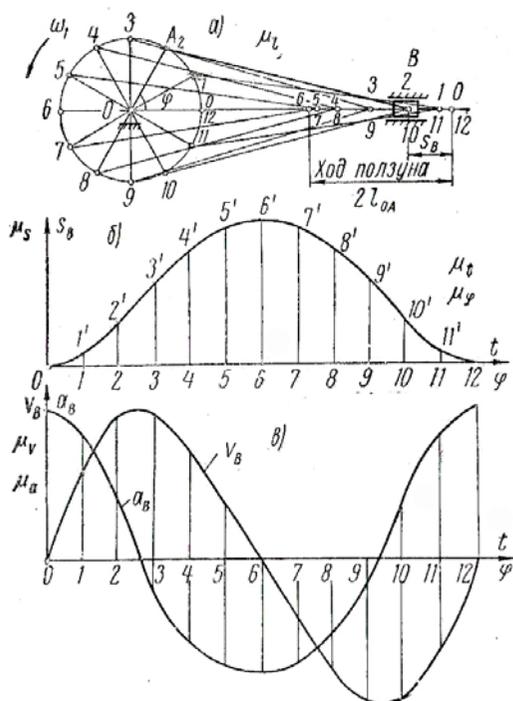


Рис. 2.18. К построению кинематических диаграмм для ползуна кривошипно-ползунного механизма

При равномерном вращении кривошипа угол его поворота  $\varphi$  пропорционален времени. Поэтому полученная диаграмма  $s = f(\varphi)$  является одновременно диаграммой зависимости перемещения ползуна от времени  $s = f(t)$ . Разница будет лишь в масштабах по оси абсцисс.

Масштаб пути  $\mu_s$  равен масштабу планов механизма  $\mu_l$ , так как отрезки, изображающие путь, перенесены на диаграмму без изменения размеров. Масштаб углов  $\varphi$  диаграммы  $s = f(\varphi)$  равен

$$\mu_\varphi = \frac{2\pi}{[0-12]} \frac{1}{\text{мм}},$$

где  $[0 — 12]$  — отрезок (мм) по оси  $\varphi$ , изображающий полный оборот кривошипа ( $2\pi$ ).

Масштаб времени  $t$  диаграммы  $s = f(t)$  равен

$$\mu_t = \frac{T}{[0 — 12]} \frac{\text{сек}}{\text{мм}},$$

где  $T$  — период одного оборота кривошипа, который легко определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{или} \quad T = \frac{60}{n},$$

где  $n$  — число оборотов кривошипа в минуту.

Построение кривых  $v_B = f(t)$  и  $a_B = f(t)$  можно производить двумя способами: по планам скоростей и ускорений и способом графического дифференцирования.

Для построения диаграмм по планам скоростей и ускорений необходимо построить эти планы для всех 12 положений и отложить по ординатам в каком-либо масштабе отрезки, пропорциональные скоростям и ускорениям в соответствующих положениях. На рис. 2.18, в показаны диаграммы  $v_B = f(t)$  и  $a_B = f(t)$ , построенные по этому способу. (Построение планов скоростей и ускорений для 12 положений механизма опущено.)

Построение диаграмм методом графического дифференцирования будет показано в пункте 2.9.

Рассмотрим построение диаграммы перемещения звена  $BC$  для шарнирного четырехзвенного механизма (рис. 2.19,а).

Так как звено  $BC$  совершает вращательное движение, то его перемещение следует измерять в единицах угла (градусах или радианах), т.е. нам следует построить диаграмму  $\psi = f(t)$  или  $\psi = f(\varphi)$ ,

где  $\psi$  — угловое перемещение звена  $BC$ ;

$t$  — время;

$\varphi$  — угловое перемещение кривошипа  $OA$ .

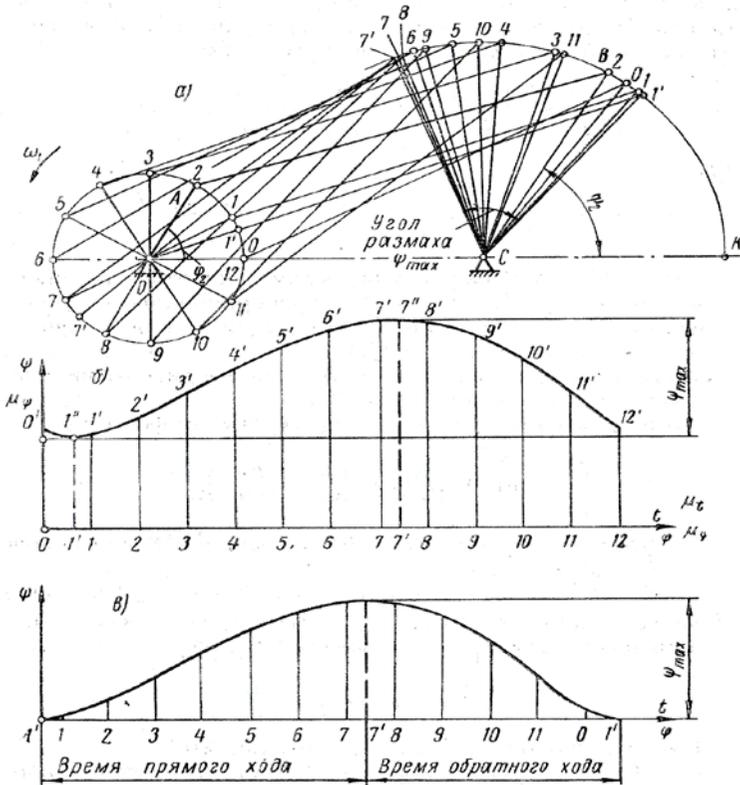


Рис. 2.19. К построению диаграммы перемещения коромысла шарнирного четырехзвенника

Строим 12 положений механизма, соответствующих 12 равноотстоящим положениям кривошипа  $OA$ , и 2 положения, соответствующие крайним положениям звена  $BC$  (положения  $1'$  и  $7'$ ). (В общем случае крайние положения звена могут не совпадать ни с одним из 12 положений).

Начало отсчета пути звена  $BC$  (угла  $\psi$ ) и угла  $\varphi$  поворота кривошипа  $OA$  можно вообще принять от любого положения. Отсчет угла  $\varphi$  будем производить от положения кривошипа  $0$ , а отсчет угла  $\psi$  — от горизонтальной прямой против часовой стрелки.

Проводим оси  $\psi$  и  $\varphi$  и вдоль оси  $\varphi$  откладываем 12 одинаковых отрезков  $0-1$ ,  $1-2$  и т. д., соответствующих углу поворота кривошипа  $OA$  на  $\frac{1}{12}$  часть оборота. Через точки  $0$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $3$  и т. д. проводим ординаты и откладываем на них отрезки  $0-0'$ ,  $1-1'$ ,  $2-2'$  и т. д., пропорциональные

углам  $\psi_i$  (рис. 2.19, б). Углы  $\psi_i$  могут быть определены либо транспортиром, либо измерителем, как углы, пропорциональные дугам окружности  $\overset{\sim}{K}0, \overset{\sim}{K}1, \overset{\sim}{K}2$  и т.д. Так как углы пропорциональны дугам, то отрезки, откладываемые по осям ординат, можно принять равными соответствующим дугам.

Кроме того, на оси  $\varphi$  отмечаем точки  $1'$  и  $7'$ , соответствующие крайним положениям звена  $BC$ . Отрезки  $[1 \simeq 1']$  и  $[7 \simeq 7']$  на оси  $\varphi$  должны быть пропорциональны дугам  $1-1'$  и  $7-7'$  на окружности траектории точки  $A$  (так как углы пропорциональны дугам), т. е. их величины легко определить по равенствам:

$$\frac{[1-1']}{1 \simeq 1'} = \frac{[1-2]}{1 \simeq 2}, \quad \frac{[7-7']}{7 \simeq 7'} = \frac{[7-8]}{7 \simeq 8},$$

откуда

$$[1-1'] = [1-2] \frac{1 \simeq 1'}{1 \simeq 2}; \quad [7-7'] = [7-8] \frac{7 \simeq 7'}{7 \simeq 8}.$$

Через точки  $1'$  и  $7'$  на оси  $\varphi$  проводим ординаты и на них откладываем отрезки  $1'-1''$  и  $7'-7''$ , пропорциональные углам  $\psi$  в положениях  $1'$  и  $7'$ . Соединив точки  $0', 1', 2'$  и т.д. плавной кривой, получим диаграмму  $\psi = f(\varphi)$ .

При равномерном вращении кривошипа эта диаграмма одновременно является диаграммой  $\psi = f(t)$ .

Масштаб диаграммы по оси  $\psi$  определяем по формуле

$$\mu_\psi = \frac{\psi_0}{[0-0']} \frac{\text{рад}}{\text{мм}} \left( \frac{\text{град}}{\text{мм}} \right),$$

где  $\psi_0$  — угол отклонения звена  $BC$  от линии  $OK$  для положения  $O$ , *рад* или *град*;

$[0-0']$  — отрезок, изображающий угол  $\psi_0$  на диаграмме.

Если на ординатах откладывать отрезки, непосредственно равные соответствующим дугам, то масштаб углов будет равным

$$\mu_\psi = \frac{\psi}{[\psi]} = \frac{1}{BC} \frac{\text{рад}}{\text{мм}},$$

где  $BC$  — масштабная величина коромысла, *мм*.

Масштабы диаграммы по оси  $\varphi$  (или  $t$ ) определяются аналогично предыдущему.

При построении диаграммы  $\psi = f(\varphi)$  мы приняли отсчет угла  $\varphi$  от положения  $O$ , а отсчет угла  $\psi$  от прямой  $OK$ . Диаграмма  $\psi = f(\varphi)$  будет

более наглядна, если отсчет угла  $\varphi$  принять от какого-либо крайнего положения механизма (например,  $I'$ ), а отсчет угла  $\psi$  от соответствующего крайнего положения звена  $B'C$ . В этом случае диаграмма будет иметь вид, показанный на рис. 2.19,в. Легко видеть, что обе кривые одинаковы, но различно расположены по отношению к осям координат.

Вторая диаграмма дает более наглядное представление о характере движения звена  $BC$ , на ней проще отметить фазы движения звена (периоды прямого и обратного ходов звена) и угол размаха звена.

Рекомендуем при построении диаграммы  $\psi = f(\varphi)$  отсчет перемещений производить от одного из крайних положений звена.

### 2.9. Графическое дифференцирование

Известно, что скорость является производной пути по времени

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Поэтому, если задана диаграмма пути  $s = f(t)$ , то методом графического дифференцирования можно определить скорость в любом положении.

На рис. 2.20 представлена диаграмма пути  $s = f(t)$ . Определим скорость  $v$  в положении  $I$ :

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\mu_s dy}{\mu_t dx},$$

где  $dy$  – элементарный отрезок (мм), изображающий в масштабе  $\mu_s$  элементарное перемещение  $ds$ ;

$dx$  – элементарный отрезок (мм), изображающий в масштабе  $\mu_t$  элементарное время  $dt$ .

Отношение  $\frac{dy}{dx}$ , как это известно из математики, есть тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс. Обозначив этот угол через  $\delta$ , получим

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{dy}{dx}.$$

Тогда

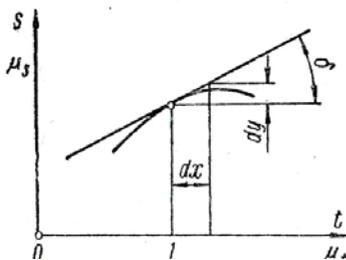


Рис. 2.20. К графическому дифференцированию

$$v = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \delta. \quad (2.18)$$

Таким образом, скорость в рассматриваемый момент времени пропорциональна тангенсу угла между касательной к кривой  $s = f(t)$  в соответствующей точке и осью  $t$ .

Формула 2.18 является основной формулой при графическом дифференцировании.

Имеется несколько методов графического дифференцирования. Рассмотрим два из них: метод касательных и метод хорд.

### Метод касательных

На рис. 2.21,а представлена диаграмма  $s = f(t)$ . В точках  $O', 1', 2'$  и т. д. проводим касательные к кривой  $s = f(t)$ . На оси  $t$  будущей диаграммы  $v = f(t)$  влево от начала координат выберем точку  $O'$  на произвольном расстоянии  $H$  от начала координат (рис. 2.21, б). Через точку  $O'$  проводим лучи  $O'-1'', O'-2'', O'-3''$  и т. д., параллельные касательным в точках  $1', 2', 3'$  и т. д. диаграммы  $s = f(t)$ . Эти лучи отсекают на оси  $v$  отрезки  $O-1'', O-2'', O-3''$  и т. д., пропорциональные соответствующим скоростям.

Действительно, обозначив эти отрезки через  $z_1, z_2, z_3$  и т. д., получим

$$v_i = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \delta = \frac{\mu_s}{\mu_t} \cdot \frac{z_i}{H},$$

или, так как  $\mu_s, \mu_t$  и  $H$  величины постоянные, то скорость пропорциональна отрезкам  $z_i$ :

$$v_i = \mu_v z_i,$$

где

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t H} \quad (2.19)$$

есть масштаб скорости диаграммы  $v = f(t)$ .

Перенеся отрезки  $O-1'', O-2'', O-3''$  и т. д. на ординаты в соответствующих положениях, получим точки  $O, 1''', 2''', 3'''$  и т. д., соединив которые плавной кривой, получим диаграмму  $v = f(t)$ .

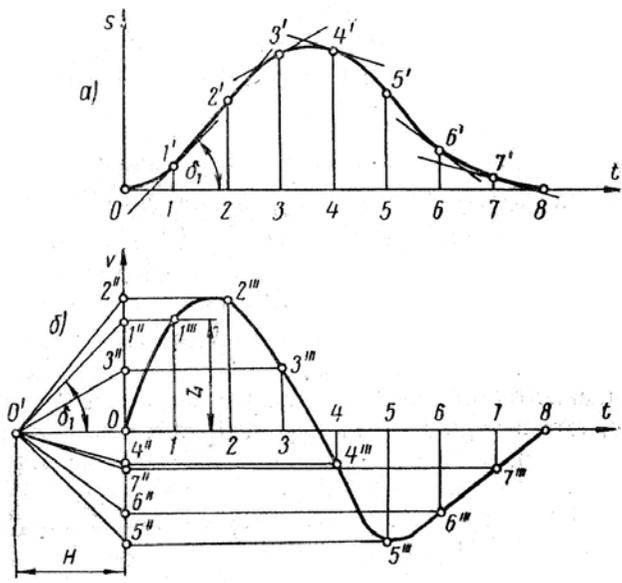


Рис. 2.21. Графическое дифференцирование по методу касательных

Мы указывали, что отрезок  $H$  выбирается произвольно. Чем больше  $H$ , тем меньше масштаб скоростей  $\mu_v$  и тем больше величины ординат диаграммы  $v = f(t)$ . При выборе  $H$  следует ориентироваться на наиболее крутую касательную. Правильный выбор величины отрезка  $H$  достигается опытом.

Кривая скорости является дифференциальной кривой по отношению к диаграмме пути, и наоборот, график пути является интегральной кривой по отношению к графику скоростей.

Из курса математического анализа известно, что:

- а) максимальной и минимальной ординатам графика перемещения должны соответствовать ординаты, равные нулю на дифференциальном графике скоростей;
- б) точке перегиба графика перемещений должны соответствовать максимальные или минимальные ординаты графика скоростей.

Это видно из сопоставления графиков  $s = f(t)$  и  $v = f(t)$  (см. рис. 2.21). Указанные положения следует также учитывать при графическом дифференцировании.

График ускорений можно получить, продифференцировав аналогичным образом график скоростей. При этом, если траектория движения точки является криволинейной, то полученные ускорения будут только касательными, если же движение точки является прямолинейным, то ускорение будет полным.

Точное проведение касательных к кривой является затруднительным. Поэтому графическое дифференцирование по методу касательных недостаточно точно. Особенно неточным будет график ускорения, полученный методом двойного дифференцирования. Диаграммы, построенные по планам скоростей и ускорений, значительно точнее.

### Метод хорд

Метод хорд заключается в следующем. Разбиваем кривую на ряд участков (участки могут быть неравными) и заменяем на этих участках кривые хордами (рис. 2.22,а), т.е. неравномерное движение на каждом участке приближенно заменяем движением равномерным с постоянной скоростью, равной действительной средней скорости на данном участке.

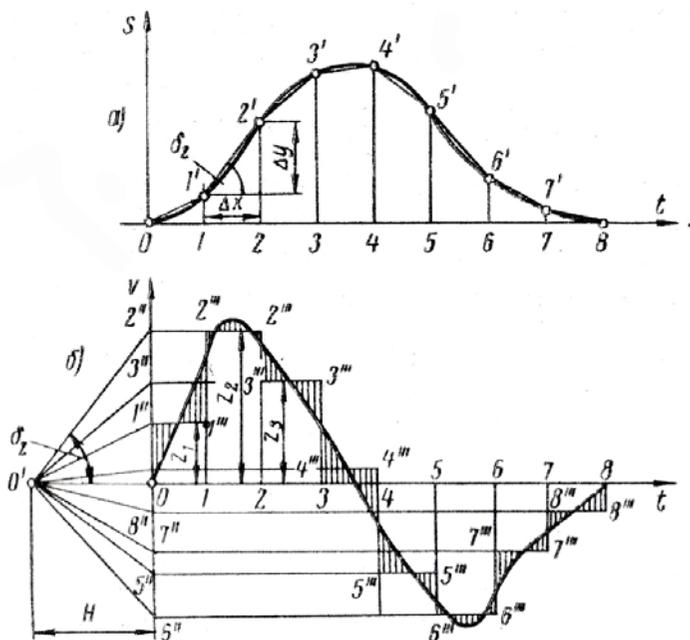


Рис. 2.22. Графическое дифференцирование по методу хорд

На оси  $t$  будущей диаграммы  $v = f(t)$  влево от начала координат на произвольном расстоянии  $H$  выбираем точку  $O'$  (рис. 2.22, б). Из этой точки проводим лучи  $O'—1''$ ,  $O'—2''$ ,  $O'—3''$  и т.д., параллельные соответствующим хордам  $O—1'$ ,  $1'—2'$ ,  $2'—3'$  и т.д. Эти лучи отсекают на оси  $v$  отрезки  $O—1''$ ,  $O—2''$ ,  $O—3''$  и т.д., пропорциональные средним скоростям на соответствующих участках. Откладывая равные этим отрезкам ординаты  $z_i$  на соответствующих участках, получим ступенчатую линию  $1''1'''2''2'''3''3'''$  и т. д. графика скорости. Истинный график скорости легко получить, проведя плавную кривую через уступы ступенчатого графика таким образом, чтобы площади заштрихованных площадок, расположенных с обеих сторон кривой на каждом участке, были одинаковы.

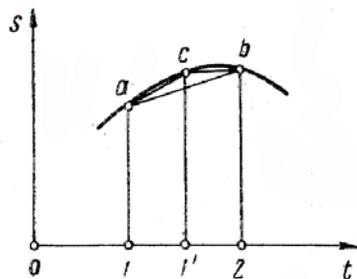


Рис. 2.23. Уточнение к способу дифференцирования по методу хорд в случае, когда хорда значительно отстает от кривой

При проведении кривой  $v = f(t)$  с достаточной для практики точностью можно принять, что она проходит через середины уступов  $1''—1'''$ ,  $2''—2'''$ ,  $3''—3'''$  и т. д. Это облегчает построение кривой. Следует отметить, что при проведении хорд на графике  $s = f(t)$  нужно, чтобы эти хорды были достаточно близки к кривой. Если этого не получается, то участок следует разбить на более мелкие части. Например, на участке  $1—2$  (рис. 2.23) хорда  $ab$  далека от кривой, поэтому участок нужно разбить на два меньших участка ( $1—1'$  и  $1'—2$ ) и на них к кривой провести две новые хорды  $ac$  и  $cb$ .

При проведении кривой  $v = f(t)$  с достаточной для практики точностью можно принять, что она проходит через середины уступов  $1''—1'''$ ,  $2''—2'''$ ,  $3''—3'''$  и т. д. Это облегчает построение кривой. Следует отметить, что при проведении хорд на графике  $s = f(t)$  нужно, чтобы эти хорды были достаточно близки к кривой. Если этого не получается, то участок следует разбить на более мелкие части. Например, на участке  $1—2$  (рис. 2.23) хорда  $ab$  далека от кривой, поэтому участок нужно разбить на два меньших участка ( $1—1'$  и  $1'—2$ ) и на них к кривой провести две новые хорды  $ac$  и  $cb$ .

Определим масштаб скорости

$$v_i = \frac{ds}{dt} \approx \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mu_s \Delta y}{\mu_t \Delta x} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \delta = \frac{\mu_s z_i}{\mu_t H} = \mu_v z_i,$$

откуда масштаб равен

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t H},$$

т.е. он определяется точно по такой же формуле, как и при дифференцировании по методу касательных.

## 2.10. Графическое интегрирование

Часто приходится решать обратную задачу — по заданной диаграмме скоростей  $v = f(t)$  получить диаграмму перемещений  $s = f(t)$  или по заданной диаграмме ускорений  $a = f(t)$  получить диаграмму скоростей  $v = f(t)$  и т. д.

Такая задача решается методом графического интегрирования.

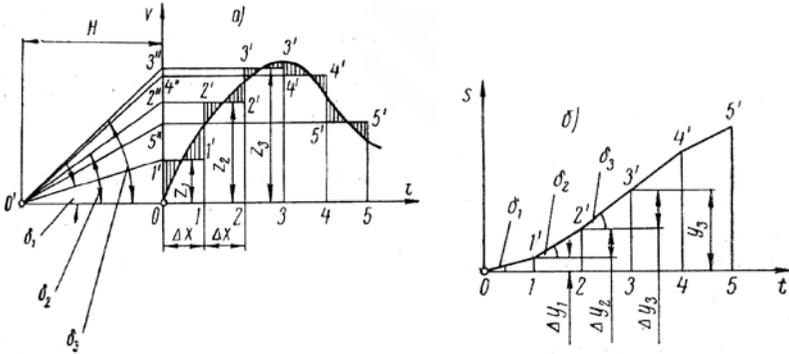


Рис. 2.24. Графическое интегрирование

На рис. 2.24,а изображена диаграмма  $v = f(t)$ . Разбиваем ее на участки  $O-1$ ,  $1-2$ ,  $2-3$  и т. д. На каждом участке проводим горизонтальные отрезки с ординатами  $z_i$  таким образом, чтобы площади прямоугольников, заключенных между этими отрезками и осью абсцисс, были равны площадям фигур, заключенным между частью кривой на этом участке и осью абсцисс. Для этого необходимо, чтобы на каждом участке площади заштрихованных площадок, расположенных по обе стороны кривой, были равны (это легко — достаточно точно устанавливается на глаз). Снесем ординаты  $z_i$  на ось  $v$  — получим точки  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$  и т. д. Выберем на оси  $t$  слева от начала координат на произвольном расстоянии  $H$  точку  $O'$ . Соединив эту точку с точками  $1'$ ,  $2'$ ,  $3''$  и т. д., получим лучи  $O'-1'$ ,  $O'-2''$ ,  $O'-3''$  и т. д.

Под диаграммой  $v = f(t)$  проводим оси координат диаграммы  $s = f(t)$  (рис. 2.24, б) и разбиваем ось  $t$  на участки, равные соответствующим участкам диаграммы  $v = f(t)$ . Далее на участке  $O-1$  проводим из начала координат отрезок  $O-1'$ , параллельный лучу  $O'-1'$ . Из

полученной точки  $1'$  на участке  $1-2$  проводим отрезок  $1'-2'$ , параллельный лучу  $O'-2''$ ; из точки  $2'$  проводим отрезок  $2'-3'$ , параллельный лучу  $O'-3''$ , и т.д. Полученная ломаная линия представляет приблизительно в определенном масштабе диаграмму  $s = f(t)$ .

Как видно, последовательность построения при графическом интегрировании противоположна построению при графическом дифференцировании по методу хорд.

Масштаб перемещения по оси  $s$  при графическом интегрировании, как это следует из формулы (2.19), равен

$$\mu_s = \mu_v \mu_t H. \quad (2.19 a)$$

### 2.11. Аналитическое исследование механизмов

Зависимости  $s = f(t)$ ,  $v = f(t)$  и  $a = f(t)$  принципиально можно получить для любого механизма аналитически. Однако для подавляющего большинства механизмов получение аналитических зависимостей весьма сложно. Да и сами эти зависимости имеют сложный вид, что затрудняет их практическое применение.

Но аналитическое исследование имеет существенное преимущество по сравнению с графическим — точность. Аналитическое исследование может быть проведено с любой точностью, тогда как графическому свойственны погрешности, связанные с естественной неточностью графических построений. Поэтому там, где требуется особая точность, приходится прибегать к аналитическому исследованию, несмотря на его сложность.

Рассмотрим аналитическое исследование центрального кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.25).

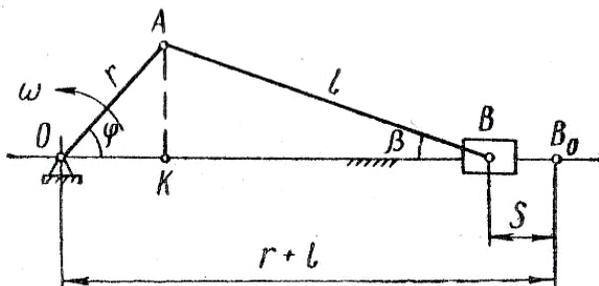


Рис. 2.25. К аналитическому исследованию центрального кривошипно-ползунного механизма

Для аналитического исследования необходимо получить зависимости пути  $s$ , скорости  $v$  и ускорения ползуна  $a$  только от размеров механизма и от его положения, определяемого углом  $\varphi$ .

Отсчет пути ползуна  $s$  будем производить от правого крайнего положения  $B_0$  (положение, когда кривошип и шатун вытягиваются в одну прямую).

Из рисунка видно, что

$$s = OB_0 - OK - KB.$$

Так как

$$OB_0 = r + l,$$

$$OK = r \cos \varphi,$$

$$KB = l \cos \beta,$$

$$\text{то } s = r + l - r \cos \varphi - l \cos \beta = r(1 - \cos \varphi) + l(1 - \cos \beta).$$

Из этого равенства следует исключить  $\beta$ . Выразим  $\beta$  через  $\varphi$ :

$$AK = r \sin \varphi = l \sin \beta,$$

откуда 
$$\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \varphi,$$

или 
$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^2}.$$

Подставляя значение  $\cos \beta$  в выражение для  $s$ , получим:

$$s = r(1 - \cos \varphi) + l \left( 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^2} \right). \quad (2.20)$$

Эта формула является точной для определения перемещения ползуна в зависимости от угла поворота кривошипа и размеров механизма. Ее можно упростить. Для этого разложим корень в ряд по биному Ньютона.

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^2} &= \left[ 1 - \left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^4 - \dots \end{aligned}$$

При наиболее часто применяемом отношении  $\frac{r}{l} = \frac{1}{4} \div \frac{1}{5}$  ряд очень быстро сходится.

Действительно, второй член ряда, например при  $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ , равен

$$\frac{1}{2} \left( \frac{r}{l} \sin \varphi \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} \right)^2 \sin^2 \varphi = 0.02 \sin^2 \varphi.$$

Так как  $\sin \varphi < 1$ , то второй член составляет менее 2% от величины первого члена. Значительно меньшую часть составляют следующие члены. Поэтому для практического пользования достаточно ограничиться двумя первыми членами.

Тогда приближенно получим

$$s = r(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} l \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi.$$

Обозначая  $\frac{r}{l} = \lambda$  и вынося г за общие скобки, окончательно получим

$$s = r \left( 1 - \cos \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \varphi \right). \quad (2.20a)$$

При равномерном вращении кривошипа, когда  $\varphi = \omega t$ ,

$$s = r \left( 1 - \cos \omega t + \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \omega t \right). \quad (2.20б)$$

Определяем скорость вращения ползуна

$$v = \frac{ds}{dt} = \omega r (\sin \omega t + \lambda \sin \omega t \cos \omega t)$$

или окончательно

$$v = \omega r \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\omega t \right). \quad (2.21)$$

Определяем ускорение ползуна

$$a = \frac{dv}{dt} = \omega^2 r (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t). \quad (2.22)$$

## Раздел 3. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

### 3.1. Общие положения

Большое распространение в машиностроении имеют так называемые кулачковые механизмы. Простейший кулачковый механизм состоит из ведущего звена, элемент которого имеет переменную кривизну, — кулачка 1, совершающего вращательное движение, и ведомого звена — толкателя 2, совершающего возвратно-поступательное движение (рис. 3.1). Кулачок и толкатель образуют высшую кинематическую пару 2-го класса. Как известно, низших кинематических пар 1-го класса в плоских механизмах всего два вида — вращательная и поступательная, а высших кинематических пар — бесчисленное множество. Поэтому при помощи кулачковых механизмов, в состав которых входят высшие кинематические пары, можно легко и просто осуществить почти любой наперед заданный закон движения ведомого звена, для чего требуется лишь подобрать соответствующий профиль кулачка.

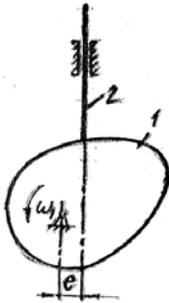


Рис. 3.1. Кулачковый механизм

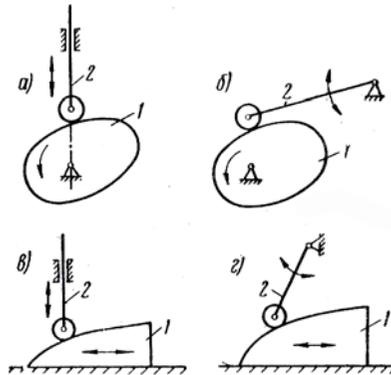


Рис. 3.2. Различные кулачковые механизмы, отличающиеся по видам движения

В практике часто необходимо иметь движение ведомого звена с остановками при непрерывном движении ведущего звена, что очень легко достигается при помощи кулачковых механизмов. Для этого следует в соответствующем месте сделать профиль кулачка по дуге окружности с центром на оси вращения кулачка.

Простота конструкции и возможность осуществления почти любого заданного закона движения ведомого звена являются основными достоинствами кулачковых механизмов.

Кулачковые механизмы имеют очень широкое применение в станках-автоматах.

По видам движения кулачка и толкателя кулачковые механизмы делятся в основном на следующие типы:

а) механизмы, в которых вращательное движение кулачка преобразуется в возвратно-поступательное движение толкателя (рис. 3.1, 3.2, а);

б) механизмы, в которых вращательное движение кулачка преобразуется в возвратно-вращательное движение толкателя (рис. 3.2, б);

в) механизмы, в которых возвратно-поступательное движение кулачка преобразуется в возвратно-поступательное движение толкателя (рис. 3.2. в);

г) механизмы, в которых возвратно-поступательное движение кулачка преобразуется в возвратно-вращательное движение толкателя (рис. 3.2, г).

Наиболее часто на практике применяются кулачковые механизмы первых двух типов. Кулачковые механизмы первого типа могут быть центральными, когда линия движения толкателя проходит через ось вращения кулачка (см. рис. 3.2, а), и нецентральными, или смещенными, когда линия движения толкателя не проходит через ось вращения кулачка, а смещена от нее на некоторую величину  $e$ , называемую **эксцентриситетом** (см. рис. 3.1).

Толкатели кулачковых механизмов в зависимости от элементов, которыми они касаются кулачка, делятся на следующие виды.

1. Остроконечный толкатель (рис. 3.3, а, в), конец которого выполнен очень малым радиусом. Недостатком таких толкателей является их низкая износостойкость, вследствие чего они могут применяться только в тихоходных кулачковых механизмах при незначительных передаваемых усилиях.

2. Сферический грибовидный толкатель (рис. 3.3, б), профиль которого очерчен по сфере.

3. Плоский (тарельчатый) толкатель (рис. 3.3, в, д), профилем которого является плоскость. Достоинство такого толкателя — благоприятное

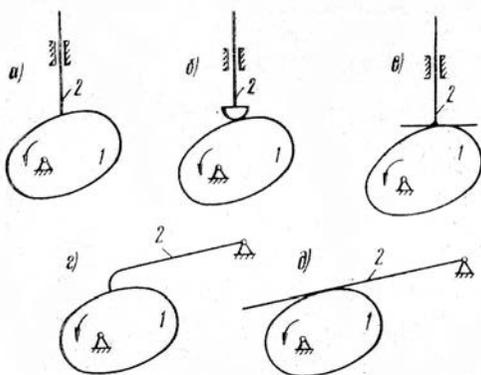


Рис. 3.3. Различные кулачковые механизмы, отличающиеся по видам толкателей

направление усилий. Однако при плоском толкателе кулачок должен быть выпуклым по всему профилю.

4. Толкатель, снабженный цилиндрическим роликом (см. рис. 3.2). Достоинством кулачкового механизма с таким толкателем по сравнению со всеми предыдущими является его износостойкость, так как здесь трение скольжения профилей высшей кинематической пары заменяется трением качения. Однако при толкателе с роликом, естественно, увеличиваются размеры кулачкового механизма.

Во время работы кулачкового механизма возникают инерционные усилия, направленные на отрыв рабочей поверхности толкателя от профиля кулачка. Поэтому одним из важнейших требований к кулачковым механизмам является то, что кулачок и толкатель должны быть постоянно в соприкосновении, т. е. они должны быть замкнуты.

Замыкание высшей кинематической пары кулачок — толкатель применяется либо кинематическое (геометрическое), либо силовое.

Примером кинематического замыкания может служить кулачковый механизм с пазовым кулачком, схема которого изображена на рис. 3.4. В паз кулачка, очерченный двумя эквидистантными (равноотстоящими) поверхностями, входит ролик толкателя, произвольное перемещение которого таким образом исключается.

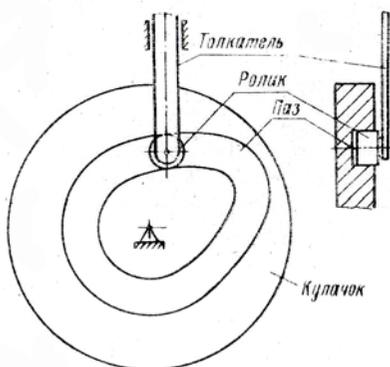


Рис. 3.4. Кулачковый механизм с кинематическим замыканием

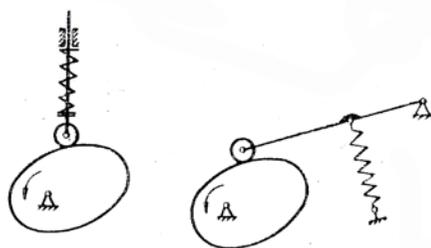


Рис. 3.5. Кулачковые механизмы с силовым замыканием

Силовое замыкание в большинстве случаев (рис. 3.5) осуществляется при помощи пружины (на предыдущих рисунках пружины не показывались, не будем их показывать и в дальнейшем). Реже для создания замыкающей силы применяются пневматические или гидравлические устройства.

Иногда для медленно движущихся кулачковых механизмов силовое замыкание осуществляется при помощи грузов. Однако при таком замыкании сильно возрастают габариты механизма, и оно применяется очень редко.

Необходимость замыкания кулачковых механизмов является их недостатком, так как это усложняет конструкцию. Другим недостатком кулачковых механизмов является сложность изготовления профиля кулачка, особенно когда от него требуется высокая точность.

Кроме рассмотренных плоских кулачковых механизмов, в технике применяются пространственные кулачковые механизмы. Схемы некоторых видов этих механизмов представлены на рис. 3.6, а, б. Характер преобразования движений ясен из рисунков.

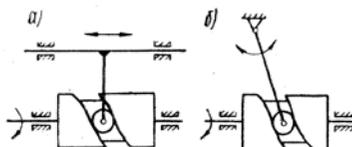


Рис. 3.6. Пространственные кулачковые механизмы

При изучении кулачковых механизмов возникают две задачи: исследование существующих (заданных) кулачковых механизмов (анализ) и проектирование новых кулачковых механизмов по заданным условиям (синтез).

### 3.2. Определение положений кулачковых механизмов

Задачи анализа кулачковых механизмов сводятся к определению положений толкателя в зависимости от положения кулачка и установлению скоростей и ускорений толкателя.

Определение положений начнем с наиболее простого центрального кулачкового механизма с острым толкателем.

#### Центральный кулачковый механизм с острым толкателем

Пусть дан кулачковый механизм (рис. 3.7). Требуется определить положение толкателя при повороте кулачка на заданный угол  $\varphi$ .

Определение положения толкателя в зависимости от положения кулачка можно было бы произвести обычным способом, т.е. повернуть кулачок на заданный угол  $\varphi$  (такое положение кулачка показано на рисунке пунктиром) и найти точку пересечения линии движения толкателя с профилем кулачка (точка  $A_1$ ), которая представляет искомое положение конца толкателя. Величина  $s_1 = A_0A_1$  есть перемещение толкателя при повороте кулачка на заданный угол  $\varphi$ .

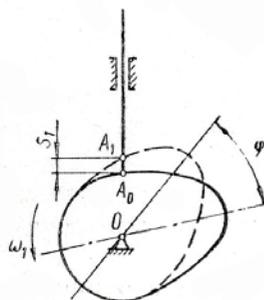


Рис. 3.7. К определению положения толкателя

Однако такое построение сложно и неточно, так как требует дополнительного построения сложного профиля кулачка. Особенно сложно

построение таким способом, если исследование следует произвести за весь цикл движения, т.е. за полный оборот кулачка. В этом случае пришлось бы строить целый ряд профилей кулачка.

Задача значительно облегчается, если применить так называемый **метод обращения движения**. Этот метод заключается в следующем.

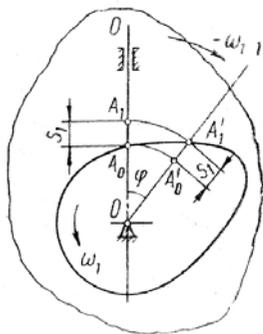


Рис. 3.8. Определение положения толкателя по методу обращения движения (по методу инверсии)

Сообщим всему кулачковому механизму вместе со стойкой вращательное движение вокруг оси вращения кулачка  $O$  скоростью  $\omega_1$  (рис. 3.8). Относительное движение звеньев от этого не изменится. Но тогда кулачок относительно неподвижных осей координат станет неподвижным, а толкатель вместе со стойкой будет вращаться вокруг оси вращения кулачка в противоположную сторону с угловой скоростью, равной по абсолютной величине угловой скорости кулачка. Поэтому вместо того, чтобы поворачивать кулачок на заданный угол  $\varphi$ , следует повернуть толкатель (вместе со стойкой) на

этот же угол, но в противоположное направление. Линия движения толкателя при этом займет положение  $O-I$ , которое является искомым относительным положением толкателя. Точка пересечения линии  $O-I$  с профилем кулачка  $A'_1$  есть искомое относительное положение конца толкателя.

Для определения действительного искомого положения конца толкателя достаточно радиусом  $OA'_1$  сделать засечку на действительной линии движения толкателя. Полученная точка  $A'_1$  есть действительное искомое положение конца толкателя. Отрезок  $s_1 = A_0A'_1$  есть искомое перемещение толкателя. Это перемещение можно измерить и по линии относительного положения толкателя  $O-I$ , для чего надо на этой линии сделать засечку радиусом  $OA_0$  (точка  $A'_0$ ). Отрезок  $A'_0A'_1$  также есть искомое перемещение толкателя  $s_1 = A_0A_1$ .

При указанных построениях положение стойки показывать не следует. Необходимо наносить лишь относительное положение линии движения толкателя.

### Центральный кулачковый механизм с толкателем, снабженным роликом (рис. 3.9)

В этом случае задача об определении положения и перемещения толкателя при повороте кулачка на угол  $\varphi$  решается следующим образом.

Центр вращения ролика (точка  $A$ ) всегда находится от действительного профиля кулачка на расстоянии, равном радиусу ролика  $r_0$ , т.е. он перемещается относительно кулачка по равноудаленной от его профиля на величину  $r_0$  **эквидистантной кривой**, которая называется **центровым профилем кулачка**.

Следовательно, для кинематического исследования кулачковый механизм с толкателем, снабженным роликом, может быть заменен кулачковым механизмом с острым толкателем, в котором кулачок выполнен по центральному профилю.

Центровой профиль (эквидистантная кривая) строится следующим образом. Радиусом ролика  $r_0$  проводим целый ряд дуг, центры которых лежат на действительном профиле кулачка. Огибающая этих дуг и будет центровым профилем (рис. 3.10).

Таким образом, задача об определении положения и перемещения толкателя, снабженного роликом, по заданному углу поворота кулачка  $\varphi$  легко сводится к решению предыдущей задачи.

Определение положения толкателя и его перемещения при повороте кулачка на угол  $\varphi$  понятно из рис. 3.9.

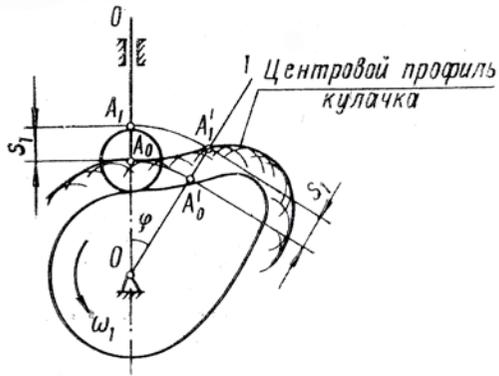


Рис. 3.9. Определение положения толкателя, снабженного роликом, для центрального кулачкового механизма



Рис. 3.10. Построение эквидистантной кривой



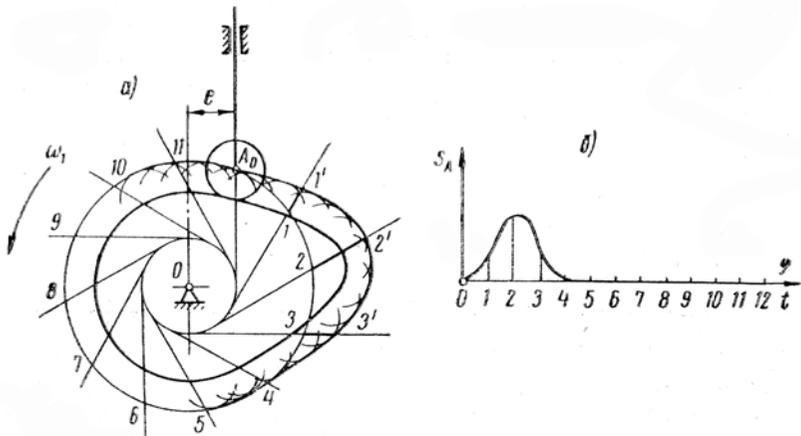


Рис. 3.12. Определение ряда положений толкателя, снабженного роликом, для нецентрального кулачкового механизма и построение диаграммы перемещения толкателя

### Кулачковый механизм с плоским толкателем (рис.3.13)

Для определения положения плоского толкателя при повороте кулачка на заданный угол  $\varphi$  применяем метод обращения, т.е. кулачок оставляем неподвижным, а толкатель (вместе со стойкой) поворачиваем на угол  $\varphi$  в направлении, противоположном направлению вращения кулачка. Линия движения толкателя займет при этом положение  $0-I$ .

Для определения положения тарелки толкателя нужно к профилю кулачка провести касательную таким образом, чтобы она была перпендикулярна к линии  $0-I$  (обычно тарелка перпендикулярна к направлению движения толкателя. Если

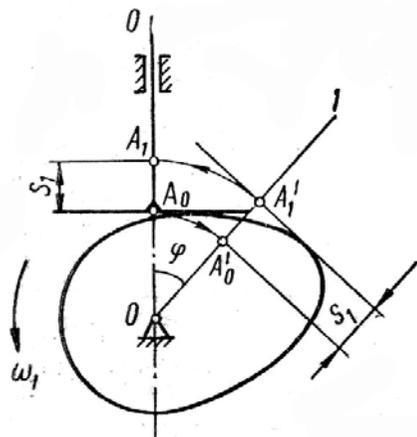


Рис. 3.13. Определение положения плоского возвратно-поступательного движущегося толкателя

угол между тарелкой и направлением движения толкателя отличается от прямого, то при построении касательную нужно проводить к линии  $O-I$  под соответствующим углом). Проведенная касательная есть искомое относительное положение тарелки толкателя. Для определения истинного положения толкателя нужно радиусом  $OA_1$  (точка  $A_1$  есть точка пересечения касательной с прямой  $O-I$ ) сделать засечку на действительном направлении движения толкателя (точка  $A_1$ ). Отрезок  $A_0A_1$  есть искомое перемещение толкателя. Это перемещение можно определить и по прямой  $O-I$ , для чего радиусом  $OA_0$  нужно сделать засечку на этой прямой (точка  $A_0$ ), Отрезок  $A_0A_1$  также есть искомое перемещение:

$$s_1 = A_0A_1 = A'_0A'_1.$$

### Кулачковый механизм с качающимся толкателем, снабженным роликом (рис. 3.14)

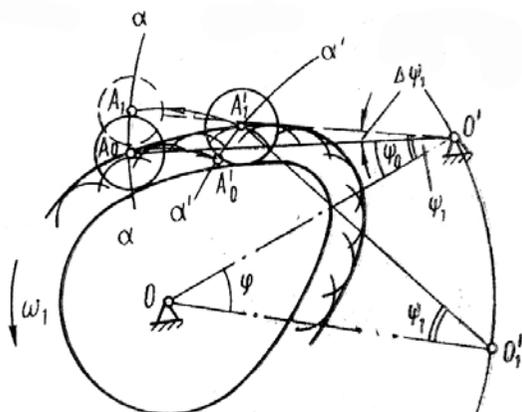


Рис. 3.14. Определение положения качающегося толкателя, снабженного роликом

В этом механизме, помимо профиля кулачка и диаметра ролика, известными являются расстояние между осями вращения кулачка и толкателя  $OO'$  и длина толкателя  $O'A$ .

Центр ролика (точка  $A$ ) в абсолютном движении перемещается по дуге окружности  $\alpha\alpha'$  радиусом  $O'A$  с центром в точке  $O'$ . Относительно кулачка центр ролика перемещается по центровому профилю.

Для определения положения и перемещения толкателя при повороте кулачка на заданный угол  $\varphi$  применим метод обращения движения, т.е. кулачок будем считать неподвижным, а толкатель  $O'A$  вместе со стойкой (положение стойки определяется положением линии центров  $OO'$ ) повернем на угол  $\varphi$  относительно оси вращения кулачка  $O$  в направлении, противоположном направлению его вращения. При таком повороте ось вращения толкателя будет перемещаться по дуге окружности радиусом  $OO'$  с центром в точке  $O$ , и линия центров займет новое положение  $OO'$ , которое составит с действительным положением линии центров  $O'A$  угол  $\varphi$ .

Далее из точки  $O'_1$ , которая является искомым относительным положением оси вращения толкателя, радиусом, равным длине толкателя  $O'A$ , делаем засечку на центровом профиле. Полученная точка  $A'_1$  есть искомое относительное положение центра ролика. Соединяя точку  $A'_1$  с точкой  $O'_1$ , получим искомое относительное положение толкателя. Перемещение (угол поворота) толкателя из одного положения в другое определяется разностью углов  $\psi_1$  и  $\psi_0$  между толкателем и линией центров в соответствующих положениях:

$$\Delta\psi_1 = \psi_1 - \psi_0.$$

Действительное искомое положение центра ролика  $A_1$  легко определить, если радиусом  $OA'_1$  сделать засечку на действительной траектории его движения — дуге  $\alpha\alpha$  (точка  $A_1$ ). Соединяя точки  $A_1$  и  $O'$  прямой, получим искомое действительное положение толкателя.

Дуга  $\tilde{A}_0\tilde{A}_1$ , измеренная по дуге  $\alpha\alpha$ , есть искомое перемещение точки  $A$ , которое пропорционально угловому перемещению толкателя:

$$\tilde{A}_0\tilde{A}_1 = O'A \cdot \Delta\psi_1.$$

Это же перемещение можно измерить по дуге  $\alpha'\alpha'$  (см. рис. 3.14), на которую радиусом  $OA_0$  следует перенести начальное положение точки  $A(A'_0)$ :

$$\tilde{A}'_0\tilde{A}'_1 = \tilde{A}_0\tilde{A}_1.$$

### Кулачковый механизм с плоским качающимся толкателем (рис. 3.15)

В этом кулачковом механизме, помимо профиля кулачка, задано расстояние между осями вращения кулачка и толкателя  $OO'$ .

Для определения положения и перемещения толкателя при повороте кулачка на заданный угол  $\varphi$  воспользуемся методом обращения движения, т.е. кулачок оставляем неподвижным, а толкатель вместе со стойкой поворачиваем на угол  $\varphi$  относительно оси вращения кулачка в направлении, противоположном направлению его вращения. При таком повороте ось вращения толкателя будет перемещаться по дуге окружно-

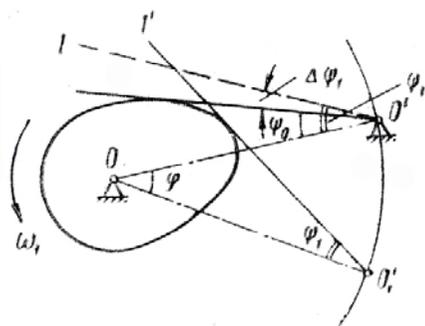


Рис. 3.15. Определение положения качающегося плоского толкателя

сти радиусом  $OO'$  с центром в точке  $O$ , и линия центров займет положение  $OO'$ , которое составит с действительным положением линии центров  $OO'$  заданный угол  $\varphi$ .

Далее из точки  $O'_1$ , которая является искомым относительным положением оси вращения толкателя, проводим касательную к профилю кулачка (прямая  $O'_1-I'$ ). Эта касательная есть искомое относительное положение толкателя.

Перемещение (угол поворота) толкателя из одного положения в другое определяется разностью углов  $\psi_1$  и  $\psi_0$  между толкателем и линией центров в соответствующих положениях:

$$\Delta\psi_1 = \psi_1 - \psi_0.$$

Для определения действительного искомого положения толкателя достаточно из точки  $O'$  провести прямую под углом  $\psi_1$  к линии центров  $OO'$  (эта прямая на рисунке показана пунктиром).

### 3.3. Определение скоростей и ускорений толкателя

Скорости и ускорения толкателя кулачкового механизма могут быть определены различными способами:

1. Способ кинематических диаграмм. Этот способ заключается в получении сначала диаграммы скорости толкателя  $v = f(t)$  или  $\omega_2 = f(t)$  методом графического дифференцирования диаграммы перемещения  $s = f(t)$  или  $\psi = f(t)$ , а затем в получении диаграммы ускорения толкателя  $a = f(t)$  или  $\varepsilon = f(t)$  методом вторичного графического дифференцирования диаграммы скоростей.

Этот способ был рассмотрен ранее (см. раздел 2, пункт 2.9).

2. Способ замены высшей кинематической пары кулачкового механизма низшими парами (см. раздел 1, пункт 1.8) и последующего построения планов скоростей и ускорений для заменяющего механизма.

3. Способ построения планов скоростей и ускорений непосредственно по действительной схеме кулачкового механизма. Этот способ рассмотрим на кулачковом механизме с острым толкателем, совершающим возвратно-поступательное движение (рис. 3.16, а).

Для построения планов скоростей и ускорений необходимо составить соответствующие векторные уравнения. Перемещение конца толкателя — точки  $A$  — можно рассматривать как движение, состоящее из переносного движения вместе с точкой  $A_x$  профиля кулачка (точка  $A$  толкателя совпадает с точкой  $A_x$  профиля кулачка) и движения относительно профиля кулачка. В соответствии с этим скорость конца толкателя равна

$$\overline{v_A} = \overline{v_{A_x}} + \overline{v_{AA_x}}.$$

(a)

В этом уравнении один вектор ( $\overline{v_{A_x}}$ ) известен и по величине и по направлению, а два других — по направлению:

скорость точки  $A_x$  кулачка равна

$$v_{A_x} = \omega_1 r_{OA_x} \quad \text{и}$$

направлена перпендикулярно радиусу:

$$\overline{v_{A_x}} \perp \overline{r_{OA_x}};$$

относительная скорость  $\overline{v_{AA_x}}$  направлена по касательной к профилю кулачка в точке  $A$ ,

$$\overline{v_{AA_x}} \parallel \overline{TT};$$

скорость толкателя  $\overline{v_A}$  направлена параллельно линии  $A-I$ .

Задаем масштаб плана скоростей  $\mu_v$  и определяем длину отрезка  $[pa_x]$ , изображающего вектор  $\overline{v_{A_x}}$ :

$$[pa_x] = \frac{v_{A_x}}{\mu_v}.$$

Откладываем этот отрезок из произвольно выбранной точки  $p$  — полюса плана скоростей (рис. 3.16, б). В соответствии с векторным уравнением (a), из конца этого отрезка (точки  $a_x$ ) проводим линию, параллельную вектору  $\overline{v_{AA_x}} (\parallel \overline{TT})$ , а из начала (точки  $p$ ) проводим направление вектора  $\overline{v_A} (\parallel \overline{A-I})$ . Пересечение этих направлений (точка  $a$ ) определяет величины отрезков  $[a_x a]$  и  $[pa]$ , изображающих в масштабе соответственно векторы  $\overline{v_{AA_x}}$  и  $\overline{v_A}$ . Величины этих скоростей равны:

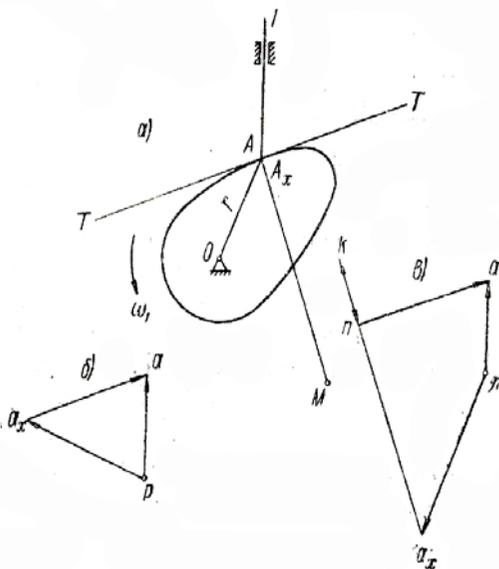


Рис. 3.16. Построение планов скоростей и ускорений для кулачкового механизма по его действительной схеме

$$v_{AA_x} = \mu_v [a_x a], \quad v_A = \mu_v [pa]$$

Переходим к построению плана ускорений.

Ускорение толкателя равно

$$\overline{a}_A = \overline{a}_{A_x} + \overline{a}_{AA_x}. \quad (6)$$

Так как относительное движение является криволинейным (по профилю кулачка), а переносное — вращательным, то ускорение  $\overline{a}_{AA_x}$  складывается из трех ускорений: кориолисова, нормального и касательно-го:

$$\overline{a}_{AA_x} = \overline{a}_{AA_x}^{-k} + \overline{a}_{AA_x}^{-n} + \overline{a}_{AA_x}^{-\tau}.$$

Подставляя значение  $\overline{a}_{AA_x}$  в уравнение (6), получим

$$\overline{a}_A = \overline{a}_{A_x} + \overline{a}_{AA_x}^{-k} + \overline{a}_{AA_x}^{-n} + \overline{a}_{AA_x}^{-\tau}. \quad (7)$$

В этом уравнении три вектора ( $\overline{a}_{A_x}, \overline{a}_{AA_x}^{-k}, \overline{a}_{AA_x}^{-n}$ ) известны и по величине и по направлению, а два ( $\overline{a}_A, \overline{a}_{AA_x}^{-\tau}$ ) — только по направлению:

ускорение  $\overline{a}_{A_x}$  по величине равно  $a_{A_x} = \omega_1^2 r_{OA_x}$  и направлено по радиусу  $r_{OA_x}$  от точки  $A$  к центру  $O$ :

кориолисово ускорение  $\overline{a}_{AA_x}^{-k}$  по величине равно  $a_{AA_x}^k = 2\omega_1 v_{AA_x}$ . Для определения его направления нужно вектор относительной скорости  $\overline{v}_{AA_x}$  повернуть на  $90^\circ$  в направлении  $\omega_1$ , т.е. кориолисово ускорение направлено перпендикулярно касательной  $TT$  вверх:

нормальное ускорение  $\overline{a}_{AA_x}^{-n}$  по величине равно  $a_{AA_x}^n = \frac{v_{AA_x}^2}{\rho}$ , где

$\rho$  — радиус кривизны профиля в точке  $A_x$  (радиус кривизны должен быть известен). Направлено ускорение  $\overline{a}_{AA_x}^{-n}$  по радиусу кривизны от точки  $A_x$  к центру кривизны  $M$ ;

касательное ускорение  $\overline{a}_{AA_x}^{-\tau}$  направлено параллельно касательной  $TT$ :

ускорение толкателя  $\overline{a}_A$  направлено вдоль линии движения толкателя  $A-I$ .

Задаем масштаб плана ускорений  $\mu_a$  и определяем величины отрезков, которые должны изобразить соответствующие векторы на плане ускорений:

$$[\pi a_x] = \frac{a_{Ax}}{\mu_a}; \quad [a_x k] = \frac{a_{AAx}^k}{\mu_a}; \quad [kn] = \frac{a_{AAx}^n}{\mu_a}.$$

Выбираем произвольную точку  $\pi$  (полюс плана ускорений) (рис. 3.16, в) и от нее в соответствии с векторным уравнением (с) откладываем в указанных выше направлениях последовательно отрезки  $[\pi a_x]$ ,  $[a_x k]$  и  $[kn]$ , изображающие векторы соответственно  $\overline{a_{Ax}}$ ,  $\overline{a_{AAx}^k}$ ,  $\overline{a_{AAx}^n}$ . Затем через точку  $n$  проводим направление ускорения  $\overline{a_{AAx}^\tau}$  ( $\parallel \overline{TT}$ ), а через полюс  $\pi$  — направление ускорения  $\overline{a_A}$  ( $\parallel \overline{A-1}$ ). Пересечение этих направлений определяет величины отрезков  $[na]$  и  $[\pi a]$ , изображающих в выбранном масштабе векторы  $\overline{a_{AAx}^\tau}$  и  $\overline{a_A}$ .

Величины этих ускорений вычисляем по формулам:

$$a_{AAx}^\tau = \mu_a [na]; \quad a_A = \mu_a [\pi a].$$

Мы рассмотрели кулачковый механизм с острым толкателем. Если толкатель снабжен роликом, то надо сначала построить центровой профиль кулачка (эквидистантную кривую), затем задача решается аналогично рассмотренной.

### 3.4. Выбор закона движения толкателя

Синтез кулачковых механизмов представляет собой задачу, обратную предыдущей, т.е. по заданному закону движения толкателя следует построить профиль кулачка. Эта задача называется иначе **профилерованием кулачка**.

Характерный закон движения толкателя  $s = f(t)$ , т.е. зависимость перемещения толкателя от времени, изображен графически диаграммой, представленной на рис. 3.17. Эта кривая при равномерном вращении кулачка одновременно является зави-

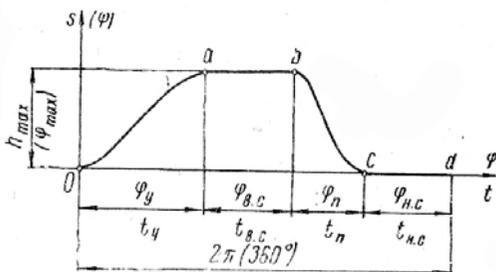


Рис. 3.17. Характерный закон

симостью перемещения толкателя от угла поворота кулачка  $s = f(\varphi)$ .

Движение толкателя, соответствующее одному обороту кулачка, в общем случае имеет четыре фазы.

1. Фаза удаления (подъема) толкателя, на протяжении которой толкатель подымается на величину размаха  $h_{\max}$  (или поворачивается на угол размаха  $\psi_{\max}$ , если толкатель вращающийся). Эта фаза происходит за время поворота  $t_y$  кулачка на угол  $\varphi_y$ .

2. Фаза верхнего стояния толкателя, на протяжении которого толкатель находится в покое в верхнем положении. Эта фаза происходит за время поворота кулачка  $t_{в.с}$  на угол  $\varphi_{в.с}$ .

3. Фаза приближения толкателя, на протяжении которой толкатель возвращается в начальное положение. Эта фаза происходит за время  $t_n$  поворота кулачка на угол  $\varphi_n$ .

4. Фаза нижнего стояния, на протяжении которой толкатель находится в покое в нижнем положении. Эта фаза происходит за время  $t_{н.с}$  поворота кулачка на угол  $\varphi_{н.с}$ .

Так как все фазы происходят за один оборот кулачка, то сумма углов всех фаз равна  $360^\circ$  (или  $2\pi$  радиан):

$$\varphi_y + \varphi_{в.с} + \varphi_n + \varphi_{н.с} = 2\pi \quad (3.1)$$

Сумма отрезков времени всех фаз равна периоду одного оборота кулачка  $T$ :

$$t_y + t_{в.с} + t_n + t_{н.с} = T. \quad (3.2)$$

Ход толкателя  $h_{\max}$  (или размах толкателя  $\psi_{\max}$ ), а также отрезки времени всех фаз движения толкателя и соответствующие им углы поворота кулачка полностью определяются той операцией, которую должен выполнять кулачковый механизм.

Закон движения толкателя в фазах удаления и возвращения, т.е. характер кривых  $oa$  и  $bc$  на диаграмме  $s = f(t)$ , также во многих случаях зависит от операции, выполняемой кулачковым механизмом. В этом случае закон движения толкателя является полностью заданным.

Однако часто от кулачкового механизма требуется лишь осуществление хода толкателя на величину  $h_{\max}$  (или  $\psi_{\max}$ ) за определенное время. Закон же, по которому будет происходить это движение, не имеет значения с точки зрения выполнения толкателем своего назначения. В этом случае закон движения толкателя (характер кривых  $oa$  и  $bc$ ) конструктор может выбирать самостоятельно.

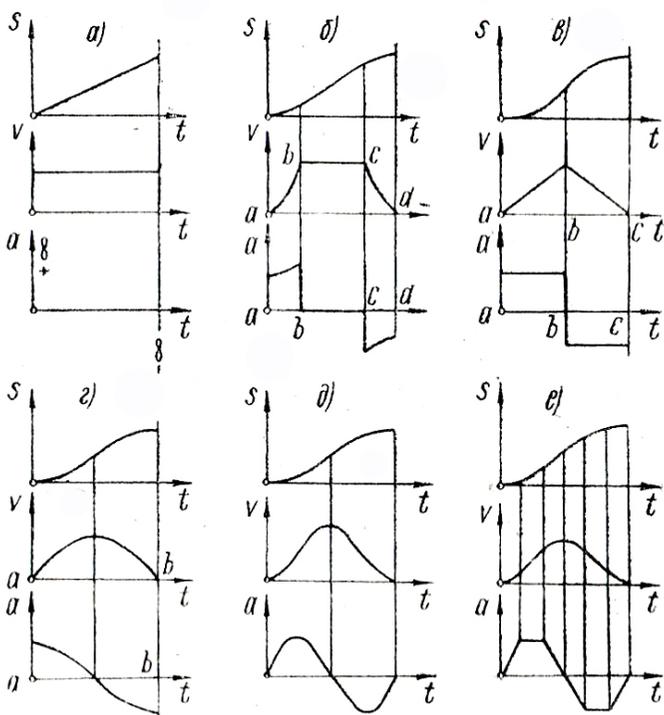


Рис. 3.18. Различные законы движения толкателя

При выборе закона движения толкателя следует избегать скачкообразного (резкого) изменения его ускорения, так как такое изменение ускорения вызывает соответствующее резкое возрастание сил (сила равна  $P=ma$ ), в результате чего при работе кулачкового механизма происходят так называемые **удары**.

Рассмотрим, как изменяется ускорение при некоторых законах движения толкателя.

На рис. 3.18 приведены диаграммы различных законов перемещения толкателя (в одном направлении) и соответствующие им диаграммы скорости и ускорения.

На рис. 3.18, *a* показаны диаграммы при равномерном перемещении толкателя (скорость постоянна). При таком законе перемещения толкателя в начале и конце его движения имеет место мгновенное возрастание ускорения ( $a$  следовательно, и сил) до бесконечности. Такое мгновенное

теоретическое изменение ускорения (и силы) до бесконечности называется **жестким ударом**. Конечно, вследствие упругости материалов кулачка и толкателя на практике не происходит возрастания ускорений и сил до бесконечности, однако они остаются достаточно большими. Поэтому применение кулачковых механизмов с равномерным движением толкателя допустимо только при небольших скоростях вращения кулачка и малых массах толкателя.

На рис. 3.18, б приведена диаграмма перемещения толкателя, выполненная по прямой, скругленной в начале и конце движения дугами окружностей. Здесь скорость постоянна только в средней части времени движения. Достижение этой скорости и убывание ее происходит не мгновенно, а постепенно (по кривым на участках *ab* и *cd*). Однако при таком законе перемещения толкателя имеет место мгновенное изменение ускорения на конечную величину в четырех положениях (точки *a*, *b*, *c* и *d*). Мгновенное изменение ускорения и соответствующее ему возрастание динамических усилий на конечную величину называется **мягким ударом**. Естественно, динамические давления при мягких ударах значительно меньше, чем при жестких. Поэтому кулачковые механизмы с мягкими ударами можно применять при оборотах кулачка до 2000 об/мин.

На рис. 3.18, в приведены диаграммы перемещения скорости и ускорения для равноускоренного движения толкателя. При таком законе движения скорость на первой части диаграммы (участок *ab*) равномерно возрастает (ускорение положительно), а на второй части диаграммы (участок *bc*) равномерно убывает (ускорение отрицательно). Как видно из диаграммы ускорений, здесь так же, как и в предыдущем случае, в точках *a*, *b* и *c* наблюдаются мягкие удары.

На рис. 3.18, г приведены диаграммы движения толкателя, где его ускорение изменяется по косинусоидальному закону. При таком законе скорость и ускорение во время движения толкателя изменяются плавно, однако в начале и конце движения (в точках *a* и *b*) имеет место скачок ускорения на конечную величину, т.е. мягкий удар.

На рис. 3.18, д представлены диаграммы движения толкателя, где ускорение изменяется по синусоидальному закону. В этом случае скорость и ускорение изменяются плавно и свое изменение начинают и оканчивают нулевыми значениями. Поэтому никаких скачков ускорения здесь нет и кулачковый механизм работает без ударов. Синусоидальный закон изменения ускорения обеспечивает наибольшую плавность движения толкателя и может применяться для быстроходных кулачковых механизмов. Недостатком этого закона является то, что скорость толкателя в начале движения растет очень медленно, вследствие чего его подъем в начале движения задерживается.

На рис. 3.18, *e* показаны диаграммы движения толкателя, где график ускорения выполнен по двум равнобочным трапециям. В этом случае происходит сглаженное равноускоренное движение толкателя. Для того чтобы начальное движение толкателя не было слишком затяжным (как при синусоидальном законе), проекции наклонных граней трапеции на ось  $t$  берутся не больше  $\frac{1}{4} \div \frac{1}{5}$  основания трапеции. Так как кривая ускорения не имеет скачков и она начинается и оканчивается нулевыми значениями, то при таком законе движения нет ударов. Поэтому кулачковые механизмы с трапецеидальным законом изменения ускорения вполне применимы при высоких числах оборотов кулачка.

Судить о законе движения толкателя по кривой перемещения  $s = f(t)$  очень затруднительно, так как эти кривые (см. рис. 3.18, *б, в, г, д, e*) внешне мало отличаются. Только кривые ускорения дают полное представление о плавности движения толкателя, о наличии ударов и т.д. Поэтому при выборе закона движения обычно задаются диаграммой изменения его ускорения. Диаграмму перемещения  $s = f(t)$ , необходимую для построения профиля кулачка, получают методом двукратного интегрирования диаграммы ускорения.

### 3.5. Профилирование кулачков

Профилирование кулачка является задачей, обратной исследованию кулачкового механизма, т.е. требуется построить профиль кулачка, который бы обеспечил движение толкателя по заданному закону.

Рассмотрим профилирование кулачков различных кулачковых механизмов. Начнем с наиболее простого — центрального кулачкового механизма с поступательно движущимся острым толкателем.

#### Центральный кулачковый механизм с острым толкателем

Заданными являются: закон движения толкателя  $s = f(t)$ , или  $s = f(\varphi)$ , минимальный радиус кулачка  $r_{\min}$  и направление вращения кулачка (рис. 3.19).

Порядок построения профиля кулачка следующий.

1. Делим углы удаления  $\varphi_y$  и приближения  $\varphi_n$  на диаграмме  $s = f(\varphi)$  на некоторое количество равных частей (у нас угол  $\varphi_y$  поделен на четыре части, а угол  $\varphi_n$  — на шесть частей). Углы стояния толкателя  $\varphi_{в.с}$  и  $\varphi_{н.с}$  делить не нужно, так как профиль кулачка в пределах этих углов очерчивается дугами окружностей постоянного радиуса.

2. Находим графически (или аналитически) по диаграмме

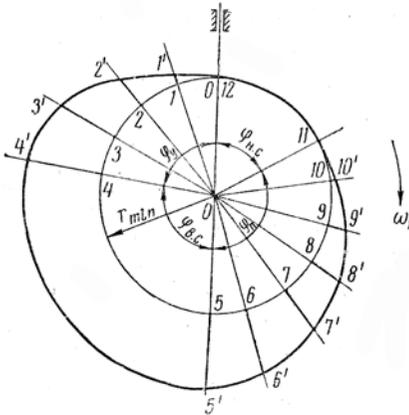
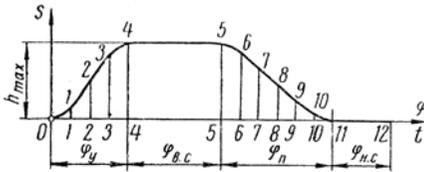


Рис. 3.19. К профилированию кулачка для центрального кулачкового механизма с острым толкателем

$s = f(\varphi)$  значения перемещений толкателя, соответствующие различным углам  $\varphi$ :

$$s_1 = \mu_s [1-1],$$

$$s_2 = \mu_s [2-2],$$

$$s_3 = \mu_s [3-3] \text{ и т.д.,}$$

где  $\mu_s$  – масштаб перемещения;

[1—1], [2—2] — ординаты диаграммы  $s = f(\varphi)$ , соответствующие различным углам  $\varphi$ .

3. С центром в точке  $O$  (ось вращения кулачка) проводим окружность радиусом, равным минимальному радиусу кулачка  $r_{\min}$ , и через ось  $O$  — линию  $O—O$  движения толкателя.

В соответствии с разметкой углов  $\varphi$  на диаграмме  $s = f(\varphi)$  откладываем, начиная от действительной линии движения толкателя, в направлении, противоположном вращению кулачка, все углы  $\varphi_i$  ( $\varphi_y$ ,  $\varphi_{в.с}$ ,  $\varphi_n$ ,  $\varphi_{н.с}$  и промежуточные) и проводим через ось вращения кулачка лучи  $O—1$ ,  $O—2$ ,  $O—3$  и т.д., которые являются относительными положениями линии движения толкателя, соответствующими повороту кулачка на данный угол  $\varphi$ .

4. Вдоль этих лучей от окружности радиусом  $r_{\min}$  откладываем отрезки  $1—1'$ ,  $2—2'$ ,  $3—3'$  ... (эти отрезки показаны жирными линиями), равные соответствующим перемещениям  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , ..., вычисленным ранее (см. п. 2). Соединяя полученные точки  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  и т.д. плавной кривой, получим профиль кулачка. Между лучами  $O—4$ ,  $O—5$  (угол между ними равен  $\varphi_{в.с}$ ) и между лучами  $O—11$  и  $O—O$  (угол между ними равен  $\varphi_{н.с}$ ) профиль кулачка очерчивается из центра  $O$  дугами окружностей постоянных радиусов.

### Центральный кулачковый механизм с толкателем, снабженным роликом

Здесь, кроме заданного для предыдущего кулачкового механизма, известным является радиус ролика  $r_0$ .

Способ профилирования такого кулачка заключается в том, что сначала строится центровой профиль кулачка, по которому в относительном движении перемещается центр вращения ролика, а затем строится внутренняя эквидистантная кривая, которая является действительным профилем кулачка. Центровой профиль кулачка строится точно так же, как в предыдущем случае строился действительный профиль кулачка. Единственное отличие заключается в том, что отсчет перемещений

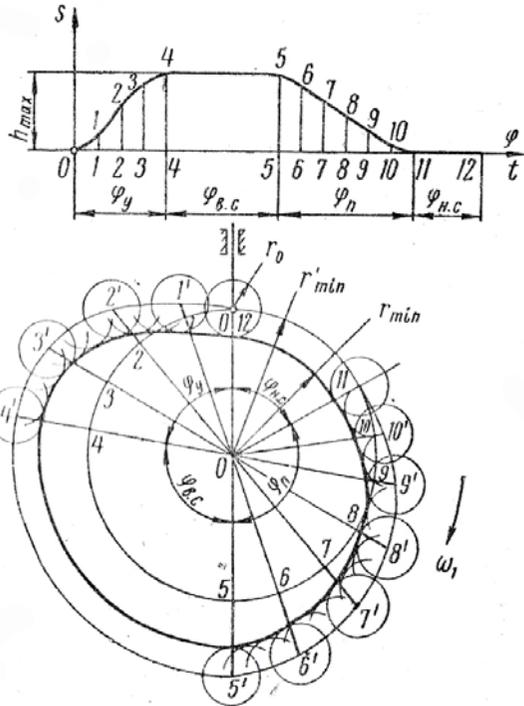


Рис. 3.20. К профилированию кулачка для центрального кулачкового механизма с толкателем, снабженным роликом

толкателя следует брать от окружности радиусом  $r'_{min} = r_{min} + r_0$ . Построение центрального кулачкового механизма с толкателем, снабженным роликом, показано на рис. 3.20.

### Нецентральный кулачковый механизм с толкателем, снабженным роликом

Заданными являются: закон движения толкателя  $s = f(\varphi)$ , минимальный радиус кулачка  $r_{min}$ , радиус ролика толкателя  $r_0$ , эксцентриситет  $e$  и направление вращения кулачка (рис. 3.21).

Профилирование кулачка производим в такой последовательности.

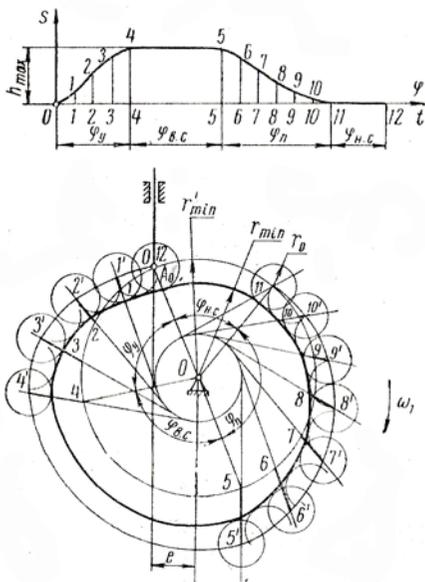


Рис. 3.21. К профилированию кулачка для нецентрального кулачкового механизма с толкателем, снабженным роликом

заданной диаграммой. Через полученные точки 1, 2, 3, ... проводим лучи, касательные к окружности радиусом  $e$ . Эти лучи есть относительные положения линии движения толкателя, соответствующие различным углам поворота кулачка.

4. Вдоль этих лучей от окружности радиусом  $r'_{\min}$  откладываем вычисленные ранее (п. 2) соответствующие перемещения толкателя (отрезки  $1-1'$ ,  $2-2'$ ,  $3-3'$  ...). Через полученные точки  $A_0$ ,  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  и т.д. проводим плавную кривую — это есть центровой профиль кулачка. Между лучами 4 и 5 (угол между ними равен  $\varphi_{в.с}$ ) и лучами 11 и  $O$  (угол между ними равен  $\varphi_{н.с}$ ) центровой профиль очерчивается дугами постоянных радиусов.

5. Строим действительный профиль кулачка. Для этого проводим ряд дуг окружностей радиусом ролика  $r_0$  внутри центровой профиля с центрами на этом профиле. Огибающая этих дуг (внутренняя эквидистантная кривая) и будет действительным профилем кулачка. Отметим, что между лучами 4' и 5' и лучами 11' и  $O$  строить эквидистанты нет необходимости,

1 и 2. Первые два пункта выполняем так же, как и при профилировании кулачка центрального кулачкового механизма с острым толкателем.

3. С центром в точке  $O$  (ось вращения кулачка) проводим окружности радиусами  $r'_{\min} = r_{\min} + r_0$  и  $e$ . К окружности радиусом  $e$  проводим вертикальную касательную — линию движения толкателя. Точка пересечения этой линии с окружностью радиусом  $r'_{\min}$  (точка  $A_0$ ) есть начальное (нижнее) положение оси вращения ролика.

От точки  $A_0$  в направлении, противоположном направлению вращения кулачка, делим окружность радиусом  $r_{\min}$  на углы  $\varphi_i$  в соответствии с

так как в этих пределах профиль кулачка очерчивается дугами окружностей постоянных радиусов.

### Кулачковый механизм с плоским поступательно движущимся толкателем

Для этого кулачкового механизма задано: закон движения толкателя  $s = f(\varphi)$ , минимальный радиус кулачка  $r_{\min}$  и направление вращения толкателя.

Построение профиля кулачка ведем в такой последовательности (рис. 3.22).

1 и 2. Первые два пункта выполняем точно так же, как и при профилировании кулачка центрального кулачкового механизма с острым толкателем.

3. С центром в точке  $O$  (ось вращения кулачка) проводим окружность радиусом  $r_{\min}$  через эту точку проводим направление движения толкателя  $O-O$ .

Через точку пересечения этой прямой с окружностью (точка  $A_0$ ) проводим к ней перпендикуляр. Этот перпендикуляр есть начальное положение плоскости толкателя.

В направлении, противоположном вращению кулачка, от линии  $O-O$  откладываем в соответствии с заданной диаграммой углы  $\varphi_i$  ( $\varphi_y$ ,  $\varphi_{в.с.}$ ,  $\varphi_n$ ,  $\varphi_{н.с.}$  и промежуточные). Через точку  $O$  проводим лучи  $O-1$ ,  $O-2$ ,  $O-3$  и т.д., являющиеся относительными положениями линии движения толкателя, соответствующие различным углам поворота кулачка.

4. Вдоль этих лучей от окружности радиусом  $r_{\min}$  откладываем соответствующие перемещения толкателя (отрезки  $1-1'$ ,  $2-2'$ ,  $3-3'$ ...), вычисленные ранее (см. п. 2). Через полученные точки  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  и т.д. проводим перпендикуляры к соответствующим лучам.

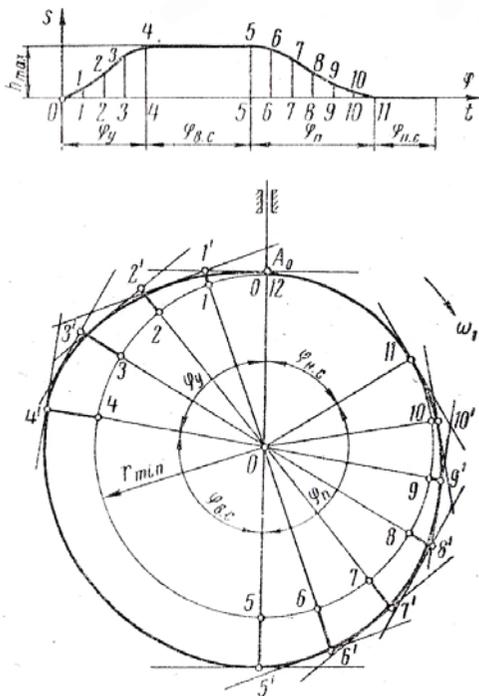


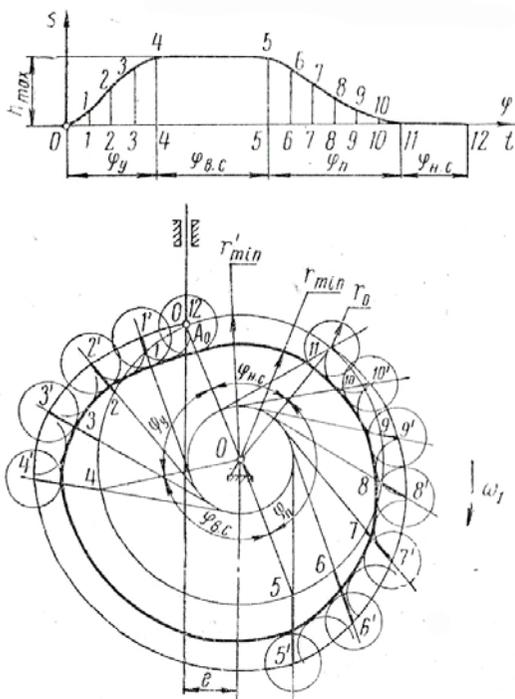
Рис. 3.22. К профилированию кулачка для кулачкового механизма с плоским толкателем

Эти перпендикуляры являются относительными положениями плоскости толкателя (плоскость толкателя обычно перпендикулярна к направлению движения толкателя).

5. Строим огибающую к относительным положениям плоскости толкателя. Это и есть профиль кулачка.

### Кулачковый механизм с качающимся толкателем, снабженным роликом

Заданными для этого кулачкового механизма являются: закон движения толкателя  $\psi = f(\varphi)$ , минимальный радиус кулачка  $r_{\min}$ , радиус ролика  $r_0$ , расстояние между осями вращения кулачка и толкателя  $OO'$ , длина толкателя  $O'A$ , направление вращения кулачка (рис. 3.23).



Построение профиля кулачка ведем в такой последовательности.

1. Делим углы удаления  $\varphi_y$  и приближения  $\varphi_n$  на диаграмме  $\psi = f(\varphi)$  на некоторое количество равных частей (в нашем случае угол  $\varphi_y$  поделен на четыре части, а угол  $\varphi_n$  — на шесть частей). Углы стояния  $\varphi_{в.с}$  и  $\varphi_{н.с}$  делить не следует, так как в пределах этих углов профиль кулачка очерчивается дугами окружностей постоянных радиусов.

2. Находим графически (или аналитически) по диаграмме  $\psi = f(\varphi)$  значения угловых перемещений толкателя, соответствующих различным углам поворота кулачка (эти углы отсчитываются от нижнего положения

Рис. 3.23. К профилированию кулачка для кулачкового механизма с качающимся толкателем, снабженным роликом

толкателя):

$$\psi_1 = \mu_\psi [1 - 1], \quad \psi_2 = \mu_\psi [2 - 2], \quad \text{и т. д.,}$$

где  $\mu_\psi$  — масштаб перемещений толкателя,  $\frac{\text{град}}{\text{мм}} \left( \frac{\text{рад}}{\text{мм}} \right)$ ;

$[1 - 1], [2 - 2], \dots$  — ординаты (мм) диаграммы  $\psi = f(\varphi)$ .

3. Размечаем положения осей вращения кулачка  $O$  и толкателя  $O'$ . Из точки  $O$  — оси вращения кулачка — проводим окружность радиусом  $r'_{\min} = r_{\min} + r_0$ , а из точки  $O'$  — оси вращения толкателя — делаем на этой окружности засечку радиусом, равным длине толкателя  $O'A$ . Полученная точка  $A_0$  есть начальное (нижнее), положение центра ролика. Соединив эту точку с точкой  $O'$ , получим прямую  $O'A_0$ , которая является начальным положением толкателя. Измеряем по чертежу угол  $\psi_0$  между начальным положением толкателя  $O'A_0$  и положением линии центров  $OO'$ .

4. С центром в точке  $O$  проводим окружность радиусом  $OO'$  и от прямой  $OO'$  в направлении, противоположном вращению кулачка, откладываем все углы  $\varphi$  ( $\varphi_y, \varphi_{в.с}, \varphi_п, \varphi_{н.с}$  и промежуточные). Под этими углами из точки  $O$  проводим лучи. Точки пересечения этих лучей с окружностью радиусом  $OO'$  ( $O'_1, O'_2, O'_3, \dots$ ) являются относительными положениями оси вращения толкателя, а сами лучи  $OO'_1, OO'_2, OO'_3, \dots$  являются относительными положениями линий центров.

5. Вычисляем для каждого положения толкателя углы между толкателем и линией центров:

$$\psi'_1 = \psi_0 + \psi'_1;$$

$$\psi'_2 = \psi_0 + \psi'_2;$$

.....

и под этими углами к соответствующим относительным положениям линии центров  $OO'_1, OO'_2, OO'_3, \dots$  из точек  $O'_1, O'_2, O'_3, \dots$  проводим лучи, на которых делаем засечки радиусом, равным длине толкателя  $O'A$ . Получаем точки  $1', 2', 3', \dots$ , которые являются относительными положениями центра ролика. Прямые  $O'1', O'2', O'3', \dots$  являются соответствующими относительными положениями толкателя. Соединяя точки  $1', 2', 3', \dots$ , плавной кривой, получим центровой профиль кулачка.

Положения точек центрального профиля кулачка  $1', 2', 3', \dots$ , можно определить иначе. Вместо углов перемещения толкателя  $\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3, \dots$ , отсчитываемых (и откладываемых) от линий центров, можно определить

линейные перемещения центра ролика толкателя  $s_i$ , отсчитываемые от его начального положения:

$$s_1 = O'A \cdot \psi_1; \quad s_2 = O'A \cdot \psi_2.$$

(углы  $\psi_i$  в этих формулах нужно считать в радианах).

Откладывая эти пути по дугам окружностей, проведенным из центров  $O'_1, O'_2, O'_3, \dots$  радиусом  $O'A$  от окружности радиусом  $r'_{\min}$ , получим точки центрального профиля кулачка. Дуги  $s_1, s_2, s_3, \dots$  (дуги 1—1', 2—2', 3—3', ...) на рисунке показаны жирными линиями.

6. Строим действительный профиль кулачка. Для этого внутри центрального профиля радиусами ролика  $r_0$  проводим ряд дуг, центры которых

располагаем на центровом профиле кулачка. Проводим к этим дугам огибающую кривую (эквидистантную кривую), которая является действительным профилем кулачка.

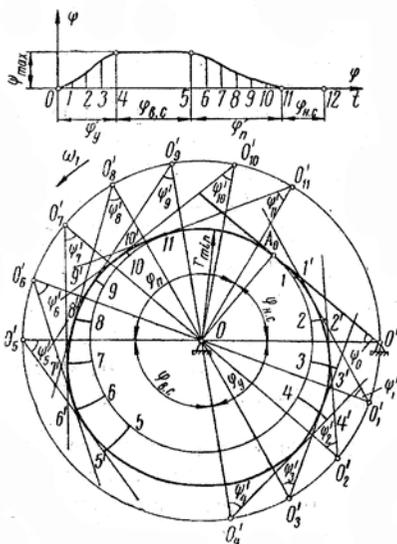


Рис. 3.24. К профилированию кулачка для кулачкового механизма с качающимся плоским толкателем

### Кулачковый механизм с качающимся плоским толкателем

Заданными являются: закон движения толкателя  $\psi = f(\varphi)$ ,

минимальный радиус кулачка  $r'_{\min}$ , расстояние между осями вращения кулачка и толкателя  $OO'$  и направление вращения толкателя (рис. 3.24).

Профилирование кулачка производим в такой последовательности.

1. и 2. Первые два пункта выполняем точно таким же образом, как в предыдущем случае.

3. Размечаем положения осей вращения кулачка  $O$  и толкателя  $O'$ . С центром в точке  $O$  (ось вращения кулачка) проводим окружность радиусом  $r'_{\min}$ , а из точки  $O'$  (ось вращения толкателя) проводим касательную  $O'A_0$  к этой окружности. Эта касательная является начальным (нижним)

положением толкателя. Измеряем по чертежу угол  $\psi_0$  между начальным положением толкателя  $O'A_0$  и положением линии центров  $OO'$ .

4. Из центра  $O$  проводим окружность радиусом  $OO'$  и от прямой  $OO'$  в направлении, противоположном вращению кулачка, откладываем все углы  $\varphi_i$  ( $\varphi_y$ ,  $\varphi_{в.с.}$ ,  $\varphi_{п.}$ ,  $\varphi_{п.с}$  и промежуточные) и под этими углами из точки  $O$  проводим лучи. Точки пересечения этих лучей с окружностью радиусом  $OO'$  ( $O'_1, O'_2, O'_3, \dots$ ) являются относительными положениями оси вращения толкателя, а сами лучи  $OO'_1, OO'_2, OO'_3, \dots$  являются относительными положениями линии центров.

5. Вычисляем для каждого положения толкателя углы между толкателем и стойкой:

$$\psi'_1 = \psi_0 + \psi'_1;$$

$$\psi'_2 = \psi_0 + \psi'_2;$$

.....

и под этими углами к соответствующим относительным положениям линии центров  $OO'_1, OO'_2, OO'_3, \dots$  из точек  $O'_1, O'_2, O'_3, \dots$  проводим лучи  $O'I', O'2', O'3', \dots$  Эти лучи являются относительными положениями толкателя. Проведя огибающую к лучам, получим действительный профиль кулачка.

Относительные положения толкателя можно определить и иначе. Вместо того чтобы определить углы перемещения толкателя  $\psi_i$ , отсчитываемые (и откладываемые) от линии центров, можно находить линейные перемещения точки  $A_0$  (или любой другой точки) толкателя  $s_i$ , отсчитываемые от ее начального положения:

$$s_1 = O'A \cdot \psi_1; \quad s_2 = O'A \cdot \psi_2.$$

(отрезок  $O'A_0$  нужно измерить по чертежу).

Откладывая эти перемещения по дугам окружностей, проведенным из центров  $O'_1, O'_2, O'_3, \dots$  радиусом  $O'A_0$  от окружности радиусом  $r_{\min}$ , получим точки  $1', 2', 3', \dots$  Проведя через эти точки и соответствующие им относительные положения оси вращения толкателя  $O'_1, O'_2, O'_3, \dots$  прямые линии, получим относительные положения толкателя. Дуги  $s_1, s_2, s_3, \dots$  ( $1 \doteq 1', 2 \doteq 2', 3 \doteq 3', \dots$ ) на рисунке проведены жирными линиями.

### **3.6. Определение размера минимального радиуса профиля кулачка с учетом угла давления**

При профилировании кулачковых механизмов мы считали, что минимальный радиус кулачка  $r_{\min}$  задан. Можно построить много кулачков

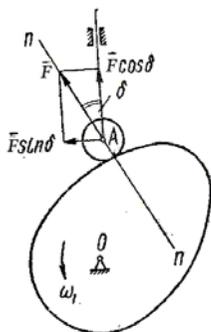


Рис. 3.25. Угол давления в кулачковом механизме

с различными минимальными радиусами, которые обеспечат один и тот же закон движения толкателя. Какой же из этих кулачков выбрать? Конечно, из конструктивных соображений всегда желательно выбрать кулачок наименьших размеров. Однако с уменьшением размера кулачка (размера  $r_{\min}$ ), как мы увидим ниже, происходит нежелательное увеличение сил трения, а при очень малых размерах кулачка может произойти заклинивание и поломка толкателя.

На рис. 3.25 показано направление силы  $F$  давления кулачка на толкатель. Сила  $F$  направлена по нормали к профилю кулачка в точке касания с толкателем (если

не учитывать трения между кулачком и толкателем). Угол  $\delta$  между общей нормалью  $nn$  к профилю кулачка в точке его касания с толкателем и направлением движения (скорости) толкателя называется **углом давления**. Раскладывая силу  $F$  на две составляющие, получим силу  $F' = F \cos \delta$ , направленную вдоль линии движения толкателя, и силу  $F'' = F \sin \delta$ , направленную перпендикулярно линии движения толкателя. Сила  $F'$  является полезной силой, направленной на преодоление сил полезных сопротивлений, а сила  $F''$  является вредной силой, которая вызывает перекос толкателя, возникновение сил трения в направляющих толкателя. А если эта сила очень велика, то может произойти заклинивание и поломка толкателя.

Поэтому для уменьшения силы  $F''$  выгодно, чтобы угол давления  $\delta$  был как можно меньше.

Однако, с другой стороны, с уменьшением угла давления  $\delta$ , как мы увидим дальше, возрастают размеры кулачка. Поэтому угол давления не должен быть слишком малым.

Учитывая эти положения, на практике устанавливают максимальное значение угла давления  $\delta_{\max}$ , которое не должно быть превышено, так как в противном случае, как указывалось, возникают большие силы трения и возможны заклинивание и поломка толкателя:

$$\delta \leq \delta_{\max}. \quad (3.3)$$

На практике значения угла давления  $\delta_{\max}$  принимают равными:

$\delta_{\max} = 30^\circ$  для поступательно движущихся толкателей;

$\delta_{\max} = 45^\circ$  для вращающихся толкателей.

Определение углов давлений для кулачковых механизмов различных типов показано на рис. 3.26. Как видно, наиболее благоприятными с этой точки зрения являются кулачковые механизмы с плоскими толкателями, у которых угол давления равен нулю.

Рассмотрим, как определить размеры кулачка по заданному максимальному углу давления  $\delta_{\max}$ . Предварительно посмотрим, как установить угол давления  $\delta$ , если известны закон движения толкателя и положение оси вращения кулачка.

Построим для кулачкового механизма (рис. 3.27, а) план скоростей. Построение ведем в произвольном масштабе по векторному уравнению

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{A_x} + \vec{V}_{AA_x},$$

где  $\vec{V}_A$  - скорость толкателя (точки  $A$ ); направлена она по линии движения толкателя;

$\vec{V}_{A_x}$  - скорость точки  $A_x$  центрального профиля кулачка, совпадающей в данном положении с точкой  $A$ ; эта скорость направлена перпендикулярно радиусу  $r$ ;

$\vec{V}_{AA_x}$  - скорость точки  $A$  относительно точки  $A_x$ ; она направлена по касательной к эквидистантному профилю (или перпендикулярно нормали  $nn$ ).

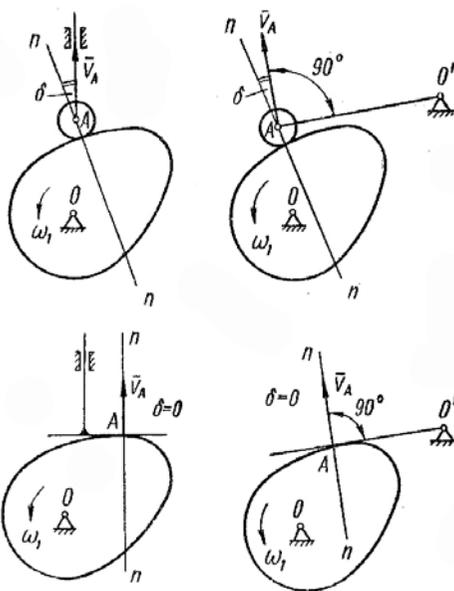


Рис. 3.26. Углы давлений в различных кулачковых механизмах

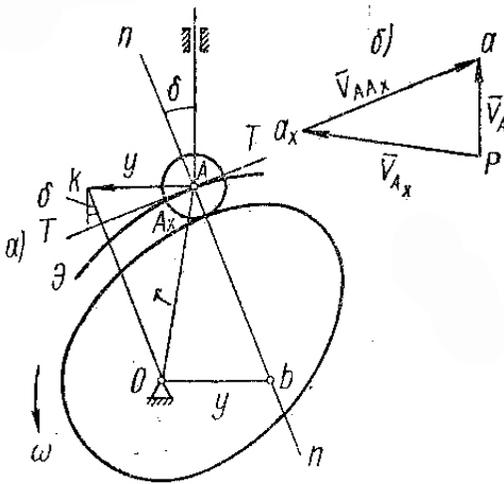


Рис. 3.27. К определению угла давления по заданному закону движения толкателя и заданному положению оси вращения кулачка

толкателя, до пересечения с нормалью (в точке  $b$ ). Получим отрезок  $y = Ob$ . Треугольник  $ObA$  подобен треугольнику плана скоростей  $paax$ , как треугольники с взаимно перпендикулярными сторонами. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{y}{r} = \frac{v_A}{v_{Ax}} = \frac{ds_A}{r\omega dt} = \frac{ds_A}{r\omega dt} = \frac{ds_A}{rd\varphi},$$

откуда

$$\frac{y}{r} = \frac{ds_A}{rd\varphi}. \quad (3.4)$$

Если теперь отложить отрезок  $y$  от точки  $A$  в направлении, перпендикулярном направлению движения толкателя (влево), и его конец (точку  $k$ ) соединить прямой линией ( $ok$ ) с осью вращения толкателя  $O$ , то угол между этой линией и направлением движения толкателя, как это видно из чертежа, равен углу давления  $\delta$ .

Таким образом, для определения угла давления не нужно знать профиля кулачка. Достаточно по формуле (3.4) вычислить по заданному за-

В соответствии с векторным уравнением откладываем (рис. 3.27, б) в произвольном масштабе вектор  $\overline{v_{Ax}} \perp (\overline{OA})$ . Из конца вектора проводим направление вектора  $\overline{v_{AAx}} \perp (\overline{nn})$ , а из начала — направление вектора  $\overline{v_A}$ . Точка пересечения этих направлений (точка  $a$ ) определяет величины векторов  $\overline{v_{AAx}}$  и  $\overline{v_A}$ .

Проведем через ось вращения кулачка  $O$  (см. рис. 3.27, а) линию, перпендикулярную направлению движения

кону движения толкателя значение величины отрезка  $u$ , отложить этот отрезок от данного положения оси вращения ролика  $A$  в направлении, перпендикулярном направлению ее скорости, и соединить прямой линией конец отрезка с осью вращения кулачка. Угол между этой линией и направлением скорости оси ролика есть угол давления. Отметим, что отрезок  $u$  нужно откладывать в ту сторону, куда окажется направленным вектор скорости точки  $A$  толкателя, если повернуть его на  $90^\circ$  по направлению вращения кулачка. В нашем случае при движении толкателя вверх отрезок  $u$  нужно откладывать влево, при движении толкателя вниз — вправо.

Величина  $u$ , как это следует из формулы (3.4), пропорциональна скорости движения толкателя (при равномерном вращении кулачка) и является величиной переменной.

На рис. 3.28 и 3.29 показано определение углов давления при различных положениях толкателя для кулачковых механизмов с поступательно движущимся (рис. 3.28) и вращающимся (рис. 3.29) толкателями. Вправо от траектории точки  $A$  толкателя отложены значения  $u$  при подъеме толкателя, а влево — при опускании толкателя (для вращающегося толкателя отрезки  $u$  откладываются вдоль толкателя, т.е. перпендикулярно скорости точки  $A$ ). Максимальные значения углов давления при подъеме  $\delta'_{\max}$  и

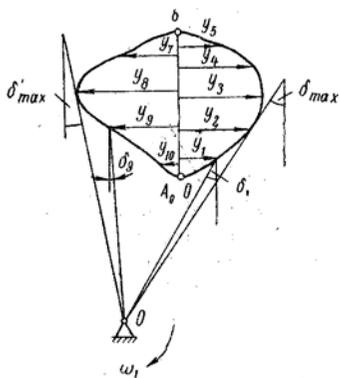


Рис. 3.28. К определению углов давления по заданному закону движения поступательно движущегося толкателя для различных его положений

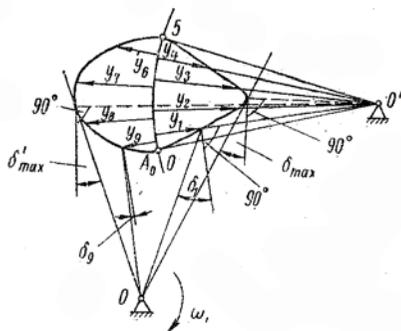


Рис. 3.29. К определению углов давления по заданному закону движения качающегося толкателя для различных его положений

опускании  $\delta'_{\max}$  определяются, если провести из оси вращения кулачка  $O$  касательные к соответствующим кривым, соединяющим концы отрезков  $y$ .

Таким образом, если заданы закон движения толкателя и ось вращения кулачка, то легко можно определить углы давления для каждого положения и максимальные углы давления  $\delta_{\max}$  и  $\delta'_{\max}$ .

Можно поставить и обратную задачу: задан закон движения толкателя и максимальные углы давления  $\delta_{\max}$  и  $\delta'_{\max}$ ; требуется определить положение оси вращения кулачка и минимальный радиус кулачка. Для этого нужно по заданному закону движения установить для всех положений значения  $y$ , отложить эти отрезки так, как указано выше (рис. 3.30), и

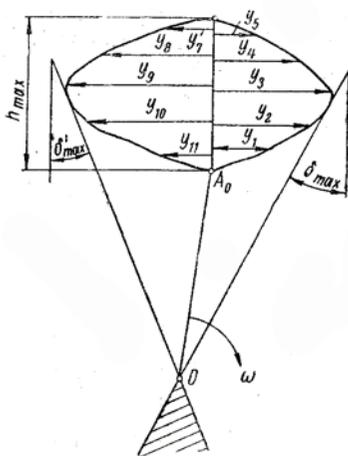


Рис. 3.30. К определению минимального радиуса кулачка по заданному предельному углу давления

и соединить их концы плавными кривыми. Затем провести к этим кривым касательные под углами  $\delta_{\max}$  и  $\delta'_{\max}$  к направлению скорости центра ролика. Совершенно очевидно, что ось вращения кулачка может быть расположена в любом месте между касательными в заштрихованной области; в противном случае либо оба угла давления  $\delta_{\max}$  и  $\delta'_{\max}$  (при подъеме и опускании толкателя), либо один из них будет больше допустимого. Естественно, минимальные размеры кулачок будет иметь тогда, когда ось его вращения будет находиться в точке  $O$  пересечения касательных. Отрезок  $OA_0$  представляет минимальный радиус центрального профиля кулачка.

## Раздел 4. ТЕОРИЯ ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

### 4.1. Общие положения

Зубчатые механизмы предназначены для передачи вращательного движения от одного вала к другому и для изменения (увеличения или уменьшения) угловой скорости какого-либо вала по сравнению с существующей.

Зубчатые механизмы имеют огромное распространение. Они применяются почти во всех машинах, передают мощность от сотых и даже тысячных долей л.с. до нескольких десятков тысяч л.с., диаметры их зубчатых колес изменяются от нескольких миллиметров до нескольких метров, а их окружные скорости — от 1 м/мин до 100 м/сек и более.

Оси валов, между которыми осуществляется передача вращательного движения, могут быть расположены как угодно: быть параллельными, пересекаться под любым углом и скрещиваться. Если они параллельны, то зубчатая передача осуществляется при помощи **цилиндрических зубчатых колес** (рис. 4.1); если они пересекаются, то передача осуществляется при помощи **конических зубчатых колес** (рис. 4.2); если они скрещиваются, то передача осуществляется при помощи **гиперболических зубчатых колес**. Частными случаями гиперболических колес, применяемых на практике, являются: **винтовые колеса** (рис. 4.3), **гипо-**

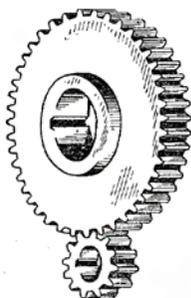


Рис. 4.1. Цилиндрические зубчатые колеса

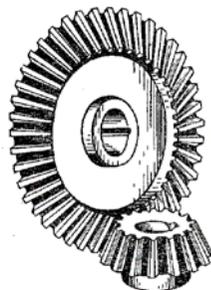


Рис. 4.2. Конические зубчатые колеса

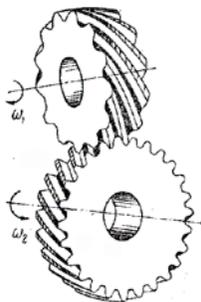


Рис. 4.3. Винтовые зубчатые колеса

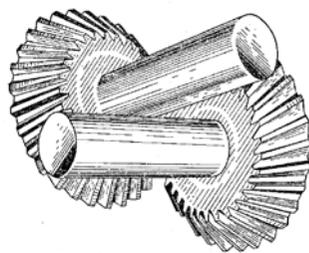


Рис. 4.4. Гипоидные зубчатые колеса

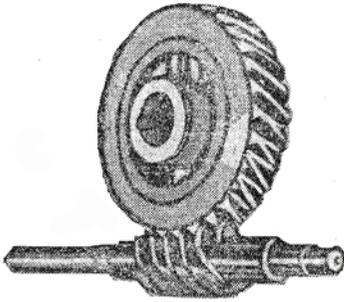


Рис. 4.5. Червячная зубчатая передача

**идные колеса** (рис. 4.4) и **червячная передача**, состоящая из червяка и червячного колеса (рис. 4.5).

Оба колеса, между которыми осуществляется передача вращательного движения, имеют выступы (зубья) и впадины такой формы, что выступы одного колеса входят во впадины другого колеса. Каждый зуб можно рассматривать как отдельный кулачок. Следовательно, зубчатый механизм представляет собой сложный кулачковый механизм, в котором зубчатые колеса несут на себе целый ряд кулачков.

Зубья обоих колес, воздействуя друг на друга, образуют высшую кинематическую пару.

Вращение двух зубчатых колес, между которыми осуществляется передача вращательного движения, в общем случае происходит с различными угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Отношение угловых скоростей (или чисел оборотов) звеньев, между которыми осуществляется передача вращательного движения, называется передаточным отношением. Величина передаточного отношения обозначается буквой  $i$  с соответствующими индексами:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n} \quad (4.1)$$

или

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (4.1.a)$$

где  $i_{12}$  – передаточное отношение от вала первого колеса к валу второго колеса;

$i_{21}$  – передаточное отношение от вала второго колеса к валу первого колеса;

Для одного и того же механизма:

$$i_{12} = \frac{1}{i_{21}}. \quad (4.2)$$

Основным достоинством зубчатых механизмов по сравнению с другими механизмами передачи вращательного движения, например ременными или фрикционными, является строгое постоянство передаточного отношения. Это требование является очень важным. Предположим, что

передаточное отношение от шпинделя токарного станка к ходовому винту не постоянно. Тогда на таком токарном станке никогда нельзя было бы нарезать, например, винт с резьбой постоянного шага, следовательно, на этот винт нельзя было бы завернуть гайку и т. д. Таких примеров можно привести много.

Строгое постоянство передаточного отношения важно не только с кинематической, но и с динамической точки зрения. При непостоянном передаточном отношении возникают колебания звеньев и дополнительные динамические усилия и т. д.

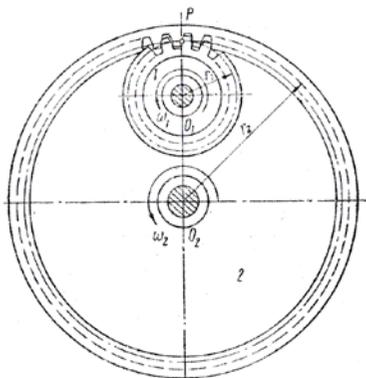


Рис. 4.6. Колеса с внутренним зацеплением

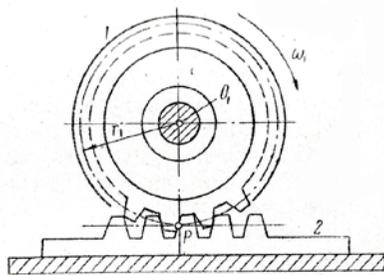


Рис. 4.7. Реечное зацепление

Другими важными достоинствами зубчатых механизмов являются компактность, долговечность и высокий к.п.д.

Условимся для колес с параллельными осями считать передаточное отношение:

отрицательным ( $i_{12} < 0$ ), когда колеса вращаются в разные стороны (см. рис. 4.1). Такие колеса называются **колесами внешнего зацепления**; положительным ( $i_{12} > 0$ ), когда колеса вращаются в одну сторону (рис. 4.6). Такие колеса называются **колесами внутреннего зацепления**.

В частном случае, когда радиус одного из колес будет бесконечно большим, это колесо превращается в прямолинейную рейку (рис. 4.7). Такое зацепление называется **реечным**. Оно служит для преобразования вращательного движения в поступательное и наоборот. Передаточное отношение реечного зацепления равно  $i_{12} = \infty$ ; или  $i_{21} = 0$  (так как рейка 2 не вращается и ее угловая скорость равна нулю).

## 4.2. Начальные окружности

В подавляющем большинстве случаев требуется постоянство передаточного отношения зубчатого механизма. При этом не только среднее передаточное отношение должно быть постоянным, а оно должно быть постоянным в течение одного оборота, точнее, в любое мгновение.

Имеются зубчатые механизмы и с переменным передаточным отношением, однако они применяются очень редко, и мы на них останавливаться не будем. В дальнейшем будем вести речь о зубчатых механизмах только с постоянным передаточным отношением.

Легко показать, что если передача осуществляется при помощи двух зубчатых колес со строго постоянным передаточным отношением, то всегда можно вообразить две окружности, которые как бы жестко связаны с соответствующими колесами, касаются друг друга и перекатываются одна по другой без скольжения.

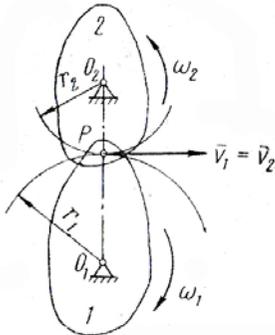


Рис. 4.8. К определению начальных окружностей

Пусть передача вращательного движения осуществляется между звеньями 1 и 2 (рис. 4.8), угловые скорости которых равны  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Так как линейные скорости точек обоих звеньев возрастают с их удалением от осей вращения, то на линии центров  $O_1O_2$  всегда можно найти общую точку  $P$ , принадлежащую обоим колесам, скорости которой равны по величине и направлению:

$$v_1 = v_2$$

или

$$\omega_1 \cdot O_1P = \omega_2 \cdot O_2P$$

Откуда

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}. \quad (4.3)$$

Следовательно, для того чтобы передаточное отношение было строго постоянным, должны быть постоянными радиусы  $r_1 = O_1P$  и  $r_2 = O_2P$ . Такие воображаемые окружности, жестко связанные с зубчатыми колесами, между которыми осуществляется передача вращательного движения со строго постоянным передаточным отношением, касающиеся и перекатывающиеся одна по другой без скольжения, называются **начальными окружностями**.

Из равенства (4.3) видно, что передаточное отношение может быть выражено через отношение радиусов начальных окружностей:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (4.3a)$$

Таким образом, отношение угловых скоростей обратно пропорционально отношению радиусов начальных окружностей.

Точка касания начальных окружностей  $P$  является мгновенным центром вращения колес в относительном движении (так как скорости точки  $P$ , принадлежащей обоим колесам, векторно равны). Эта точка называется **поллюсом зацепления**.

Окружности радиусами  $r_1$  и  $r_2$  являются центроидами в относительном движении колес (так как они являются геометрическим местом точек  $P$  мгновенного центра вращения колес в относительном движении).

#### 4.3. Основная теорема зацепления

Передача движения в зубчатых колесах происходит нажатием зуба одного колеса на зуб другого колеса. Какими же должны быть профили зубьев колес, чтобы передаточное отношение было строго постоянным, т.е. чтобы начальные окружности перекатывались друг по другу без скольжения?

Ответ на этот вопрос даст нам основная теорема зацепления, которая формулируется следующим образом: *общая нормаль в точке касания звеньев высшей кинематической пары делит межосевое расстояние на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям.*

Докажем эту теорему.

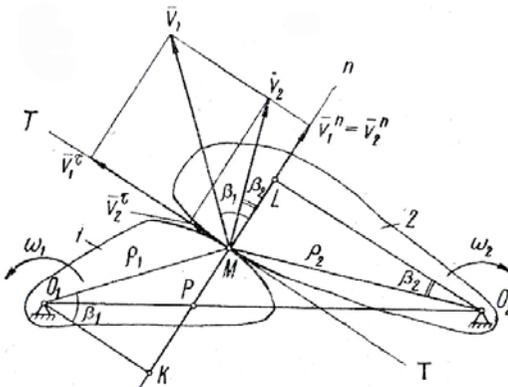


Рис. 4.9. К основной теореме зацепления

На рис. 4.9 изображены два звена, касаясь в точке  $M$ , образуют высшую кинематическую пару (это могут быть зубья двух зубчатых колес). Звено 1, вращаясь вокруг оси  $O_1$  с угловой скоростью  $\omega_1$ , воздействует на звено 2, заставляя его вращаться вокруг оси  $O_2$  с угловой скоростью  $\omega_2$ .

Проведем через точку касания  $M$  общие касательную  $TT$  и нормаль  $nn$ .

Оба звена должны быть в постоянном соприкосновении. Для этого необходимо, чтобы проекции скоростей точки касания  $M$  обоих звеньев на общую нормаль были равны. В противном случае либо одно звено опередит другое (нарушится контакт), либо одно звено врежется в другое.

Проведем векторы скоростей точки  $M$  обоих звеньев. Вектор  $\overline{v}_1$  скорости точки  $M$  звена 1 перпендикулярен радиус-вектору  $\rho_1(O_1M)$ , вектор  $\overline{v}_2$  скорости точки  $M$  звена 2 перпендикулярен радиус-вектору  $\rho_2(O_2M)$ . Разложим каждый из этих векторов на две составляющие — нормальные  $v_1^n$  и  $v_2^n$  и касательные —  $v_1^\tau$  и  $v_2^\tau$ . Нормальные составляющие, как уже указывалось, должны быть равны

$$v_1^n = v_2^n.$$

Но

$$v_1^n = v_1 \cos \beta_1 \quad \text{и} \quad v_2^n = v_2 \cos \beta_2,$$

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — углы отклонения соответственно векторов  $\overline{v}_1$  и  $\overline{v}_2$  от нормали  $nn$ .

Следовательно,

$$v_1 \cos \beta_1 = v_2 \cos \beta_2.$$

Учитывая, что  $v_1 = \omega_1 \rho_1$  и  $v_2 = \omega_2 \rho_2$ , получим

$$\omega_1 \rho_1 \cos \beta_1 = \omega_2 \rho_2 \cos \beta_2.$$

Восстановим из точек  $O_1$  и  $O_2$  перпендикуляры на нормаль  $O_1K$  и  $O_2L$ . Величины этих перпендикуляров равны:

$$O_1K = \rho_1 \cos \beta_1,$$

$$O_2L = \rho_2 \cos \beta_2.$$

Тогда

$$\omega_1 O_1K = \omega_2 O_2L,$$

откуда

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2L}{O_1K}.$$

Треугольники  $O_1KP$  и  $O_2LP$  подобны, следовательно,

$$\frac{O_2L}{O_1K} = \frac{O_2P}{O_1P}.$$

Сопоставляя последние два равенства, окончательно получим

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}. \quad (4.4)$$

Теорема доказана.

Из равенства (4.4) следует: чтобы передаточное отношение было постоянным, необходимо, чтобы отрезки  $O_1P$  и  $O_2P$ , на которые нормаль  $mn$  делит межосевое расстояние, были постоянной величины. Другими словами, необходимо, чтобы нормаль всегда, в любом положении звеньев, проходила через одну и ту же точку  $P$ .

Все кривые, удовлетворяющие этому условию, могут быть использованы для образования боковых поверхностей зубьев цилиндрических колес. Такие кривые называются **сопряженными**. Задавая произвольно профилем зуба одного колеса, можно построить сопряженный профиль зуба другого колеса. Таких кривых может быть теоретически бесконечное количество. Однако на практике в подавляющем большинстве случаев пользуются эвольвентным зацеплением, в котором боковые профили зубьев колес выполнены по эвольвентным кривым.

Точка  $P$  пересечения нормали  $mn$  с линией центров является полюсом зацепления. Она является мгновенным центром вращения звеньев в относительном движении. В самом деле, из равенства (4.4) видно, что скорости точки  $P$ , принадлежащей обоим колесам, равны

$$\omega_1 \cdot O_1P = \omega_2 \cdot O_2P. \quad (4.4a)$$

При постоянном передаточном отношении  $i_{12} = const$  отрезки  $O_1P$  и  $O_2P$  являются радиусами начальных окружностей.

Из рис. 4.9 видно, что касательные составляющие скоростей точек касания  $U_1^r$  и  $U_2^r$  не равны между собой, следовательно, профили зубьев скользят друг по другу. Это вызывает износ зубьев. Только в одном положении, когда точка касания зубьев совпадает с полюсом зацепления  $P$ , нет скольжения между профилями зубьев, так как скорости точек касания в этом положении векторно равны. Скольжение между зубьями будет тем больше, чем дальше находится точка касания от полюса зацепления.

#### 4.4. Эвольвента окружности и ее свойства. Уравнение эвольвенты

**Эвольвентой окружности** называется кривая, описываемая точкой прямой линии, перекатываемой по окружности без скольжения.

Рассмотрим построение эвольвенты. На рис. 4.10 изображена окружность с центром в точке  $O$ . К этой окружности проведена касательная в точке  $A$ . Будем перекатывать прямую по окружности без скольжения. Для этого от точки  $A$  отложим по прямой ряд одинаковых по длине отрезков  $A-1$ ,  $1-2$ ,  $2-3$  и т.д. По окружности от точки  $A$  отложим дуги

$A \approx 1', 1' \approx 2', 2' \approx 3'$  и т.д., равные этим отрезкам. При перекатывании прямой по окружности без скольжения точка  $1$  совпадет с точкой  $1'$ , точка  $2$  – с точкой  $2'$ , точка  $3$  – с точкой  $3'$  и т.д. Проведем в точках  $1', 2', 3', \dots$  касательные к окружности (для точного проведения касательной следует сначала провести радиус и затем к нему провести перпендикуляр) и отложим на них от точек касания отрезки  $1'A_1, 2'A_2, 3'A_3, \dots$ , равные соответственно отрезкам прямой  $A1, A2, A3, \dots$  (или дугам  $A1', A2', A3', \dots$ ). Соединяя точки  $A, A_1, A_2, \dots$  плавной кривой, получим эвольвенту.

Окружность, по которой перекатывается прямая при образовании эвольвенты, называется **основной окружностью**.

Прямая, перекатываемая по окружности, называется **образующей прямой**.

Легко видеть, что образующая прямая всегда нормальна к эвольвенте. Действительно, точки касания образующей прямой с основной окружностью являются при образовании эвольвенты мгновенными центрами вращения образующей прямой, а потому соответствующие отрезки ( $1'A_1, 2'A_2, 3'A_3, \dots$ ) являются мгновенными радиусами кривизны эвольвенты. Но радиус кривизны кривой всегда расположен нормально к кривой. Поэтому образующая прямая всегда нормальна к эвольвенте.

Это основное и важнейшее свойство эвольвенты.

Отметим еще некоторые другие свойства эвольвенты.

Эвольвента начинается на основной окружности и всегда расположена вне ее.

Эвольвента является кривой без перегибов.

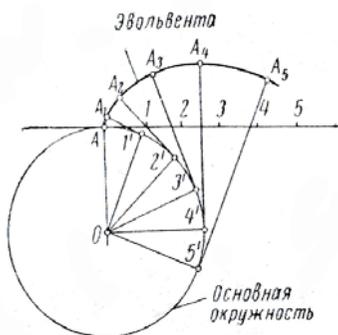


Рис. 4.10. Построение эвольвенты

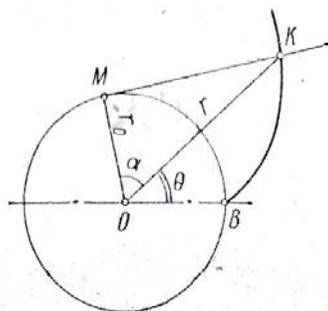


Рис. 4.11. К выводу уравнения эвольвенты

Форма эвольвенты зависит только от радиуса основной окружности. Выведем уравнение эвольвенты.

Пусть координатами какой-либо точки  $K$  эвольвенты (рис. 4.11 будут:  $r$  — радиус-вектор и  $\theta$  — угол отклонения радиус-вектора от радиуса, проведенного к началу эвольвенты  $B$  (на основной окружности). Проведем из точки  $K$  касательную к основной окружности радиуса  $r_0$ . Точку касания  $M$  соединим с центром основной окружности  $O$ . Угол между лучами  $OM$  и  $OK$  обозначим через  $\alpha$ .

Из треугольника  $OMK$  имеем

$$r = \frac{r_0}{\cos \alpha}. \quad (4.5)$$

Из свойства эвольвенты следует, что

$$MK = \widetilde{MB}.$$

Но

$$MK = r_0 \operatorname{tg} \alpha \text{ и } \widetilde{MB} = r_0(\theta + \alpha),$$

тогда

$$r_0 \operatorname{tg} \alpha = r_0(\theta + \alpha)$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = \theta + \alpha.$$

Решая относительно  $\theta$ , получим:

$$\theta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha. \quad (4.6)$$

Выражение  $\operatorname{tg} \alpha - \alpha$  сокращенно обозначается знаком  $\operatorname{inv} \alpha$  и читается как инволюта  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha - \alpha = \operatorname{inv} \alpha.$$

Для инволютных функций составлены таблицы (см. приложение), по которым по значению угла  $\alpha$  можно определить значение величины  $\operatorname{inv} \alpha$ . Учитывая сказанное, угол  $\theta$  будет равен:

$$\theta = \operatorname{inv} \alpha. \quad (4.6a)$$

Уравнения (4.5.) и (4.6a) есть уравнения эвольвенты в полярных координатах.

#### 4.5. Эвольвентное зацепление

Пусть вращательное движение передается при помощи двух кулачков, профили которых выполнены по кривым  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ , являющимся эвольвентами основных окружностей радиусов  $r_{O_1}$  и  $r_{O_2}$  (рис. 4.12).

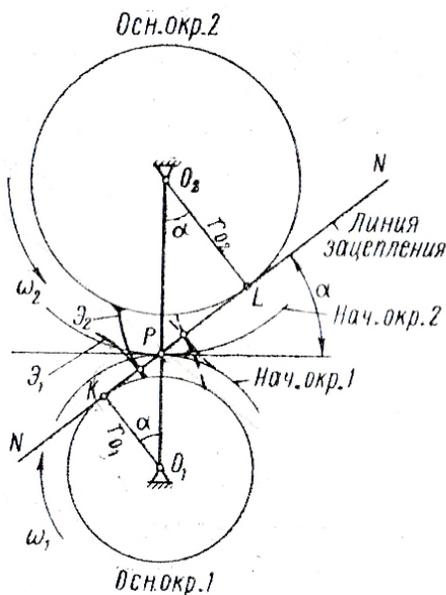


Рис. 4.12. Эвольвентное зацепление

На основании основной теоремы зацепления и основного свойства эвольвенты легко показать, что передаточное отношение этой передачи постоянно. Действительно, общая касательная  $NN$  к основным окружностям нормальна к каждой из эвольвент (на основании основного свойства эвольвенты) и поэтому проходит всегда через точку их касания. Прямая  $NN$ , являясь общей нормалью в точке касания к обеим поверхностям, делит межосевое расстояние  $O_1O_2$  на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям (на основании основной теоремы зацепления):

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}.$$

Так как прямая  $NN$  всегда касается одних и тех же окружностей, то занимает всегда одно и то же положение, т.е. пересекает межосевое расстояние в постоянной точке  $P$ . Следовательно, передаточное отношение  $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$  постоянно.

Геометрическое место точек касания профилей (зубьев) называется **линией зацепления**.

В эвольвентном зацеплении линией зацепления является прямая  $NN$  — касательная к основным окружностям, так как эвольвенты касаются только на этой прямой.

В этом заключается одно из достоинств эвольвентного зацепления. Действительно, зуб одного колеса давит на зуб другого колеса, если пренебречь трением, всегда по линии  $NN$ . Поэтому направление силы не изменяется, что благоприятно сказывается на прочности конструкции зубчатого механизма.

Угол  $\alpha$  отклонения линии зацепления от общей касательной к начальным окружностям в точке  $P$  называется углом зацепления. Для нормального зубчатого зацепления этот угол равен  $\alpha = 20^\circ$ .

Необходимо отметить, что если несколько увеличить межосевое расстояние  $O_1O_2$ , то передаточное отношение не изменится. В самом деле, из подобия треугольников  $O_1KP$  и  $O_2LP$  следует:

$$\frac{O_2P}{O_1P} = \frac{r_{O_2}}{r_{O_1}},$$

тогда

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{O_2}}{r_{O_1}}, \quad (4.7)$$

т.е. передаточное отношение обратно пропорционально радиусам основных окружностей. Так как эти радиусы являются постоянными для данных кулачков, то при изменении межосевого расстояния  $O_1O_2$  передаточное отношение не изменится. Несколько изменится лишь положение линии зацепления, т.е. угол зацепления  $\alpha$ .

Постоянство передаточного отношения при изменении межосевого расстояния является положительным качеством эвольвентной зубчатой передачи, так как неизбежные погрешности при сборке зубчатых механизмов не будут оказывать влияния на передаточное отношение.

#### 4.6. Основные геометрические параметры нормальных зубчатых колес

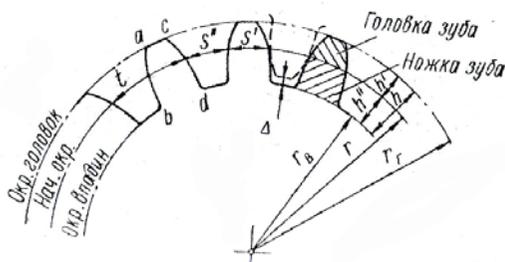


Рис. 4.13. Основные геометрические параметры стандартного зубчатого зацепления

На рис. 4.13 представлено сечение зубчатого колеса плоскостью, перпендикулярной оси колеса. Как видно из этого рисунка, начальная окружность делит зуб по высоте на две части: на головку зуба высотой  $h'$  и ножку зуба высотой  $h''$ .

Зуб имеет два профиля: левый ( $ab$ ) и правый ( $cd$ ), очерченные по эвольвентным кривым.

Расстояние между одноименными точками двух соседних зубьев, измеренное по начальной окружности, называется шагом зубчатого колеса.

Шаг  $t$  складывается из двух частей: толщины зуба  $s'$  и ширины впадины между зубьями  $s''$ , окружности:

$$t = s' + s'' . \quad (4.8)$$

Для нормальных зубчатых колес принято, что толщина зуба и ширина впадины по начальным окружностям должны быть одинаковы:

$$s' = s'' = \frac{t}{2} . \quad (4.9)$$

Шаг обоих зубчатых колес, находящихся в зацеплении, по начальным окружностям должен быть одинаков (так как начальные окружности катятся одна по другой без скольжения).

Длина начальной окружности колеса равна

$$2\pi r = zt , \quad (4.10)$$

где  $r$  — радиус начальной окружности;

$z$  — количество зубьев зубчатого колеса.

Из уравнения (4.10) следует, что диаметр начальной окружности зубчатого колеса равен

$$d = 2r = \frac{t}{\pi} z . \quad (4.10a)$$

Отсюда видно, что диаметр  $D$  и шаг  $t$  выражаются несоизмеримыми числами, так как в правую часть входит трансцендентное число  $\pi$ . Для облегчения расчетов, измерения и изготовления зубчатых колес отношение

$\frac{t}{\pi}$  стандартизовано и выражается целыми числами или числами с простой десятичной дробью. Это отношение шага зубчатого зацепления  $t$  к числу  $\pi$  называется модулем **зубчатого зацепления** и обозначается буквой  $m$ :

$$\frac{t}{\pi} = m . \quad (4.11)$$

Модуль  $m$  выражается в миллиметрах и выбирается в соответствии с ГОСТ 9563 — 61.

Диаметр начальной окружности колеса, как это следует из уравнения (4.10a) и (4.11), равен

$$d = mz . \quad (4.10б)$$

Шаг зубчатого колеса

$$t = \pi m . \quad (4.11a)$$

Толщина зуба и ширина впадины по начальной окружности

$$s' = s'' = \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} m . \quad (4.9a)$$

Для нормального зубчатого колеса принято, что высота головки зуба равна

$$h' = m, \quad (4.12)$$

а высота ножки зуба

$$h'' = 1,25m. \quad (4.13)$$

Высота головки зуба  $h'$  делается несколько меньше высоты ножки зуба  $h''$ , для того чтобы вершина зуба одного колеса не упиралась в основание впадины другого колеса, т.е. чтобы обеспечить радиальный зазор, который равен (см. рис. 4.13)

$$\Delta = h'' - h' = 0,25m. \quad (4.14)$$

Диаметр окружности головки зубчатого колеса (см. рис. 4.13)

$$d_a = d + 2h' = mz + 2m$$

или

$$d_a = m(z + 2) \quad (4.15)$$

Диаметр окружности впадины зубчатого колёса

$$d_f = d - 2h'' = mz - 2 \cdot 1,25m$$

или

$$d_f = m(z - 2,5) \quad (4.16)$$

Пользуясь формулой (4.15), на практике легко определить модуль зубчатого колеса, для чего достаточно измерить диаметр окружности головок и подсчитать количество зубьев:

$$m = \frac{d_a}{z + 2}.$$

Из равенства (4.10б) следует

$$m = \frac{d}{z},$$

т.е. модуль выражается отношением диаметра начальной окружности к количеству зубьев колеса. Поэтому модуль иногда называют **диаметральным шагом**.

Расстояние между осями двух колес, находящихся в зацеплении, равно сумме радиусов начальных окружностей

$$a = r_1 + r_2 = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2}$$

или

$$a = \frac{m}{2}(z_1 + z_2), \quad (4.17)$$

т.е. межосевое расстояние равно половине произведения модуля зацепления на сумму зубьев зубчатых колес.

Это свойство часто используется в технике. Например, в токарных станках для изменения передаточного отношения применяются сменные шестерни, которые устанавливаются между валами, межосевое расстояние которых постоянно. При этом требуется, чтобы сохранилась сумма зубьев устанавливаемой пары шестерен (модуль всех колес одинаков).

Как видно из приведенных формул, все размеры зубчатого колеса и зуба – диаметра начальной окружности, окружностей головок и впадин, высота зуба, толщина зуба, шаг и др. – выражаются в долях модуля. Чем больше модуль, тем больше размеры колеса и размеры зуба и, следовательно, тем зуб прочнее. Величина модуля определяется в курсе деталей машин из условия расчета зуба на прочность.

Передаточное отношение зубчатой передачи может быть выражено через количество зубьев колес. Из формул (4.3а) и (4.10б) следует

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (4.18)$$

Отметим, что эта формула справедлива лишь для одной пары зубчатых колес. Метод определения передаточного отношения через количество зубьев для сложных зубчатых механизмов, состоящих из многих колес, будет рассмотрен далее.

#### 4.7. Построение нормального зубчатого зацепления

При построении нормального зубчатого зацепления должны быть известны: количества зубьев зубчатых колес  $z_1$  и  $z_2$ , модуль  $m$  и угол зацепления  $\alpha$ .

Построение зубчатого зацепления ведется в такой последовательности (рис. 4.14):

1. Вычисляем радиусы начальных окружностей  $r_1$  и  $r_2$  и межосевое расстояние  $A$ :

$$r_1 = \frac{mz_1}{2}, \quad r_2 = \frac{mz_2}{2}, \quad a = \frac{m}{2}(z_1 + z_2).$$

Проводим линию центров, отмечаем на ней центры  $O_1$  и  $O_2$  и полюс  $P$  и наносим начальные окружности (окружности на рисунке нанесены не полностью).

Через полюс  $P$  проводим общую касательную к начальным окружностям (перпендикулярно к линии центров) и к ней под углом  $\alpha$  – линию зацепления  $NN$ . Из центров  $O_1$  и  $O_2$  восстанавливаем перпендикуляры к линии зацепления  $O_1K$  и  $O_2L$ . Длины этих перпендикуляров есть радиусы основных окружностей. Проводим эти окружности.

2. Вычисляем радиусы окружностей головок и впадин обоих колес и проводим эти окружности:

$$r_{\Gamma_1} = r_1 + h' = \frac{m}{2} z_1 + m;$$

$$r_{\Gamma_2} = r_2 + h' = \frac{m}{2} z_2 + m;$$

$$r_{B_1} = r_1 + h'' = \frac{m}{2} z_1 - 1,25 m; \quad r_{B_2} = r_2 + h'' = \frac{m}{2} z_2 - 1,25 m;$$

3. Перекаत्याвая линию зацепления сначала по одной основной окружности, а затем по другой, описываем точкой  $P$  линии зацепления эвольвенты (профили зубьев) в пределах от основной окружности (или окружности впадин) до окружности головок. (Построение эвольвент на рисунке не показано. См. пункт 4. 4.)

В зависимости от количества зубьев радиус окружности впадин может быть больше радиуса основной окружности или меньше. В первом случае ( $r_B > r_0$ ) весь профиль зуба в пределах между окружностями головок и впадин очерчивается по эвольвенте. Во втором случае

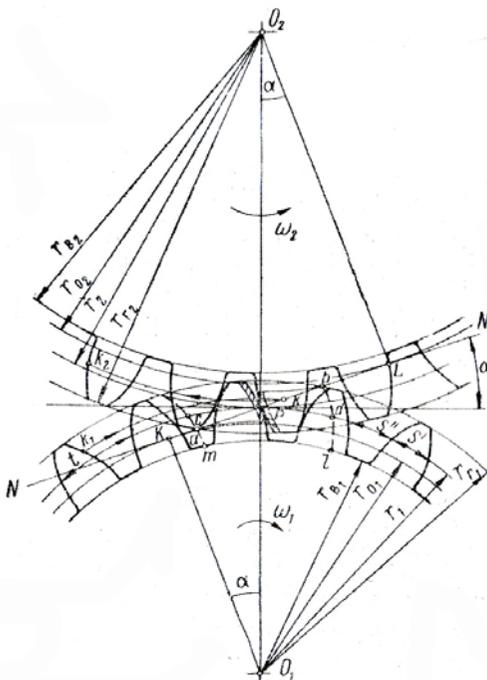


Рис. 4.14. Построение нормального зубчатого зацепления

( $r_B < r_0$ ) профиль зуба очерчивается по эвольвенте только в пределах между окружностями головок и основной (так как внутри основной окружности эвольвента расположена быть не может). В пределах между основной окружностью и окружностью впадин профиль зуба очерчивается отрезком радиальной прямой, сопрягаемой с эвольвентой. Построенные профили зубьев сопрягаются с окружностью впадин дугами радиусом  $\rho = 0,3m$ .

4. Вычисляем толщину зуба и ширину впадины

$$s' = s'' = \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} m$$

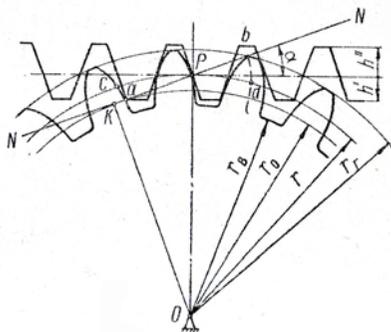


Рис. 4.15. Построение нормального реечного зацепления

и откладываем по начальным окружностям в обе стороны от точки  $P$  по несколько равных им дуг. Через полученные точки проводим, чередуясь, симметричные и подобные построенным ранее боковые профили зубьев. Для этого по первоначально построенным профилям можно из плотной бумаги вырезать шаблоны.

На этом построение зубчатого зацепления закончено.

Аналогично строится картина реечного зацепления (рис. 4.15). Разница заключается лишь в том, что у рейки вместо окружностей

будут прямые линии. Профиль зуба рейки также очерчивается отрезком прямой, перпендикулярной линии зацепления (эвольвента основной окружности с бесконечно большим радиусом преобразуется в прямую).

#### 4.8. Линия зацепления. Дуга зацепления. Коэффициент перекрытия

Совершенно очевидно, что каждый зуб зубчатого колеса находится в зацеплении не на всем своем пути, а только на каком-то участке, т.е. в какой-то точке он входит в зацепление, а в какой-то – выходит из него.

Рассмотрим, как найти эти точки.

Допустим, колесо 1 – ведущее и вращается по часовой стрелке, а колесо 2 – ведомое и вращается против часовой стрелки (рис. 4.16). В положении, изображенном на рис. 4.16 а, зубья этих колес еще не находятся в зацеплении, но при повороте колеса 1 в какой-то момент правый профиль зуба  $ef$  вступит в соприкосновение (зацепление) с правым профилем зуба 2 –  $gh$ . Где это произойдет? Совершенно очевидно, что первой вступит в зацепление точка  $g$  зуба 2 ведомого колеса, лежащая на окружности головок (какая точка зуба 1 первой вступит в зацепление, нам пока не видно). Но нам известно, что зубья могут касаться только на линии зацепления  $NN$ . Следовательно, первой точкой касания (зацепления) зубьев будет та, где точка  $g$  попадет на линию зацепления, т.е. точка пересечения окружности головок ведомого колеса с линией зацепления – точка  $a$ . На рис. 4.16 б показано положение зубьев в начале зацепления.

Далее профиль  $ef$  будет нажимать на профиль  $gh$  и скользить по нему до тех пор, пока они не выйдут из зацепления. При этом зацепление (касание) профилей будет происходить все время только на линии зацепления. Последней будет находиться в зацеплении точка  $e$  ведущего зуба, лежащая на окружности головок. Поэтому последней точкой зацепления будет точка пересечения окружности головок ведущего колеса с линией зацепления – точка  $b$ . Положение зубьев в конце зацепления показано на рис. 4.16 в.

При дальнейшем повороте колес зубья уже не будут находиться в зацеплении (рис. 4.16 г).

Таким образом, зубья будут касаться только на участке  $ab$ . Этот участок называется **рабочим участком линии зацепления**.

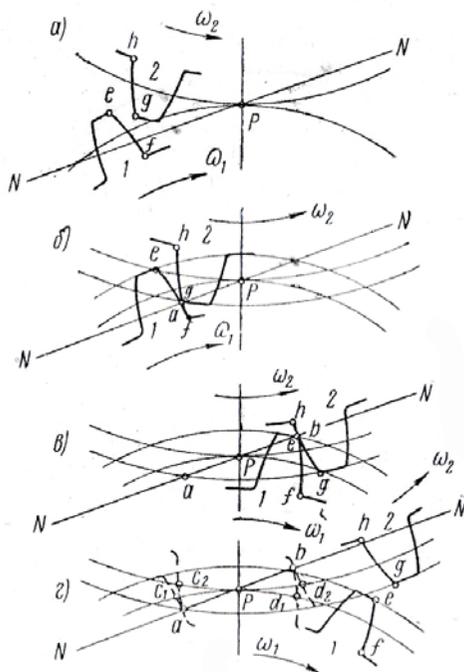


Рис. 4.16. К определению рабочего участка линии зацепления, дуги зацепления и коэффициента перекрытия

Дуги  $c_1d_1$  и  $c_2d_2$  между положениями соответствующих профилей зубьев в начале и конце зацепления для каждого из колес (эти профили показаны пунктирными линиями) есть пути, проходимые зубьями за время зацепления одной пары зубьев, измеренные по начальным окружностям. Так как начальные окружности катятся одна по другой без скольжения, то эти дуги равны между собой. Они называются **дугами зацепления**.

Рабочий участок  $ab$  отмечен также на рис. 4.14 и 4.15. Через точки  $a$  и  $b$  проведены (пунктирными линиями) положения правых профилей зубьев колеса  $1$  в начале и конце зацепления. Дуга  $cd$  на этом рисунке также является дугой зацепления колеса  $1$  (для колеса  $2$  дуга зацепления не обозначена).

При работе зубчатых колес необходимо, чтобы в любой момент времени зубья находились в зацеплении. Для этого требуется, чтобы дуга зацепления была больше шага. В самом деле, каждый последующий зуб вступает в зацепление (в точке  $a$ ), когда зуб пройдет по начальной окружности путь, равный шагу  $t$ . Поэтому путь, проходимый зубом за время зацепления одной пары зубьев (дуга зацепления), должен быть больше шага. В противном случае первая пара зубьев выйдет из зацепления раньше, чем войдет в зацепление следующая пара зубьев, т.е. будут такие промежутки времени, когда ни одна пара зубьев не будет находиться в зацеплении. Этого, конечно, допускать нельзя.

Отношение дуги зацепления к шагу называется **коэффициентом перекрытия**  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{\text{Дуга зацепления}}{\text{шаг}} > 1. \quad (4.19)$$

Это отношение должно быть больше единицы. На практике берется  $\varepsilon \geq 1,1$ .

Коэффициент перекрытия характеризует плавность зацепления  $\varepsilon$ , он показывает среднее количество пар зубьев, находящихся одновременно в зацеплении. Чем больше коэффициент перекрытия, тем плавнее, спокойнее работает зубчатая передача.

Рабочий участок линии зацепления  $ab$  равен дуге  $\overset{\sim}{m}\overset{\sim}{l}$  (рис. 4.14), проходимой зубом за время зацепления по основной окружности. А так как дуги, проходимые зубом по различным окружностям, пропорциональны их радиусам, то

$$\frac{\overset{\sim}{c}\overset{\sim}{d}}{\overset{\sim}{m}\overset{\sim}{l}} = \frac{\overset{\sim}{c}\overset{\sim}{d}}{ab} = \frac{r_1}{ro_1} = \frac{1}{\cos \alpha},$$

откуда

$$\tilde{c}\tilde{d} = \frac{ab}{\cos \alpha}.$$

Подставляя это значение в формулу для определения коэффициента перекрытия, получим

$$\varepsilon = \frac{ab}{t \cos \alpha}. \quad (4.20)$$

Этой формулой удобно пользоваться при определении коэффициента перекрытия. При этом надо иметь в виду, что с изменением угла зацепления изменяется (при прочих равных условиях) и длина рабочего участка линии зацепления.

На рис. 4.17 *а* показан рабочий участок линии зацепления при двух различных углах зацепления. Из рисунка видно, что с увеличением угла зацепления уменьшается рабочий участок линии зацепления. Поэтому уменьшается и коэффициент перекрытия.

Необходимо указать, что на коэффициент перекрытия влияет (при прочих равных условиях) также высота головки зуба  $h'$ . Из рис. 4.19 *б* видно, что с увеличением высоты головки зуба  $h'$  увеличивается рабочий участок линии зацепления (при  $h'_1 > h'_2, a_1 b_1 > a_2 b_2$ ), а следовательно, и коэффициент перекрытия  $\varepsilon$ .

В зацеплении участвуют только те участки профилей зубьев, которые при движении пересекают рабочий участок линии зацепления: для ведущего колеса рабочий участок профиля зуба заключается между окружностью головок этого колеса и окружностью, проходящей через точку  $a$  линии зацепления (рис. 4.14); для ведомого – между окружностью головок этого колеса и окруж-

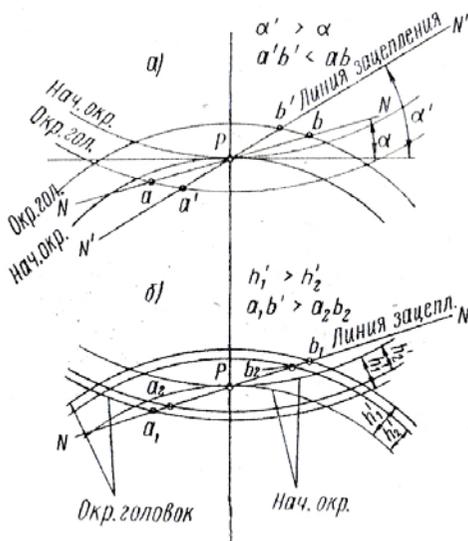


Рис. 4.17. Влияние угла зацепления (*а*) и высоты головки зуба (*б*) на величину рабочего участка линии зацепления и на коэффициент перекрытия

ностью, проходящей через точку  $b$  линии зацепления. Рабочие участки профилей зубьев на рисунке обозначены двойными линиями.

Для лучшего усвоения теории зацепления студент должен уметь находить так называемые сопряженные точки, т.е. такие точки зубьев двух колес, которые входят в соприкосновение друг с другом. Пусть, например, требуется найти точку профиля зуба колеса 2, которая коснется заданной точки  $k_1$  профиля зуба колеса 1 (см. рис. 4.14).

Находим точку на линии зацепления, где эти точки будут соприкасаться (а это может быть только на линии зацепления). Для этого радиусом  $O_1k_1$  из центра  $O_1$  делаем засечку на линии зацепления: находим точку  $k$  — точку встречи заданной точки с искомой. Далее радиусом  $O_2k$  из центра  $O_2$  делаем засечку на соответствующем профиле колеса 2 — получаем искомую точку  $k_2$ . Таким образом, сопряженные точки  $k_1$  и  $k_2$  будут соприкасаться в точке  $k$  линии зацепления.

#### 4.9. Явление подрезания зубьев. Минимальное количество зубьев

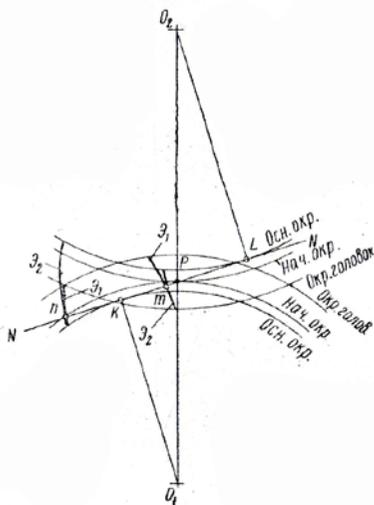


Рис. 4.18. Эвольвенты выпуклыми сторонами могут касаться только на теоретическом участке линии зацепления

При внешнем зацеплении эвольвенты касаются между собой только выпуклыми сторонами (профили зубьев являются выпуклыми). Но выпуклыми сторонами эвольвенты могут касаться только на участке  $KL$  — на теоретическом участке линии зацепления (рис. 4.18). За пределами теоретического участка эвольвенты могут касаться только разными сторонами — выпуклая с вогнутой. Действительно, если точка касания эвольвент  $m$  находится в пределах участка  $KL$ , то центры их кривизны (точки  $K$  и  $L$ ) расположены по разные стороны от точки касания. Поэтому эвольвенты встречаются выпуклыми сторонами. Если общая точка касания эвольвент  $n$  расположена за пределами участка  $KL$ , то центры

их кривизны расположены по одну сторону от общей точки касания. Поэтому эвольвенты касаются разными сторонами — выпуклая с вогнутой.

Следовательно, в зубчатом зацеплении необходимо, чтобы рабочий участок линии зацепления  $ab$  (участок, на котором касаются зубья) не

выходил за пределы теоретического  $KL$ , т.е. необходимо, чтобы окружности головок зубчатых колес пересекали линию зацепления в пределах теоретического участка линии зацепления.

Опасность выхода участка  $ab$  за пределы участка  $KL$  возрастает с уменьшением радиуса колеса. Это хорошо видно на рис. 4.19.

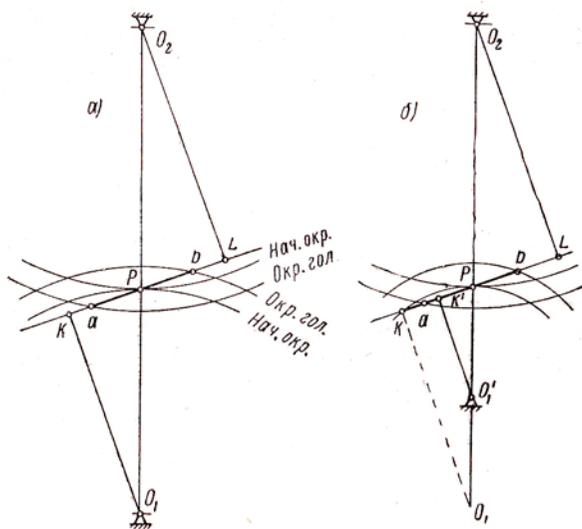


Рис. 4.19. Взаимное положение рабочего и теоретического участков линий зацепления:

- а* – рабочий участок  $ab$  расположен внутри теоретического  $KL$ ;
- б* – рабочий участок  $ab$  выходит за пределы теоретического  $K'L$

На рис. 4.19 *а* показан случай, когда размеры зубчатых колес обеспечивают положение рабочего участка линии зацепления  $ab$  внутри теоретического участка  $KL$ . Если уменьшить радиус начальной окружности меньшего колеса от величины  $O_1P$  до величины  $O'_1P$  (рис. 4.19 *б*), то теоретический участок со стороны меньшего колеса уменьшится — его конец переместится из точки  $K$  в точку  $K'$ , и рабочий участок  $ab$  выйдет за пределы теоретического  $K'L$  (точка  $a$  дальше от полюса, чем точка  $K'$ ).



Рис. 4.20. Вид подрезанного зуба

Исследования показывают (мы их здесь не приводим), что при выходе рабочего участка линии зацепления  $ab$  за пределы теоретического участка вершина зуба большого колеса внедряется в основание зуба меньшего колеса, и при изготовлении зубья малого колеса оказываются подрезанными у основания (рис. 4.20). При подрезании у зуба срезается часть профиля и значительно уменьшается его прочность. Поэтому явление подрезания недопустимо.

Выведем формулу для определения наименьшего количества зубьев колеса из условия отсутствия подрезания.

Предельно малое колесо, у которого зубья не окажутся подрезанными, будет в том случае, когда окружность головок большого колеса пересечет линию зацепления в точке  $K$ , т.е. когда точки  $a$  и  $K$  совпадут. Этот случай изображен на рис. 4.21.

Из треугольника  $O_2PK$  имеем

$$O_2K^2 = O_2P^2 + PK^2 - 2 \cdot O_2P \cdot PK \cos(90 + \alpha).$$

Учитывая, что

$$O_2K = r_2 + m, \quad O_2P = r_2, \quad PK = r_1 \sin \alpha,$$

получим

$$r_2 + m = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 \sin^2 \alpha + 2r_1r_2 \sin^2 \alpha},$$

или

$$r_2 + m = r_2 \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \sin^2 \alpha + 2\frac{r_1}{r_2} \sin^2 \alpha}.$$

Но отношение радиусов  $\frac{r_1}{r_2}$  есть передаточное отношение

$$\frac{r_1}{r_2} = -i_{21}$$

(для внешнего зацепления передаточное отношение отрицательно), тогда

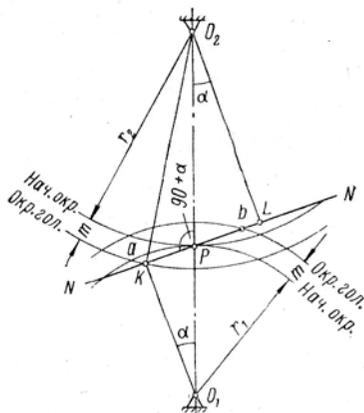


Рис. 4.21. К определению минимального количества зубьев из условия отсутствия подрезания

$$r_2 + m = r_2 \sqrt{1 + i(i-2) \sin^2 \alpha}$$

(для простоты индексы при  $i$  ставить не будем).

Разложим корень в ряд по биному Ньютона:

$$\sqrt{1 + i(i-2) \sin^2 \alpha} = 1 + \frac{1}{2} i(i-2) \sin^2 \alpha - \frac{1}{8} [i(i-2) \sin^2 \alpha]^2 + \dots$$

Так как величина  $|i| < 1$  (или  $r_1 < r_2$ ), то ряд быстро сходится. Ограничимся первыми двумя членами, тогда

$$r_2 + m = r_2 + \frac{1}{2} r_2 i(i-2) \sin^2 \alpha,$$

или

$$m = \frac{1}{2} r_2 i(i-2) \sin^2 \alpha.$$

Выразим величину модуля через радиус и количество зубьев меньшего звена

$$m = \frac{2r_1}{z_1},$$

тогда

$$\frac{2r_1}{z_1} = \frac{1}{2} r_2 i(i-2) \sin^2 \alpha.$$

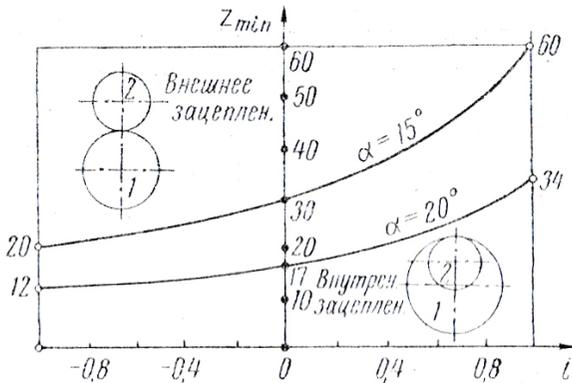


Рис. 4.22. Диаграмма зависимости минимального количества зубьев от передаточного отношения и угла зацепления

Решая это равенство относительно  $z_1$ , получим

$$z_1 = \frac{4r_1}{r_2 i (i - 2) \sin^2 \alpha}.$$

Но

$$\frac{r_1}{r_2} = -i_{21},$$

тогда окончательно

$$z_1 = z_{\min} = \frac{4}{(2 - i) \sin^2 \alpha}. \quad (4.21)$$

На рис. 4.22 по этому уравнению построена зависимость  $z_{\min} = f(i)$  для двух значений углов  $\alpha$  ( $20^\circ$  и  $15^\circ$ ). По оси абсцисс отложены значения передаточного отношения, а по оси ординат — значения  $z_{\min}$ . Положительное направление оси абсцисс соответствует внутреннему зацеплению, а отрицательное — внешнему. Графики наглядно показывают, как в зависимости от передаточного отношения и угла зацепления изменяется минимально допустимое количество зубьев. Точки диаграммы, находящиеся на оси ординат, соответствуют реечному зацеплению ( $i = 0$ ).

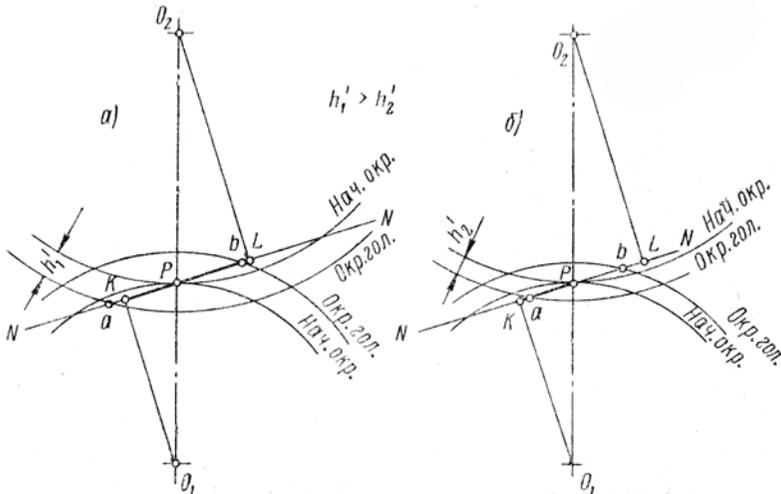


Рис. 4.23. К влиянию высоты зуба на явление подрезания зубьев

Таким образом, для применяемого в настоящее время двадцатиградусного эвольвентного зацепления  $z_{\min} = 17$  при реечном зацеплении и

$z_{\min} = 12$ , когда оба колеса одинаковы ( $i=1$ ). При пятнадцатиградусном зацеплении эти величины значительно больше, что является главной причиной перехода от применявшегося ранее пятнадцатиградусного зацепления к двадцатиградусному, так как уменьшение количества зубьев значительно снижает размеры зубчатой передачи, делает ее более компактной и дешевой.

Следует указать, что на подрезание зубьев влияет и высота их головок. На рис. 4.23 *a* показано расположение практического участка линии зацепления  $ab$  относительно теоретического участка  $KL$  для колеса с количеством зубьев  $z < z_{\min}$  и нормальной высотой головки зуба  $h' = m$ . Как видно, точка  $a$  выходит за пределы теоретического участка, и зубья меньшего колеса поэтому будут подрезанными. Если высоту головки зуба уменьшить (рис. 4.23 *б*), то рабочий участок  $ab$  окажется внутри теоретического участка и подрезания не будет.

Поэтому часто с целью уменьшения минимального количества зубьев применяют колеса с укороченными зубьями, у которых высота головки  $h' = 0,8m$ , а высота ножки  $h'' = m$ .

#### **4.10. Некоторые сведения о методах изготовления зубчатых колес**

Методы изготовления зубчатых колес тесно связаны с теорией зацепления. Зубчатые колеса с эвольвентным профилем изготавливаются главным образом на специальных зуборезных станках двумя методами: копирования и обкатки.

Метод копирования состоит в следующем.

Дисковая фреза, режущие кромки которой имеют очертание впадины между зубьями, совершает вращательное движение (рис. 4.24). Заготовка совершает поступательное движение вдоль своей оси. За каждый ход заготовки фрезеруется только одна впадина. Затем заготовка возвращается

в исходное положение и поворачивается на угол  $\frac{360^\circ}{z}$ . После этого она снова получает поступательное движение вдоль оси, и происходит фрезерование следующей впадины и т.д.

Этот метод имеет существенные недостатки. Во-первых, он малопроизводителен. Во-вторых, для точного изготовления зубьев требуется очень много режущего инструмента. Действительно, форма впадины зависит не только от модуля, но и от количества зубьев (размеров колеса), так как форма эвольвентного профиля зависит от радиуса основной окружности. Поэтому теоретически для каждого зубчатого колеса с определенным количеством зубьев требуется своя фреза. Это, конечно, очень дорого. На практике для каждого модуля применяется комплект, состоя-

ший только из некоторого количества фрез, каждая из которых служит для изготовления зубчатых колес с количеством зубьев в определенном диапазоне. Форма зубьев каждой фрезы точно соответствует форме впадины только для колес с меньшим количеством зубьев данного диапазона. Для остальных колес профили зуба будут приближенными.

Кроме дисковых фрез при изготовлении зубчатых колес методом копирования применяются также пальцевые фрезы (рис. 4.25).

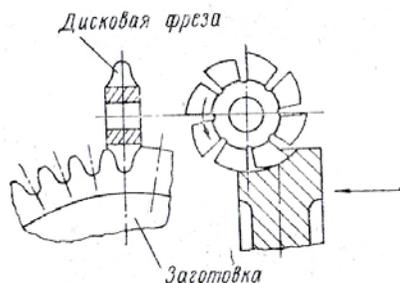


Рис. 4.24. Нарезание зубчатого колеса по методу копирования дисковой фрезой

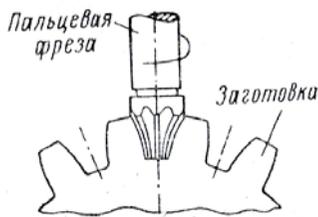


Рис. 4.25. Нарезание зубчатого колеса по методу копирования пальцевой фрезой

Вследствие указанных недостатков метод копирования не получил широкого применения. Он используется только для изготовления небольшого количества зубчатых колес, на ремонтных работах, для неот-

ветственных колес, работающих при небольших окружных скоростях. Изготовление колес этим способом может производиться на обычном фрезерном станке, снабженном делительной головкой.

В настоящее время широкое применение имеет более совершенный метод – метод обкатки, – в котором в качестве инструмента используются долбяк

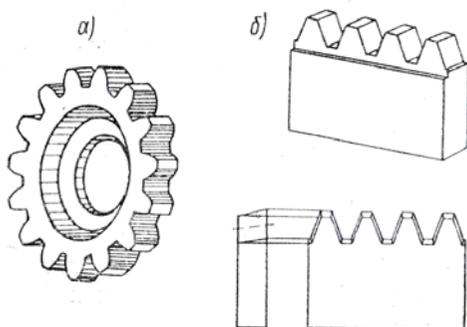


Рис. 4.26. Режущие инструменты при нарезании зубчатых колес по методу обкатки: а – долбяк; б – инструментальная рейка

или инструментальная рейка (гребенка). Режущие кромки этих инструментов имеют точное очертание эвольвентного зубчатого колеса или зубчатой рейки, а боковые поверхности затылованы (рис. 4.26 а, б).

В процессе изготовления зубчатого колеса долбяк и заготовка на зуборезном станке имеют такое относительное расположение и получают такое относительное движение, как будто они находятся в действительном зацеплении, т.е. их начальные окружности касаются и обкатывают одна другую без скольжения (рис. 4.27). Отсюда этот метод и получил свое название.

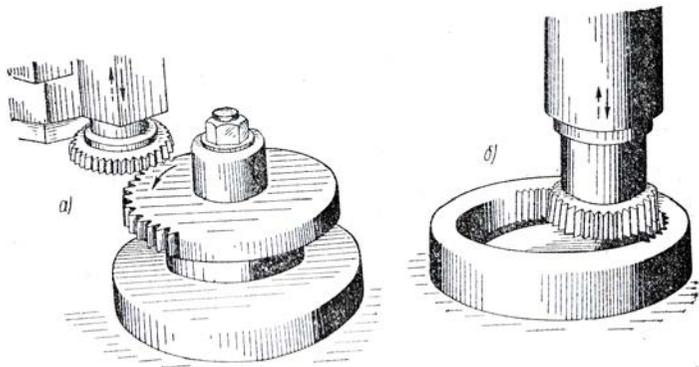


Рис. 4.27. Нарезание зубчатых колес по методу обкатки долбяком:  
а – колесо внешнего зацепления;  
б – колесо внутреннего зацепления

Кроме этих движений инструмент получает возвратно-поступательное режущее движение вдоль своей оси. Во время движения инструмента вниз происходит рабочий ход – срезание стружки. Движение инструмента вверх является холостым ходом.

В основе метода обкатки лежит то свойство зубчатого зацепления, что профили зубьев зацепляющихся колес являются взаимноогибомыми кривыми. Поэтому, если очертания режущих кромок зубьев

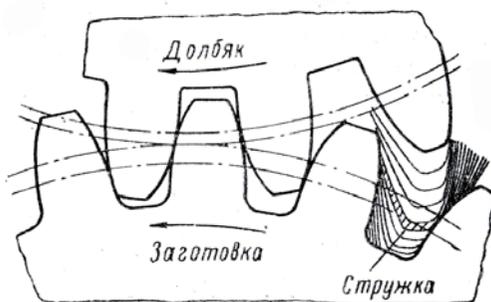
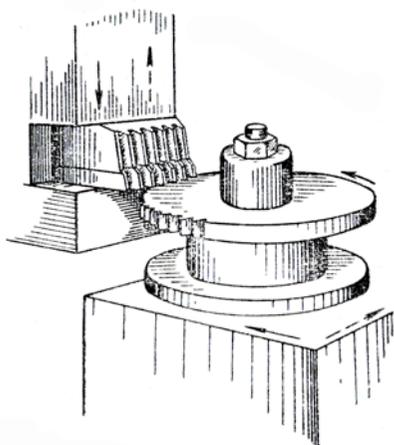


Рис. 4.28. Образование зуба зубчатого колеса при нарезании долбяком

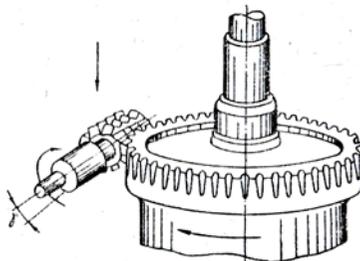
долбяка выполнены по эвольвентным кривым, то и зубчатое колесо получится с зубьями эвольвентного профиля.

На рис. 4.28 показаны (тонкими линиями) последовательные положения зуба долбяка относительно нарезаемого колеса. Из рисунка видно, что профиль зуба колеса является огибающей ряда последовательных относительных положений профиля зуба долбяка.

Аналогично происходит нарезание зубьев инструментальной рейкой (рис. 4.29). Здесь начальная окружность заготовки перекачивается без скольжения по начальной прямой рейки, т.е. заготовка совершает вращательное движение, а рейка — поступательное. Преимущество рейки перед долбяком заключается в том, что зубья у рейки имеют прямолинейный профиль, что облегчает ее изготовление и уход за нею (заточка и т.д.).



*Рис. 4.29. Нарезание зубчатого колеса по методу обкатки инструментальной рейкой*



*Рис. 4.30. Нарезание зубчатого колеса по методу обкатки червячной фрезой*

Одним из методов обкатки является нарезание зубчатых колес червячной фрезой (рис. 4.30). Расположение фрезы относительно заготовки и их движения показаны на рис. 4.31. Фреза в диаметральной сечении имеет профиль рейки. Она имеет вращательное движение вокруг своей оси и поступательное — вдоль образующей цилиндра заготовки. Заготовка имеет вращательное движение. За один оборот фрезы она поворачивается на  $\frac{360^\circ}{z}$  (если фреза однозаходная). Фреза относительно заготовки установ-

з

ливается так, чтобы ее витки в месте снятия стружки были параллельны образующей цилиндра заготовки, т.е. ось фрезы должна составлять с торцевой плоскостью заготовки угол  $\gamma$ , равный углу подъема средней линии винтовой поверхности витков фрезы.

В последние годы получил распространение новый метод обкатки – накатка зубчатых колес в горячем состоянии, который заключается в следующем.

Инструмент в виде зубчатого колеса и заготовка в горячем состоянии получают на станке такие относительные движения, как будто они находятся в действительном зацеплении. При этом вследствие пластических деформаций инструмент выдавливает на заготовке зубья точного эвольвентного профиля.

Большим достоинством всех методов обкатки является высокая производительность, большая точность и малое количество инструмента. Одним инструментом (данного модуля) можно нарезать зубчатые колеса с любым количеством зубьев.

#### 4.11. Корригирование зубчатых колес

Рассмотренное до сих пор зубчатое зацепление с нормальными геометрическими параметрами часто не удовлетворяет требованиям конструкции, так как оно накладывает на последнюю целый ряд ограничений. Например, это относится к выбору количества зубьев зубчатого колеса. Снижение числа зубьев значительно удешевляет производство, уменьшает размеры конструкции и делает ее более компактной. Но уменьшение числа зубьев при нормальном зубчатом зацеплении может вызывать их подрезание. Поэтому в тех случаях, когда необходимо все же

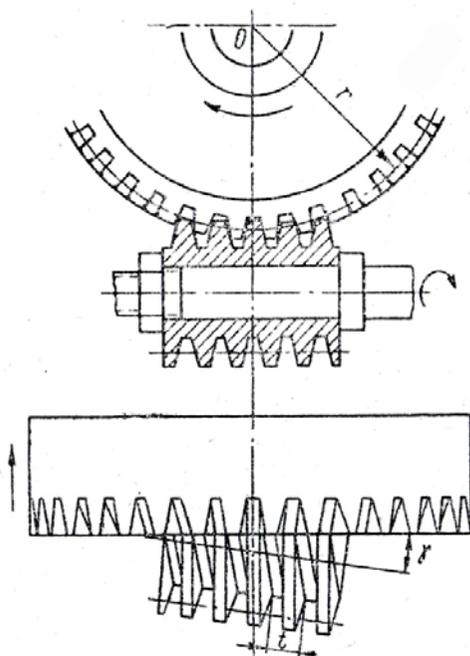


Рис. 4.31. Взаимное расположение червячной фрезы и заготовки

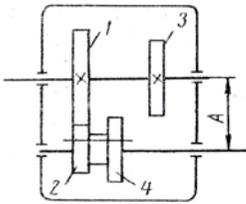


Рис. 4.32. К вопросу о корригировании колес для соосной зубчатой передачи

сделать количество зубьев меньше допустимого, приходится отступать от нормального зацепления, т. е. исправлять его.

Часто невозможно также применить нормальное зубчатое зацепление у соосных передач. Например, на рис. 4.32 показана схема редуктора, у которого количество зубьев зубчатых колес равно  $z_1 = 40, z_2 = 20, z_3 = 42, z_4 = 19$ . Модуль у всех колес должен быть одинаков. Но при нормальном зубчатом зацеплении межосевые расстояния не могут быть одинаковыми, так как

$$a_{12} = \frac{m}{2}(z_1 + z_2) \neq a_{34} = \frac{m}{2}(z_3 + z_4).$$

Поэтому, чтобы создать такую передачу, необходимо и в этом случае отступить от нормального зубчатого зацепления.

Приведённые примеры, когда приходится отступать от нормального зубчатого зацепления, конечно, не единственные. Имеется много и других случаев, когда нормальное зацепление не удовлетворяет предъявляемым требованиям. Например, нормальное зубчатое зацепление может не удовлетворять конструкции вследствие малого коэффициента перекрытия или вследствие большой величины коэффициента удельного скольжения и т.д.

Во всех случаях, когда нормальное зубчатое зацепление не удовлетворяет предъявляемым требованиям, от него приходится отступать, т.е. исправлять его.

Такое исправление зубчатого зацепления с целью его улучшения называется **корригированием**.

Корригирование бывает нескольких видов:

- а) угловое;
- б) высотное;
- в) смешанное;
- г) методом смещения зуборезной рейки при нарезании зубчатого колеса.

Угловое корригирование – это такое исправление, когда улучшение зацепления осуществляется за счет изменения угла зацепления по сравнению с нормальным, равным  $20^\circ$ . Мы видели (см. пункт 4.9), что с увеличением угла зацепления уменьшается опасность подрезания и уменьшается минимально допустимое количество зубьев. Изменение угла зацепле-

ния также влияет на коэффициент перекрытия. Уменьшая угол зацепления, можно увеличить коэффициент перекрытия (см. пункт 4.8).

Высотное корригирование – это такое исправление зубчатого зацепления, когда его улучшение осуществляется за счет уменьшения высоты головки зуба. Мы видели ранее (см. пункт 4.9), что с уменьшением высоты головки зуба уменьшаются опасность подрезания и минимальное количество зубьев. Уменьшение высоты головки зуба  $h'$  возможно одновременно с уменьшением высоты ножки зуба  $h''$ . В этом случае применяется укороченный зуб, у которого, как уже указывалось,  $h' = 0,8m$  и  $h'' = m$ . Однако этот способ невыгоден, так как требует изменения режущего инструмента.

Уменьшение высоты головки зуба  $h'$  возможно за счет увеличения высоты ножки зуба  $h''$ . В этом случае полная высота зуба  $h$  остается такой же, как и у нормального зубчатого зацепления. Такое корригирование, как это будет видно далее, можно осуществить обычным зуборезным инструментом (рейкой) при корригировании методом смещения инструментальной рейки.

Смешанное корригирование — это такое исправление зубчатого зацепления, когда его улучшение происходит одновременно за счет изменения угла зацепления и изменения распределения высот головки и ножки зуба.

Применение указанных методов корригирования ограничивалось раньше необходимостью в каждом случае иметь нестандартный инструмент с данным углом зацепления или данной высотой зуба. В настоящее время в связи с широким применением изготовления зубчатых колес методом обкатки эти методы корригирования могут быть применены при нарезании колес стандартным инструментом (за исключением колес с укороченным зубом).

Перейдем к рассмотрению наиболее распространенного метода корригирования – корригирование смещением инструментальной рейки при нарезании зубчатых колес.

#### 4.12. Корригирование методом смещения инструментальной рейки

На рис. 4.33 изображен профиль стандартной инструментальной рейки, при помощи которой производится нарезание зубчатых колес. Совершенно очевидно,

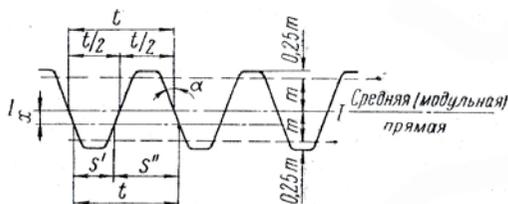


Рис. 4.33. Профиль стандартной инструментальной рейки

что шаг  $t$  рейки в любом ее сечении одинаков и равен  $t = \pi m$ . Поэтому при изготовлении зубчатого колеса методом обкатки можно по окружности заготовки диаметром  $D = mz$  перекачивать инструментальную рейку любой прямой. Так как шаг по всем сечениям рейки одинаков, то количество зубьев и шаг по окружности  $D = mz$  колеса во всех случаях будет одинаковым. Разница будет лишь в толщине зуба и ширине впадины, а также в величинах окружностей впадин и головок колеса.

Толщина зуба и ширина впадины на инструментальной рейке равны лишь в среднем сечении – по прямой  $I-I$ . Эта прямая называется **модульной прямой**.

При изготовлении нормального зубчатого колеса по окружности диаметром  $D = mz$  перекачивается модульная прямая рейки (так как у нормального зубчатого колеса толщина зуба должна быть равна ширине впадины). При перекачивании по окружности диаметром  $D = mz$  инструментальной рейки другими прямыми зубчатые колеса будут скорректированными.

На рис. 4.34 показано размещение рейки относительно заготовки при изготовлении нормального (рис. 4.34 а) и скорректированного (рис. 4.34 б) зубчатых колес. Как видно из рисунка, в последнем случае рейка смещена относительно положения при нарезании нормального колеса на величину  $x$ . Величина  $x$  называется **абсолютным смещением рейки**, которая обычно выражается в долях модуля,

$$x = \xi m, \quad (4.22)$$

откуда

$$\xi = \frac{x}{m}. \quad (4.22a)$$

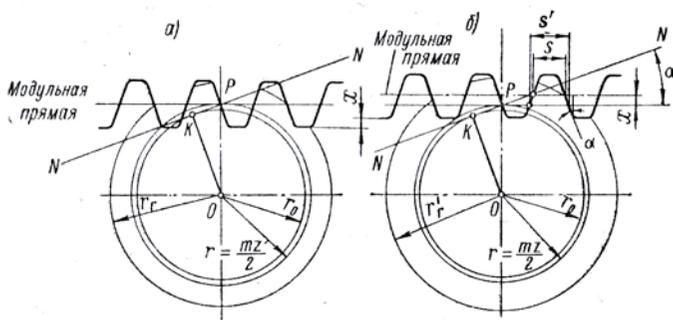


Рис. 4.34. Размещение инструментальной рейки относительно заготовки при нарезании нормального (а) и скорректированного (б) зубчатых колес

Величина  $\xi$  называется **относительным смещением**.

Смещение рейки может быть в обе стороны: от центра заготовки (положительное) и к центру (отрицательное).

Необходимо указать, что диаметр основной окружности во всех случаях нарезания колеса данной инструментальной рейкой, независимо от величины смещения, остается постоянным (это ясно видно из рис. 4.34). Следовательно, и профили зубьев при различных смещениях рейки будут очерчены по одинаковым эвольвентам.

Определим толщину зуба  $s'$  зубчатого колеса по окружности диаметром  $D = mz$  в зависимости от смещения рейки. Из рис. 4.34 б видно, что ширина впадины инструментальной рейки, а следовательно, и толщина зуба зубчатого колеса в зависимости от величины смещения равна

$$s' = s + 2xtg\alpha, \quad (4.23)$$

или

$$s' = \frac{\pi m}{2} + 2\xi mtg\alpha$$

и окончательно

$$s' = m \left( \frac{\pi}{2} + 2\xi tg\alpha \right). \quad (4.23a)$$

При корригировании пары зубчатых колес, которые должны находиться в зацеплении, в общем случае оба колеса нарезаются с различными смещениями рейки  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . При этом относительные смещения  $\xi_1$  и  $\xi_2$  могут вообще быть произвольными (как выбрать нужное смещение, будет показано дальше).

Так как смещения для обоих колес являются различными, то окружности диаметрами  $D = mz_1$  и  $D = mz_2$  не могут быть начальными, т.к. по начальным окружностям (окружностям, которые касаются и перекатываются друг по другу без скольжения) не только шаг должен быть одинаковым, но по этим окружностям толщина зуба одного колеса должна быть равна ширине впадины другого колеса. А при произвольных смещениях  $\xi_1$  и  $\xi_2$  по окружностям  $D = mz$  этого не будет. Поэтому в общем случае начальные окружности будут отличаться от окружностей диаметром  $D = mz$ .

Окружность диаметром  $D = mz$ , где  $m$  — стандартный модуль, называется **делительной окружностью**. Эта окружность является начальной только при изготовлении колеса. Именно по этой окружности перекачивается без скольжения при изготовлении колеса какая-либо начальная прямая инструментальной рейки. В зацеплении корригированных колес делительные окружности с начальными, как уже указывалось, не совпадают. Поэтому и межосевое расстояние, равное сумме радиусов началь-

ных окружностей (начальные окружности должны касаться), будет отличным от межосевого при нормальном зубчатом зацеплении. Но изменение межосевого расстояния для эвольвентного зубчатого зацепления, как уже указывалось, не изменяет передаточного отношения, и зубчатая передача будет работать нормально (см. пункт 4.5). Изменится лишь угол зацепления. Новый угол зацепления  $\alpha'$  называется **монтажным углом зацепления**.

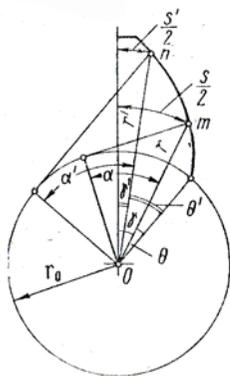


Рис. 4.35. К определению толщины зуба по любой окружности

Он будет отличным от стандартного  $\alpha$ , хотя зубчатые колеса и нарезаются стандартной инструментальной рейкой со стандартным углом зацепления.

Перейдем к определению основных параметров корригированного зубчатого зацепления: монтажного угла зацепления  $\alpha'$ , радиусов начальных окружностей  $r'_1$  и  $r'_2$ , межосевого расстояния  $A'$  и т. д. Для этого предварительно выведем формулу для определения толщины зуба  $s'$  зубчатого колеса по какой-либо окружности радиусом  $r'$ , если известны толщина этого зуба  $s$  по окружности радиусом  $r$  и радиус основной окружности  $r_0$ .

На рис. 4.35 изображен зуб зубчатого колеса, выполненный по эвольвентному профилю основной окружности радиусом  $r_0$ . Пунктирной линией проведена ось сим-

метрии зуба.

Из рисунка следует

$$\gamma' + \theta' = \gamma + \theta$$

Учитывая, что угол (в радианах) есть отношение дуги к радиусу

$$\gamma' = \frac{s'}{2r'}, \quad \gamma = \frac{s}{2r},$$

и что (см. пункт 4.4. – уравнение эвольвенты)

$$\theta' = \text{inv}\alpha', \quad \theta = \text{inv}\alpha,$$

получим

$$\frac{s'}{2r'} + \text{inv}\alpha' = \frac{s}{2r} + \text{inv}\alpha,$$

откуда

$$s' = r' \frac{s}{r} + 2r'(\text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha'). \quad (4.24)$$

Применим это уравнение для определения толщины зуба по начальной окружности радиуса  $r'$ , если известны радиус делительной окружности  $r$  и толщина зуба по делительной окружности  $s$ .

Учитывая, что

$$s' = m \left( \frac{\pi}{2} + 2\xi \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (\text{см. формулу 4.23 а})$$

$$r = \frac{mz}{2} \quad r' = \frac{m'z'}{2},$$

где  $m$  – стандартный модуль по делительной окружности;

$m'$  – модуль по начальной окружности,

получим

$$s' = m' \left[ \frac{\pi}{2} + 2\xi \operatorname{tg} \alpha + z(\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha') \right]. \quad (4.25)$$

Легко видеть, что углы  $\alpha$  и  $\alpha'$  в этой формуле равны соответствующим углам зацепления (рис. 4.36).

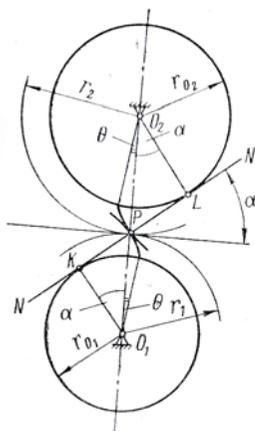


Рис. 4.36. К равенству угла  $\alpha$  в формуле (4.25) углу зацепления

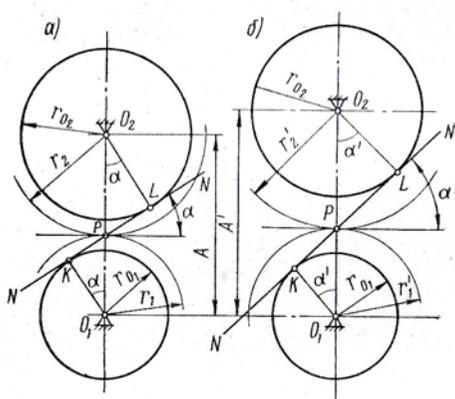


Рис. 4.37. Изменение угла зацепления при изменении межосевого расстояния

Если корригированию подвергаются оба колеса, находящиеся в зацеплении, то толщины их зубьев по начальным окружностям будут равны:

$$s'_1 = m' \left[ \frac{\pi}{2} + 2\xi_1 \operatorname{tg} \alpha + z_1 (\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha') \right], \quad (4.25 \text{ а})$$

$$s'_2 = m' \left[ \frac{\pi}{2} + 2\xi_2 \operatorname{tg} \alpha + z_2 (\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha') \right]. \quad (4.25 \text{ б})$$

Шаг обоих колес по начальным окружностям  $t'$ , а следовательно, и модуль по этим окружностям  $m'$  должны быть одинаковыми (так как начальные окружности катятся друг по другу без скольжения).

Углы  $\alpha$  обоих колес по делительным окружностям также одинаковы и равны стандартному углу зацепления  $\alpha = 20^\circ$ . Также одинаковы у обоих колес углы  $\alpha'$  по начальным окружностям. Угол  $\alpha'$  равен действительному монтажному углу зацепления пары корригированных колес.

Складывая толщины зубьев обоих колес по начальным окружностям и учитывая, что их сумма должна быть равна шагу зацепления по этим окружностям (так как толщина зуба одного из колес должна быть равна ширине впадины другого колеса)

$$s'_1 + s'_2 = t' = \pi m',$$

получим

$$s'_1 + s'_2 = m' [\pi + 2(\xi_1 + \xi_2) \operatorname{tg} \alpha + (z_1 + z_2)(\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha')] = \pi m'$$

или

$$2(\xi_1 + \xi_2) \operatorname{tg} \alpha + (z_1 + z_2)(\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha') = 0$$

откуда

$$\operatorname{inv} \alpha' = \frac{2(\xi_1 + \xi_2)}{z_1 + z_2} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{inv} \alpha. \quad (4.26)$$

По этой формуле, зная количество зубьев зубчатых колес  $z_1$  и  $z_2$  и относительные смещения  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , легко определить монтажный угол зацепления корригированных зубчатых колес.

Определив по уравнению (4.26) угол  $\alpha'$ , легко подсчитать и другие параметры корригированных колес.

На рис. 4.37 показано взаимное расположение центров, основных и начальных окружностей и линии зацепления для нормальных (рис. 4.37 а) и корригированных (рис. 4.37 б) зубчатых колес.

Радиус начальной окружности корригированного колеса равен

$$r' = \frac{r_0}{\cos \alpha'}.$$

Но радиус основной окружности  $r_0$  в свою очередь равен (см. рис. 4.37 а)

$$r_0 = r \cos \alpha = \frac{mz}{2} \cos \alpha .$$

Следовательно

$$r' = \frac{mz}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} . \quad (4.27)$$

Применяя это уравнение для обоих колес, получим:

$$r'_1 = \frac{mz_1}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \quad r'_2 = \frac{mz_2}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} .$$

Межосевое расстояние корригированного зацепления  $A'$  равно сумме радиусов начальных окружностей:

$$A' = r'_1 + r'_2$$

или окончательно

$$A' = \frac{m}{2} (z_1 + z_2) \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} . \quad (4.28)$$

Определим шаг зубчатых колес по начальным окружностям. Шаг любого зубчатого колеса пропорционален радиусу, т.е.

$$\frac{t'}{t} = \frac{r'}{r} ,$$

откуда

$$t' = t \frac{r'}{r} .$$

Учитывая формулу (4.27), окончательно получим

$$t' = t \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = \pi m \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} . \quad (4.29)$$

Величины радиусов окружностей впадин корригированных колес, как это видно из рис. 4.34 б, увеличиваются по сравнению с нормальным зубчатым колесом на величину абсолютного смещения рейки  $x = \xi m$ :

$$r'_B = r_B + x = \frac{m(z - 2,5)}{2} + \xi m$$

или

$$r'_B = \frac{m}{2} (z - 2,5 + 2\xi) \quad (4.30)$$

Величины радиусов окружностей головок как будто также увеличиваются на величину смещения  $\xi$ . Однако вследствие того, что изменение межосевого расстояния в общем случае не равно сумме смещений

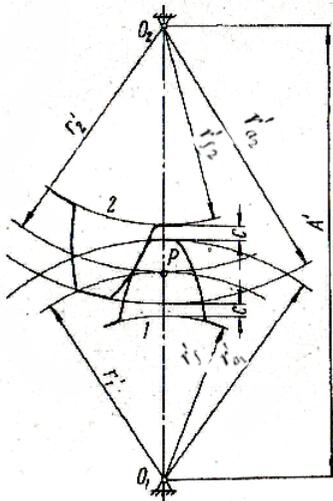


Рис. 4.38. К определению радиусов окружностей головок корригированных зубчатых колес

$$A' - A \neq m(\xi_1 + \xi_2),$$

высота зубьев должна быть несколько уменьшена по сравнению со стандартной. Величину радиуса окружности головок корригированного зубчатого колеса следует определять в зависимости от межосевого расстояния, величины радиуса окружности впадин другого колеса и величины радиального зазора. Из рис. 4.38 следует:

$$\left. \begin{aligned} r'_{\Gamma_1} &= A' - r'_{B_2} - c; \\ r'_{\Gamma_2} &= A' - r'_{B_1} - c \end{aligned} \right\}, \quad (4.31)$$

где  $r'_{\Gamma_1}$ ,  $r'_{\Gamma_2}$  – радиусы окружностей головок соответственно колес 1 и 2;  $r'_{B_1}$ ,  $r'_{B_2}$  – радиусы окружностей впадин соответственно колес 1 и 2;

$c$  – радиальный зазор (обычно

принимают равным  $c = 0,25m$ ).

Уравнения (4.26) – (4.31) являются основными для определения размеров корригированного зубчатого зацепления.

Определение параметров корригированных зубчатых колес не представляет труда. Здесь следует хорошо запомнить лишь формулу (4.26) для определения монтажного угла зацепления  $\alpha'$ . Величины же начальных окружностей  $r'_1$  и  $r'_2$  межосевого расстояния  $A'$ , шага  $t'$  модуля  $m'$  пропорциональны соответствующим величинам нормального зубчатого зацепления в  $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$  раз (сравните соответствующие формулы для корригированных и нормальных зубчатых колес). Радиусы окружностей впадин больше соответствующих радиусов нормальных колес на величины абсолютных смещений рейки. Радиусы окружностей головок корригированных колес определяются по формулам (4.31).

#### 4.13. Смещение инструментальной рейки при нарезании зубчатых колес с количеством зубьев меньше $z_{\min}$

При нарезании нормального зубчатого колеса с количеством зубьев  $z < 17$  зубья, как отмечалось в пункте 4.9, получают подрезанными,

так как рабочий участок линии зацепления  $ab$  выходит за пределы теоретического  $KL$ .

На рис. 4.39 сплошной линией  $I$  показано положение рейки относительно заготовки при нарезании нормального зубчатого колеса (без смещения инструментальной рейки) с количеством зубьев  $z < 17$ . Как видно, линия головок инструментальной рейки пересекает линию зацепления (в точке  $a$ ) за пределами теоретического участка, ограниченного точкой  $K$ . Поэтому зуб у зубчатого колеса оказывается подрезанным. Профиль подрезанного зуба на рисунке изображен сплошной линией.

Для того чтобы не было подрезания зуба, рейку необходимо сместить от оси заготовок таким образом, чтобы линия головок рейки пересекала линию зацепления не за пределами теоретического участка. Минимальное смещение  $x$  будет тогда, когда точка пересечения линии головок с линией зацепления (точка  $a'$ ) будет совпадать с точкой  $K$  теоретического участка линии зацепления. Смещенное положение рейки  $II$  и зуб колеса, нарезанный при этом положении рейки, показаны пунктирными линиями.

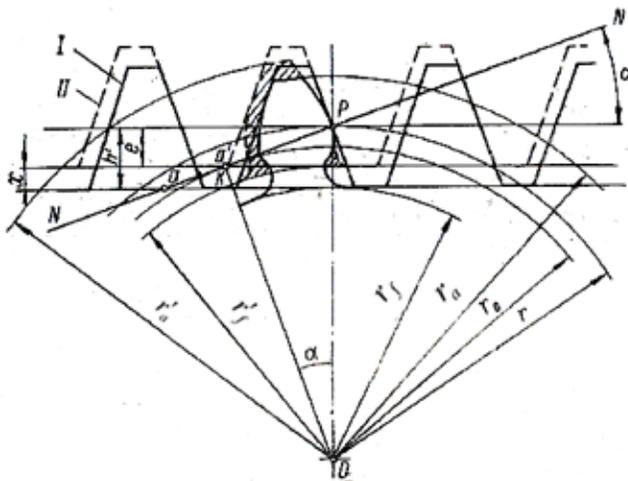


Рис. 4.39. К определению величины смещения инструментальной рейки при нарезании колеса с количеством зубьев меньше  $z_{min}$

Как видно из рисунка, во втором случае зуб получается неподрезанным, он оказывается более полным и прочным. При этом профиль зуба очерчен по такой же эвольвенте. Изменяются лишь толщина зуба и ширина впадины по делительной окружности, а также радиусы окружностей впадин и головок.

Определим величину смещения рейки  $x$ , необходимую для изготовления колеса без подрезания зубьев.

Из рис. 4.39 видно, что абсолютное смещение рейки  $x$  равно

$$x = h' - e = m - e,$$

но

$$e = KP \sin \alpha = r \sin^2 \alpha = \frac{mz}{2} \sin^2 \alpha,$$

тогда

$$x = m \left( 1 - \frac{z}{2} \sin^2 \alpha \right).$$

Относительное смещение рейки равно

$$\xi = 1 - \frac{z}{2} \sin^2 \alpha. \quad (4.32)$$

Для стандартного угла зацепления  $\alpha = 20^\circ$  эта формула имеет вид

$$\xi = 1 - \frac{z}{17}. \quad (4.32 a)$$

Отметим, что при количестве зубьев  $z > 17$  величина получается отрицательной. Это показывает, что для  $z > 17$  рейку можно смещать не только от центра колеса, но и к центру. Однако с точки зрения подрезания зубьев для колес с  $z > 17$  смещения рейки не требуется.

#### 4.14. Выбор смещения рейки

В зависимости от значений коэффициентов сдвига зубчатые зацепления бывают следующих видов.

1. Нормальное (нулевое) зацепление. В этом зацеплении  $\xi_1 + \xi_2 = 0$ , причем  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , т.е. в нем оба колеса нарезаются без сдвига инструментальной рейки.

2. Равносмещенное (компенсированное) зацепление. В этом зацеплении  $\xi_1 + \xi_2 = 0$ , причем  $\xi_1 = -\xi_2$ , т.е. в этом зацеплении смещение рейки при нарезании обоих колес по абсолютной величине одинаковы, но противоположны по знаку. При нарезании меньшего колеса сдвиг рейки положительный (она отодвигается от оси колеса), при нарезании большего колеса — отрицательный (она придвигается к оси колеса).

При равносмещенном зацеплении начальные окружности совпадают с делительными, межосевое расстояние и угол зацепления остаются без

изменения. Изменяются лишь радиусы окружностей головок и впадин, а также толщины зубьев по делительным окружностям.

3. Положительное зацепление. В нем  $\xi_1 + \xi_2 > 0$ , т.е. сумма коэффициентов сдвига обоих колес положительна.

При положительном зацеплении могут быть случаи:

а)  $\xi_1 > 0$ ,  $\xi_2 = 0$ ;

б)  $\xi_1 > 0$ ,  $\xi_2 > 0$ ;

в)  $\xi_1 > 0$ ,  $\xi_2 < 0$ ,  $|\xi_1| > |\xi_2|$ .

В положительных зацеплениях всех видов, как это можно видеть из уравнений (4.26) и (4.28), угол зацепления и межосевое расстояние при сборке оказываются больше стандартных:

$$a' > a; A' > A.$$

4. Отрицательное зацепление. В этом зацеплении  $\xi_1 + \xi_2 < 0$ , т.е. сумма коэффициентов сдвига обоих колес величина отрицательная.

В отрицательном зацеплении межосевое расстояние и угол зацепления при сборке оказываются меньше стандартных:

$$a' < a; A' < A..$$

Коэффициенты смещения  $\xi_1$  и  $\xi_2$  оказывают большое влияние на качественные показатели зубчатого зацепления: на подрезание зубьев, коэффициент перекрытия и т.д. Поэтому правильный выбор величин смещений  $\xi_1$  и  $\xi_2$  при корригировании зацепления имеет большое значение.

В настоящее время существует много различных систем корригирования, отличающихся между собой принципом выбора величин смещений.

#### ***4. 15. Косозубые цилиндрические колеса***

Мы до сих пор рассматривали зацепление прямозубых цилиндрических колес, у которых образующие боковых поверхностей зубьев параллельны осям вращения колес. Контакт зубьев у таких колес происходит по прямой, параллельной осям вращения колес. В прямозубых цилиндрических передачах зубья одновременно по всей длине входят в зацепление и одновременно выходят из него. Картина зацепления в любой плоскости, перпендикулярной оси вращения колес, точно одинакова по геометрии и во времени. Поэтому погрешности, которые обычно всегда имеют место при изготовлении зубчатых колес (например, неточность профиля, непостоянство шага и др.), могут ухудшить их работу (например, усиливается шум, уменьшается долговечность передачи и т.д.). Кро-

ме того, коэффициент перекрытия у прямозубых передач сравнительно невелик (всегда меньше 2), что ухудшает плавность передачи.

Для устранения указанных недостатков на практике часто применяются так называемые косозубые цилиндрические передачи (рис. 4.40).

Образование боковых поверхностей зубьев прямозубого и косозубого колес показано на рис. 4.41.

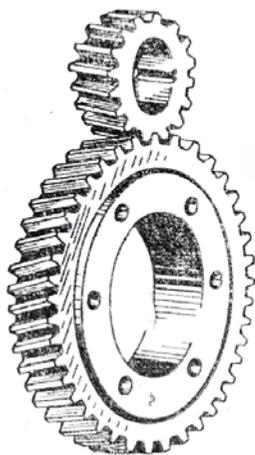


Рис. 4.40. Косозубые цилиндрические колеса

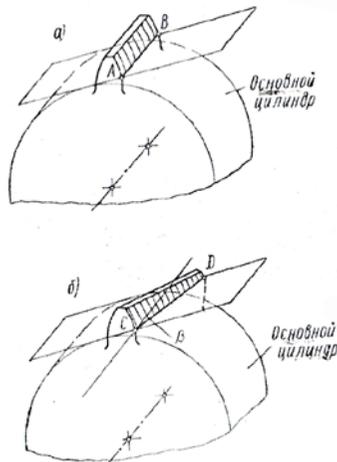


Рис. 4.41. К образованию боковых поверхностей прямого (а) и косого (б) зубьев

Боковую поверхность прямого зуба образует прямая  $AB$  на плоскости, параллельная оси основного цилиндра, при перекатывании плоскости по цилиндру без скольжения (рис. 4.41 а). Все точки прямой описывают эвольвенты, образуя цилиндрическую эвольвентную поверхность зуба.

Боковую поверхность косого зуба образует прямая  $CD$ , не параллельная оси цилиндра, а составляющая с этим направлением угол  $\beta$ . Точки прямой  $CD$  описывают такие же эвольвенты, образуя, однако, не цилиндрическую, а винтовую линейчатую эвольвентную поверхность зуба (рис. 4.41 б).

При пересечении боковой поверхности косого зуба начальным цилиндром образуется винтовая линия с углом наклона к оси цилиндра  $\beta$ .

На рис. 4.42 показана схема бокового вида передачи с косыми зубьями (начальные цилиндры и следы зубьев на них). Видно, что заходы вин-

товых линий на обоих колесах разные. Если на одном колесе заход винтовых линий является правым, то на другом он должен быть левым. Углы наклона винтовых линий к осям колес  $\beta$  должны быть для обоих колес одинаковыми.

Картина зацепления зубьев в косозубой передаче так же, как и в прямозубой, в любом сечении одинакова. Однако в противоположность прямозубой передаче зацепление во всех сечениях происходит не синхронно по времени, т.е. зубья входят в зацепление не сразу по всей длине, а постепенно.

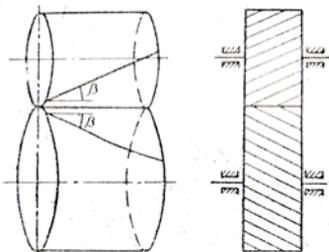


Рис. 4.42. Боковой вид цилиндрических косозубых колес



Рис. 4.43. Развертки начальных цилиндров прямозубого (а) и косозубого (б) колес

На рис. 4.43 а, б показаны развертки начальных цилиндров прямозубого и косозубого колес. Линиями  $cc$  и  $dd$  обозначены соответственно начало и конец дуг зацепления в торцевых сечениях. Линиями  $l$  и  $l'$  показаны положения зубьев в начале и конце зацепления. Из рисунка видно, что, хотя длина дуги зацепления в торцевом сечении косозубого колеса такая же, как и у прямозубого, общая дуга зацепления косозубого колеса больше, чем у прямозубого. Действительно, в верхнем сечении косозубого колеса зуб входит в зацепление в точке  $m$  (положение  $l$ ) и выходит из зацепления в точке  $m''$  (положение  $l''$ ). Однако в нижнем сечении зуб еще находится в зацеплении. Последней будет находиться в зацеплении точка  $n'$ , т.е. зуб полностью выйдет из зацепления, когда будет занимать положение  $l'$ . Следовательно, полная дуга зацепления косозубой передачи по сравнению с прямозубой больше на величину отрезка  $m''m'$ , который равен

$$m''m' = btg\beta$$

Соответственно увеличится и коэффициент перекрытия косозубой передачи  $\varepsilon_k$ . Он будет равен

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{ц} + \frac{btg\beta}{t_s}, \quad (4.33)$$

где  $\varepsilon_{ц}$  – коэффициент перекрытия соответствующей прямозубой передачи, равный коэффициенту перекрытия в торцевом сечении;

$b$  – ширина колеса;

$t_s$  – шаг колеса в торцевом сечении.

Из формулы видно, что увеличивая ширину колеса  $b$  и угол наклона винтовой линии  $\beta$ , можно повысить коэффициент перекрытия  $\varepsilon_k$ .

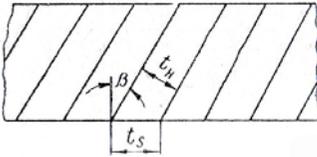


Рис. 4.44. К определению связи между торцевым и нормальным модулями

На практике встречаются косозубые передачи с коэффициентом перекрытия порядка  $8 \div 10$ .

У косозубых колес следует различать шаг и соответственно модуль в двух сечениях — в торцевом и нормальном. Как видно из рис. 4.44, торцевой и нормальный шаг связаны зависимостью

$$t_s = \frac{t_n}{\cos\beta}. \quad (4.34)$$

Соответственно модули в торцевом и нормальном сечениях связаны зависимостью

$$m_s = \frac{m_n}{\cos\beta}. \quad (4.35)$$

Стандартным модулем обычно является нормальный модуль  $m_n$  (это связано с методом изготовления косозубых колес). Поэтому в нормальном сечении размеры зуба получаются стандартными в соответствии с размерами стандартной зуборезной рейки.

Диаметр начальной окружности косозубого колеса определяется по обычной формуле величиной торцевого модуля  $m_s$ :

$$d_w = m_s z \quad (4.36)$$

или

$$d_w = \frac{m_n}{\cos\beta} z. \quad (4.36 a)$$

Так как размеры зуба по высоте  $h$  в нормальном и торцевом сечениях одинаковы, то диаметры окружностей головок и впадин соответственно равны:

$$d_a = d_w + 2h' = m_s z + 2m_n . \quad (4.37)$$

$$d_f = d_w - 2h' = m_s z - 2m_n . \quad (4.38)$$

. Косозубые колеса имеют существенный недостаток, который заключается в том, что во время работы возникает осевое усилие (рис. 4.45), которое возрастает с увеличением угла  $\beta$ . Это требует усложнения конструкции опорных узлов валов (необходимость постановки упорных или радиально-упорных и конических подшипников).

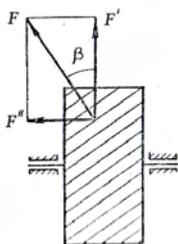


Рис. 4.45. К возникновению осевого усилия у косозубых колес

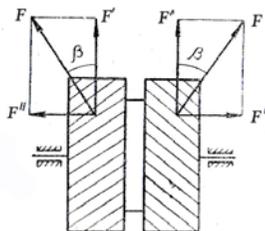


Рис. 4.46. Шевронные зубчатые колеса

Этот недостаток может быть устранен изготовлением так называемых шевронных зубчатых колес (рис. 4.46), у которых винтовые линии зубьев направлены в противоположные стороны симметрично середине колеса. При таком расположении зубьев осевые усилия взаимно уравниваются внутри самого колеса. Однако необходимо отметить, что производство шевронных колес значительно сложнее и дороже, чем простых косозубых.

## Раздел 5. СИЛОВОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

### 5.1. Внешние силы

Задачей силового исследования механизмов является определение реакций в кинематических парах механизма, находящегося под действием заданных внешних сил. Закон движения механизма (ведущего звена) при этом считается заданным.

Силовое исследование механизмов имеет очень важное значение, так как найденные реакции являются необходимыми для расчета звеньев и элементов кинематических пар на прочность, износостойкость, долговечность и т.д.

Все внешние силы, действующие на машину, можно разбить на две большие группы: силы движущие  $F_d$  (и моменты движущих сил  $M_d$ ) и силы сопротивления  $F_c$  (и моменты сил сопротивления  $M_c$ ).

**Движущими силами** называются такие силы, которые совершают положительную работу. Эти силы направлены в сторону движения (в сторону скорости) точки приложения силы или составляют с этим направлением острый угол. Движущие силы стремятся ускорить движение.

**Силами сопротивления** называются такие силы, которые совершают отрицательную работу. Эти силы направлены противоположно направлению движения (скорости) точки приложения или составляют с этим направлением тупой угол. Силы сопротивления стремятся замедлить движение (рис. 5.1,а).

Аналогично моменты движущих сил  $M_d$  направлены в сторону вращения (в сторону угловой скорости) звена, а моменты сил сопротивления  $M_c$  направлены противоположно движению (рис. 5.1,б).

Силы сопротивления в свою очередь делятся на силы полезных, или технологических, сопротивлений и силы вредных сопротивлений.

**Силами полезных (технологических) сопротивлений** называются такие силы, которые совершают работу, требуемую от механизма.

**Силами вредных сопротивлений** являются в основном силы трения. Эти силы всегда имеют место при относительном перемещении соприкасающихся звеньев.

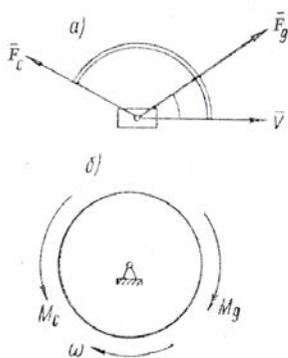


Рис. 5.1. Направление движущих сил и сил сопротивления:  
а – направление сил;  
б – направление моментов

При проектировании машины, конечно, всегда следует стремиться уменьшить и силы полезных и силы вредных сопротивлений. При работе всякой машины на нее всегда действуют и силы движущие и силы различных сопротивлений. Например, в лесопильной раме движущими силами является движущий момент  $M_d$ , развиваемый двигателем, приводящим в движение лесопильную раму. Силами полезных сопротивлений являются силы сопротивления резанию  $F_{рез}$  древесины (лесопильная рама для того и создана, чтобы преодолевать эти силы). Силами вредных сопротивлений являются силы трения между рамой и направляющими, в различных шарнирах (подшипниках) и т.д.

К внешним силам относятся также силы веса звеньев, которые могут быть силами движущими и силами сопротивления. Они являются силами движущими, когда центр тяжести звена опускается (в этом случае направление силы веса составляет с направлением скорости центра тяжести звена острый угол), или силами сопротивления, когда центр тяжести звена поднимается (в этом случае направление силы веса составляет с направлением скорости центра тяжести звена тупой угол). Наглядно это видно на примере движения автомашины. Когда автомашина поднимается в гору (рис. 5.2,а), сила веса является силой сопротивления. Когда машина спускается с горы (рис. 5.2,б), сила ее веса является движущей силой.

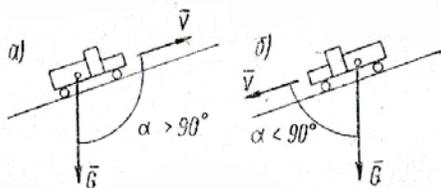


Рис. 5.2. К определению характера силы веса:

- а – сила веса – сила сопротивления;
- б – сила веса – движущая сила

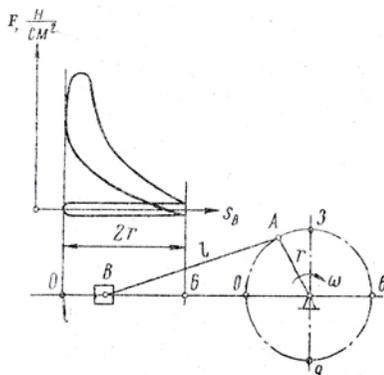


Рис. 5.3. Индикаторная диаграмма двигателя внутреннего сгорания

Внешние силы в зависимости от того, в какой машине они действуют, могут быть постоянными или переменными. Во многих машинах они изменяются с изменением положения механизма (например, давление газов на поршень двигателя внутреннего сгорания), в некоторых они зависят от

скорости (например, крутящий момент электродвигателя). Силы веса всегда являются постоянными силами.

Все внешние силы при силовом расчете должны быть известны. Поэтому они считаются заданными силами.

Если внешняя сила является переменной, то она обычно задается диаграммой. Например, на рис. 5.3 показаны индикаторная диаграмма четырёхтактного двигателя, по которой видно, как изменяется давление газов на поршень в зависимости от положения последнего.

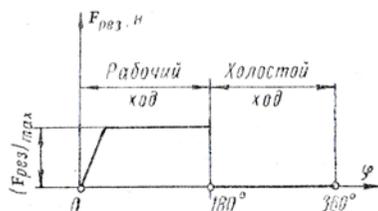


Рис. 5.4. Диаграмма сил полезных сопротивлений лесопильной рамы

На рис. 5.4 приведен пример изменения силы резания вертикальной лесопильной рамы в зависимости от угла поворота кривошипа. По заданным диаграммам легко определить величины внешних сил для того или иного положения механизма.

## 5.2. Силы инерции

Силовой расчет механизма основывается на принципе Даламбера, который заключается в следующем. Во время работы механизма его звенья в общем случае двигаются с ускорением, в результате чего, как известно, возникают силы инерции. Если условно приложить силы инерции к звеньям, то сумма всех сил, включая и силы инерции, приложенных к звеньям, равна нулю. Это позволяет к движущейся системе применить уравнения статики. Поэтому силовой расчет механизмов часто называют **кинетостатическим расчетом** или просто **кинетостатикой механизмов**.

Учет сил инерции особенно важен в современных быстроходных машинах, где они достигают больших величин.

Перейдем к определению сил инерции для различных случаев движения звеньев.

Напомним положения, известные из курса теоретической механики.

В общем случае плоскопараллельного движения звена ускорения его различных материальных точек различны (по величине и направлению).

Поэтому различны и элементарные силы инерции  $d\bar{F}_i = -\bar{a}_i dm_i$ , условно приложенные в этих точках (рис. 5.5). Эта система элементарных сил сводится к одной силе инерции  $\bar{F}_и$  и к одной паре сил инерции с моментом  $M_{и}$ , которые равны:

$$\bar{F}_и = -m\bar{a}_S ; \quad (5.1)$$

$$M_и = -I_S \varepsilon , \quad (5.2)$$

где  $m$  – масса звена;

$a_S$  – ускорение центра тяжести звена;

$\varepsilon$  – угловое ускорение звена;

$I_S$  – момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр тяжести.

Напомним, что момент инерции звена есть мера инертности звена во вращательном движении. Его величина зависит только от самого тела: от его массы и распределения массы (размеров и формы тела). Момент инерции звена в общем случае определяется формулой

$$J_S = \int_m \rho^2 dm ,$$

где  $\rho$  – расстояние каждой элементарной массы от оси, проходящей через центр тяжести  $S$ .

Интеграл следует брать по всей массе звена  $m$ .

Сила инерции  $\bar{F}_и$  приложена в центре тяжести звена  $S$  и направлена противоположно вектору ускорения центра тяжести  $\bar{a}_S$ .

Момент пары сил инерции направлен противоположно угловому ускорению звена  $\varepsilon$  (это показывают знаки «минус»).

Рассмотрим, к чему сводятся силы инерции при различных случаях движения звена.

1. Поступательное движение звена (рис. 5.6). При поступательном движении звена ускорения всех точек одинаковы, поэтому силу инерции можно выразить через ускорение любой точки звена:

$$\bar{F}_и = -m\bar{a}_S = -m\bar{a}_A = -m\bar{a}_B = \dots$$

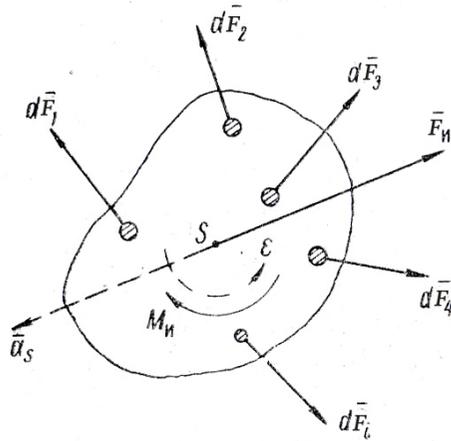


Рис. 5.5. К определению результирующей силы инерции  $F_и$  и момента сил инерции  $M_и$  в общем случае плоскопараллельного движения звена

Приложена сила инерции в центре тяжести. Момент сил инерции звена  $M_{и} = 0$ , так как при поступательном движении звена оно не имеет углового ускорения ( $\varepsilon = 0$ ).

2. Звено неравномерно ( $\varepsilon \neq 0$ ) вращается вокруг оси, проходящей через центр тяжести (рис. 5.7).

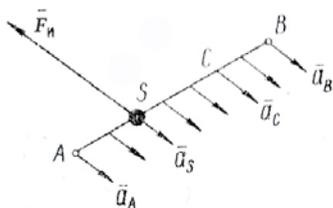


Рис. 5.6. Силы инерции при поступательном движении звена

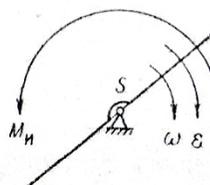


Рис. 5.7. Силы инерции при неравномерном вращении звена вокруг оси, проходящей через центр тяжести

Сила инерции в этом случае равна

$$F_{и} = 0 ,$$

так как ускорение центра тяжести  $a_S = 0$ .

Момент сил инерции равен

$$M_{и} = -I_S \varepsilon$$

и направлен противоположно угловому ускорению  $\varepsilon$ .

3. Звено равномерно ( $\varepsilon = 0$ ) вращается вокруг оси, не проходящей через центр тяжести (рис. 5.8).

В этом случае сила инерции

$$\vec{F}_{и} = -m \vec{a}_S ,$$

где

$$a_S = a_S^n = \omega^2 l_{OS} .$$

Направлена сила инерции противоположно ускорению центра тяжести, т.е. вдоль радиуса  $l_{OS}$  от центра  $O$ .

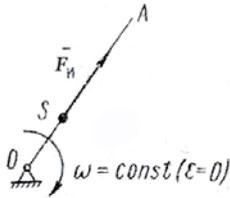


Рис. 5.8. Силы инерции при равномерном движении звена вокруг оси, не проходящей через центр тяжести

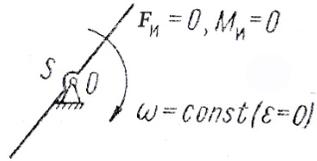


Рис. 5.9. Силы инерции при равномерном вращении звена вокруг оси, проходящей через центр тяжести

Момент сил инерции  $M_n = 0$ , так как угловое ускорение  $\varepsilon = 0$ .

4. Звено равномерно ( $\varepsilon = 0$ ) вращается вокруг оси, проходящей через центр тяжести (рис. 5.9).

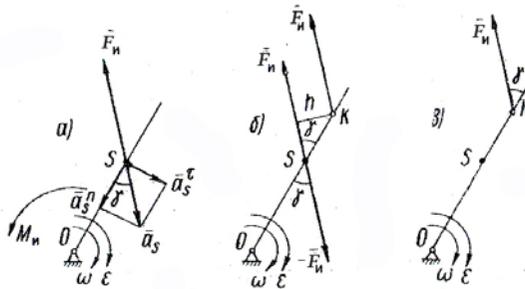


Рис. 5.10. Приведение силы инерции  $F_n$  и момента сил инерции  $M_n$  к одной силе в общем случае вращения звена вокруг неподвижной оси

В этом случае сила инерции  $F_n = 0$  (так как  $a_s = 0$ ) и момент сил инерции  $M_n = 0$  (так как  $\varepsilon = 0$ ).

Такое звено называется **уравновешенным**.

5. Звено неравномерно ( $\varepsilon \neq 0$ ) вращается вокруг оси, не проходящей через центр тяжести (рис. 5.10).

В этом случае возникает и сила инерции и момент сил инерции:

$$\begin{aligned}\overline{F}_и &= -m\overline{a}_S ; \\ M_и &= -I_S\varepsilon ,\end{aligned}$$

где  $\overline{a}_S = \overline{a}_S^n + \overline{a}_S^\tau$ ; по величине  $a_S$  равно  $a_S = l_{OS}\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$ .

Сила инерции  $\overline{F}_и$  приложена в центре тяжести и направлена противоположно ускорению центра тяжести  $\overline{a}_S$ . Момент пары сил инерции  $M_и$  направлен противоположно угловому ускорению  $\varepsilon$  (рис. 5.10,а).

Часто удобно силу инерции  $\overline{F}_и$  и момент инерции  $M_и$ , привести к одной равнодействующей силе  $\overline{F}_и$ . Для этого заменим момент  $M_и$  парой сил  $\overline{F}_и$  и  $-\overline{F}_и$ , момент которой равен

$$F_и h = M_и . \quad (5.3)$$

Силу  $-\overline{F}_и$  этой пары приложим в центре тяжести  $S$ . Тогда другая сила  $\overline{F}_и$  окажется приложенной в некоторой точке  $K$  звена (рис. 5.10,б). Силы  $\overline{F}_и$  и  $-\overline{F}_и$ , приложенные в центре тяжести, взаимно уравновешиваются, и, таким образом, остается только одна сила, приложенная в точке  $K$  звена (рис. 5.10,в). Эта точка называется **точкой качания**.

Таким образом, силу инерции  $\overline{F}_и$ , приложенную в центре тяжести  $S$ , и момент сил инерции  $M_и$  можно заменить одной силой  $\overline{F}_и$ , которая приложена в точке качания  $K$ . Момент сил инерции при этом автоматически учитывается.

Определим положение точки качания. Из уравнения (5.3) получаем, что плечо пары сил  $h$  равно

$$h = \frac{M_и}{F_и} = \frac{I_S\varepsilon}{ma_S} ,$$

но 
$$\varepsilon = \frac{a_S^\tau}{l_{OS}} ,$$

тогда 
$$h = \frac{I_S a_S^\tau}{m l_{OS} a_S} = \frac{I_S}{m l_{OS}} \sin \gamma .$$

Расстояние  $l_{SK}$  равно (см. рис. 5.10,б)

$$l_{SK} = \frac{h}{\sin \gamma} .$$

Тогда окончательно

$$l_{SK} = \frac{I_S}{ml_{OS}} . \quad (5.4)$$

Из формулы видно, что величина  $l_{SK}$  для данного звена является величиной постоянной (так как  $m$ ,  $I_S$  и  $l_{OS}$  величины постоянные), не зависящей от его положения. Поэтому приведением всех сил инерции к одной силе, приложенной в точке качания, очень удобно пользоваться, особенно когда исследование необходимо проводить для многих положений механизма. В этом случае нужно только один раз определить положение точки качания  $K$  и через нее всегда проводить силу инерции. При этом отпадает необходимость в определении момента сил инерции, так как он автоматически учитывается.

Необходимо отметить, что точка  $K$  всегда дальше от оси вращения, чем центр тяжести  $S$ .

#### 6. Общий случай плоскопараллельного движения звена.

Этот случай мы рассматривали в самом начале и видели, что силы инерции сводятся к силе  $\overline{F}_и$  и моменту силы  $M_и$ . Здесь так же, как и в предыдущем случае, силу  $\overline{F}_и$  и момент силы  $M_и$  можно привести к одной равнодействующей силе инерции  $\overline{F}_и$ . На рис. 5.11 показано звено  $AB$ , совершающее сложное плоскопараллельное движение. Точка  $S$  является центром тяжести звена.

Пусть задан план ускорений звена (рис. 5.11,б).

Сила инерции  $\overline{F}_и$  равна

$$\overline{F}_и = -m\overline{a}_S .$$

Сложное движение звена можно рассматривать состоящим из двух движений: из поступательного движения звена вместе с точкой  $A$  и вращательного движения звена относительно точки  $A$ . В соответствии с этим ускорение центра тяжести складывается из двух ускорений:

$$\overline{a}_S = \overline{a}_A + \overline{a}_{SA} .$$

Тогда сила инерции звена также складывается из двух сил инерции:

$$\overline{F}_и = -m\overline{a}_S = -m(\overline{a}_A + \overline{a}_{SA}) = -m\overline{a}_A - m\overline{a}_{SA}$$

силы инерции звена в поступательном движении с точкой  $A$

$$\overline{F}'_и = -m\overline{a}_A$$

и силы инерции во вращательном движении относительно точки  $A$

$$\overline{F}''_и = -m\overline{a}_{SA} .$$

Сила инерции звена в поступательном движении  $\overline{F}'_и$  проходит через центр тяжести и в соответствии с уравнением направлена противоположно ускорению  $\overline{a}_A$ . Сила инерции звена в относительном

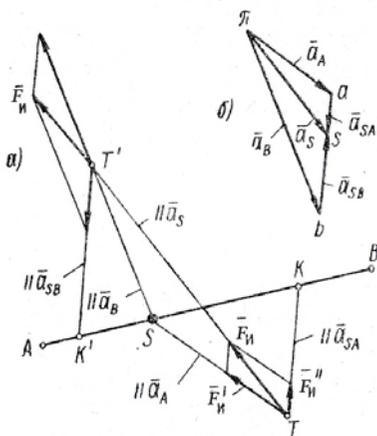


Рис. 5.11. Приведение силы инерции  $F_{и}$  и момента сил инерции  $M_{и}$  к одной силе в общем случае плоскопараллельного движения звена

5.11,а).

Необходимо отметить, что для определения силы  $\overline{F}'_и$  и точки ее приложения силы  $\overline{F}'_и$  и  $\overline{F}''_и$  находить не следует. Они даются здесь только для доказательства, что сила инерции  $\overline{F}'_и$  и момент сил инерции  $M_{и}$  приводятся к одной силе, приложенной в точке  $T$ . Для определения точки  $T$  следует только из центра тяжести  $S$  провести прямую, параллельную ускорению  $\overline{a}_A$ , а через точку качания  $K$  – прямую, параллельную ускорению  $\overline{a}_{SA}$ . Точка пересечения этих прямых и есть точка  $T$ , через которую проходит сила инерции  $\overline{P}_{и} = -m\overline{a}_S$ . Положение точки  $K$  для всех положений звена одинаково. Расстояние  $l_{SK}$  вычисляется по формуле, аналогичной формуле (5.4) (см. предыдущий случай):

$$l_{SK} = \frac{I_S}{ml_{AS}}. \quad (5.4a)$$

Точка  $K$  лежит от точки  $A$  дальше, чем центр тяжести  $S$ .

вращательном движении  $\overline{F}''_и$  при учете момента сил инерции  $M_{и}$  проходит через точку качания  $K$  (см. предыдущий случай) и направлена, как это следует из уравнения, противоположно ускорению  $\overline{a}_{SA}$ . Сила инерции при этом автоматически учитывается. Следовательно, сила инерции  $\overline{F}'_и$ , являясь суммой сил  $\overline{F}'_и$  и  $\overline{F}''_и$ , проходит через точку пересечения  $T$  линий действия этих сил и направлена противоположно ускорению центра тяжести  $\overline{a}_S$  (рис.

При определении точки приложения силы инерции мы рассматривали, что движение звена состоит из двух движений: из поступательного движения с точкой  $A$  и вращательного движения относительно точки  $A$ .

Движение звена можно рассматривать и иначе, например, что оно состоит из поступательного движения вместе с точкой  $B$  и вращательного движения относительно точки  $B$ . Соответственно положение точки  $T'$  приложения силы инерции  $\overline{F}_и$  будет иным, хотя определяется оно аналогично предыдущему. В этом случае нужно через центр тяжести  $S$  провести прямую, параллельную ускорению  $\overline{a}_B$ , а через точку  $K'$  – прямую, параллельную ускорению  $\overline{a}_{SB}$ . Точка пересечения этих прямых  $T'$  есть точка приложения силы инерции  $\overline{F}_и$ . Расстояние  $l_{SK'}$  определяется по аналогичной формуле:

$$l_{SK'} = \frac{I_S}{ml_{BS}}.$$

Точка  $K'$  лежит от точки  $B$  дальше, чем центр тяжести  $S$ ,

В обоих случаях линия действия силы  $\overline{F}_и$  одна и та же (см. рис. 5.11).

Таким образом, в качестве переносного движения может быть выбрано движение любой точки звена ( $A$  или  $B$ ), но уже дальнейшие вычисления и построения надо вести в соответствии с выбранной точкой.

Точка, движение которой выбрано в качестве переносного, называется **точкой подвеса**.

Отметим, что приведение силы инерции и момента силы к одной силе очень удобно, особенно когда исследование ведется для многих положений, так как не нужно каждый раз определять момент сил инерции. Нужно только один раз определить положение точки качания  $K$  и дальше вести построение, как указано.

### 5.3. Условие статической определенности кинематической цепи

Итак, нашей задачей является определение реакций в кинематических парах при заданном законе движения ведущего звена и при заданных внешних силах. Здесь, в самом задании, имеется противоречие, которое заключается в том, что закон движения ведущего звена зависит от действующих внешних сил, т.е. под действием заданных внешних сил ведущее звено не может двигаться по заданному закону. Для того чтобы оно все же двигалось по заданному закону, необходимо к ведущему звену, кроме внешних заданных сил, приложить так называемую уравновешивающую силу (или уравновешивающий момент), которая уравновешивает

все внешние силы и силы инерции. Определение уравнивающей силы или уравнивающего момента наряду с определением реакций в кинематических парах также является задачей силового исследования механизма.

Для осуществления силового расчета какой-нибудь кинематической цепи необходимо, чтобы она была статически определимой, т.е. чтобы число уравнений, которые можно составить для этой кинематической цепи, было равно числу неизвестных.

Сила характеризуется тремя параметрами: величиной, направлением

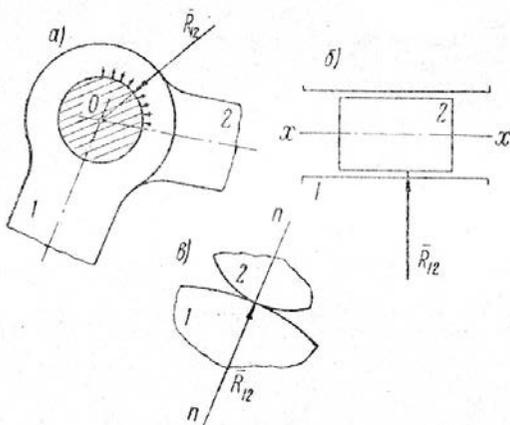


Рис. 5.12. Направление сил реакций в различных плоских кинематических парах: а – вращательная кинематическая пара; б – поступательная кинематическая пара; в – высшая кинематическая пара

и точкой приложения. Поэтому во вращательной кинематической паре (рис. 5.12,а) каждая элементарная сила взаимодействия между звеньями (звеньями) при отсутствии трения всегда направлены по нормали к соприкасающимся поверхностям. Поэтому во вращательной кинематической паре (рис. 5.12,а) каждая элементарная сила взаимодействия между звеньями, образующими пару, будет проходить через центр шарнира (точку  $O$ ).

Следовательно, и равнодействующая  $\bar{R}_{12}$  (т.е. реакция) будет проходить через эту точку. Величина и направление этой силы нам неизвестны, они зависят от внешних сил. Таким образом, во вращательной кинематической паре известна только точка приложения и неизвестны величина и направление (одно известное и два неизвестных).

В поступательной кинематической паре (рис. 5.12,б) реакция  $\bar{R}_{12}$  известна только по направлению (она направлена, если пренебречь трением, перпендикулярно оси относительного движения звеньев  $xx$ ). Ни величина

и точкой приложения. Рассмотрим, какие из этих параметров являются известными и какие – неизвестными для этих реакций в различных плоских кинематических парах.

Силы реакции (силы взаимодействия) между двумя соприкасающимися телами (звеньями) при отсутствии трения всегда направлены по нормали к соприкасающимся поверхностям. Поэтому во вращательной кинематической паре (рис. 5.12,а) каждая элементарная сила взаимодействия между звеньями (звеньями) при отсутствии трения всегда направлены по нормали к соприкасающимся поверхностям. Поэтому во вращательной кинематической паре (рис. 5.12,а) каждая элементарная сила взаимодействия между звеньями, образующими пару, будет проходить через центр шарнира (точку  $O$ ).

реакции, ни точка ее приложения неизвестны (здесь также одно известное и два неизвестных).

В высшей кинематической паре 2-го класса (рис. 5.12, в) реакция  $\bar{R}_{12}$  направлена по общей нормали  $mn$  (при отсутствии трения) в точке касания звеньев. Поэтому в такой кинематической паре известны точка приложения и направление силы реакции. Неизвестной является ее величина (два известных, одно неизвестное).

Таким образом, кинематические пары 1-го класса дают два неизвестных, а кинематические пары 2-го класса — одно неизвестное.

Пусть кинематическая цепь состоит из  $n$  звеньев, соединенных и  $p_1$  пар 1-го класса и  $p_2$  пар 2-го класса. Тогда для такой кинематической цепи количество неизвестных параметров будет равно

$$2p_1 + p_2 .$$

Для каждого звена плоской кинематической цепи, как известно из теоретической механики, можно составить три уравнения статики. Тогда для всей кинематической цепи можно составить  $3n$  уравнений.

Кинематическая цепь будет статически определимой, если число неизвестных равно числу уравнений, т.е. если

$$2p_1 + p_2 = 3n$$

или

$$3n - 2p_1 - p_2 = 0 .$$

Выражение, стоящее в левой части равенства, показывает количество степеней подвижности плоской кинематической цепи (см. формулу Чебышева, раздел 1, пункт 1.4).

Следовательно, статически определимыми являются кинематические цепи с нулевой степенью подвижности. В механизмах, в состав которых входят только кинематические пары 1-го класса, такими цепями являются группы Ассура (см. раздел 1, пункт 1.6). Следовательно, группы Ассура являются статически определимыми.

Силовой расчет механизма ведется в порядке, обратном кинематическому исследованию, т.е. сначала ведется расчет последней присоединенной группы Ассура, затем предыдущей и т.д., и, наконец, ведется силовой расчет ведущего звена (кривошипа).

Перейдем к силовому расчету групп Ассура.

#### 5.4. Силовой расчет группы Ассура I класса 1-го вида

При силовом расчете группы Ассура следует ее отсоединить от механизма. Такая группа Ассура (звенья 2 и 3) изображена на рис. 5.13,а. Пусть на звенья 2 и 3 группы действуют соответственно силы  $\bar{F}_2$  и  $\bar{F}_3$

(включая и силы инерции) и моменты сил  $M_2$  и  $M_3$  (сил и моментов, действующих на каждое звено, может быть несколько, однако все они являются известными и поэтому принципиального значения при исследовании это не имеет). Пунктиром на рисунке изображены звенья 1 и 4, к которым группа Ассур была присоединена в механизме. Требуется определить реакции в кинематических парах 1—2, 2—3, 3—4.

Отсоединив группу Ассур от звеньев 1 и 4, прикладываем в точках А и С силы  $\bar{R}_{12}$  и  $\bar{R}_{43}$  (в произвольном направлении), которыми эти звенья воздействуют соответственно на звенья 2 и 3. Эти силы есть реакции в кинематических парах 1—2 и 3—4. Условимся здесь и в дальнейшем силу реакции в кинематической паре обозначать двумя цифрами, соответствующими номерам звеньев кинематической пары. При этом первая цифра должна означать звено, со стороны которого действует сила, а вторая цифра — звено, на которое действует сила. Например, реакция  $\bar{R}_{12}$  — это сила, с которой звено 1 действует на звено 2, а реакция  $\bar{R}_{21}$  — сила, с которой звено 2 действует на звено 1.

Напомним, что сила действия равна силе противодействия, поэтому силы  $\bar{R}_{12}$  и  $\bar{R}_{21}$  равны по величине, но направлены в противоположные стороны:

$$\bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12} .$$

Определение реакций в кинематических парах группы Ассур ведем следующим образом.

1. Раскладываем реакции  $\bar{R}_{12}$  и  $\bar{R}_{43}$  каждую на нормальную составляющую, направленную вдоль соответствующего звена, и касательную, направленную перпендикулярно звену (см.рис. 5.13,а):

$$\bar{R}_{12} = \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^\tau ;$$

$$\bar{R}_{43} = \bar{R}_{43}^n + \bar{R}_{43}^\tau .$$

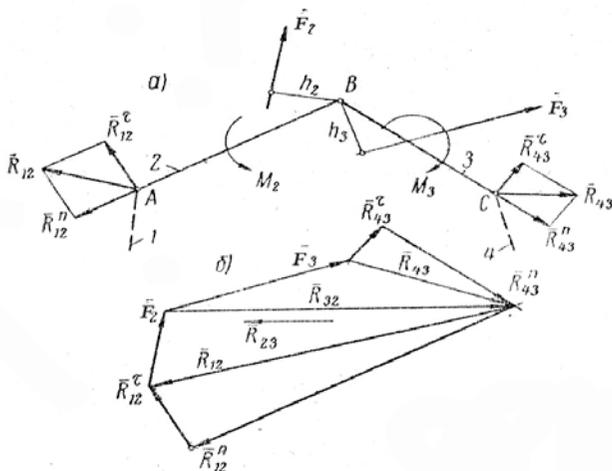


Рис. 5.13. К силовому расчету группы Ассур I класса I-го вида

2. Определяем величины касательных составляющих реакций, для чего составляем для каждого звена уравнение моментов относительно точки  $B$ .

Для звена 2

$$R_{12}^{\tau} l_{AB} + F_2 l_{h_2} - M_2 = 0,$$

откуда

$$R_{12}^{\tau} = \frac{M_2 - F_2 l_{h_2}}{l_{AB}}.$$

Для звена 3

$$R_{43}^{\tau} l_{AB} + F_3 l_{h_3} - M_3 = 0,$$

откуда

$$R_{43}^{\tau} = \frac{M_3 - F_3 l_{h_3}}{l_{AB}}.$$

Истинные величины плеч  $l_{h_2}$  и  $l_{h_3}$  определяются по формулам:

$$l_{h_2} = [h_2] \mu_l, \quad l_{h_3} = [h_3] \mu_l,$$

где  $[h_2]$  и  $[h_3]$  - масштабные величины плеч, измеряемые на чертеже, мм;  
 $\mu_l$  - масштаб линейных величин на чертеже.

Если моменты  $M_2$  и  $M_3$  на звенья не действуют, то вместо действительных плеч  $l_{h_2}$ ,  $l_{h_3}$ ,  $l_{AB}$  и  $l_{BC}$  можно брать их масштабные величины  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $AB$  и  $BC$ , так как масштаб  $\mu_l$  в этом случае сокращается.

При вычислении касательная составляющая может оказаться отрицательной. Это значит, что в действительности она направлена в противоположную сторону (мы реакции на расчетной схеме направляли произвольно).

3. Сумма всех сил, действующих на группу Ассур (включая силы инерции), равна нулю:

$$\overline{R}_{12} + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{R}_{43} = 0$$

или

$$\overline{R}_{12}^n + \overline{R}_{12}^r + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{R}_{43}^n + \overline{R}_{43}^r = 0 .$$

В этом уравнении два вектора  $\overline{R}_{12}^n$  и  $\overline{R}_{43}^n$  известны только по направлению (они подчеркнуты одной чертой), остальные векторы известны полностью (они подчеркнуты двумя чертами). Следовательно, уравнение решается.

В соответствии с последним векторным уравнением строим так называемый план сил (рис. 5.15,б). Для этого в выбранном масштабе из произвольной точки откладываем последовательно все известные векторы  $\overline{R}_{12}^r$ ,  $\overline{P}_2$ ,  $\overline{P}_3$ ,  $\overline{R}_{43}^r$  (см. уравнение). Через начало вектора  $\overline{R}_{12}^r$  проводим направление вектора  $\overline{R}_{12}^n$  (параллельно звену 2), а через конец вектора  $\overline{R}_{43}^r$  - направление вектора  $\overline{R}_{43}^n$  (параллельно звену 3). Пересечение этих направлений определяет величины отрезков, изображающих в выбранном масштабе векторы  $\overline{R}_{12}^n$  и  $\overline{R}_{43}^n$ . Направление этих векторов должно быть таким, чтобы при обходе контура плана сил все силы были направлены в направлении обхода. Далее, складывая на плане сил векторы  $\overline{R}_{12}^n$  и  $\overline{R}_{12}^r$  (т.е. соединим начало вектора  $\overline{R}_{12}^n$  с концом вектора  $\overline{R}_{12}^r$ ), получим полную реакцию  $\overline{R}_{12}$ . Складывая векторы  $\overline{R}_{43}^r$  и  $\overline{R}_{43}^n$  (т.е. соединяя начало вектора  $\overline{R}_{43}^r$  с концом вектора  $\overline{R}_{43}^n$ ), получим полную реакцию  $\overline{R}_{43}$ .

4. Определяем реакцию в кинематической паре 2—3. Для этого мысленно отбрасываем звено 3 и в точке  $B$  к звену 2 прикладываем реакцию, действующую со стороны звена 3— $\overline{R}_{32}$ . Сумма сил, действующих на каждое звено, равна нулю. Равна нулю и сумма сил, действующих на звено 2:

$$\overline{R}_{12} + \overline{F}_2 + \overline{R}_{32} = 0 .$$

В соответствии с этим векторным уравнением соединяем на плане сил конец вектора  $\overline{F}_2$  с началом вектора  $\overline{R}_{12}$ . Этот отрезок в масштабе будет изображать реакцию  $\overline{R}_{32}$ . Направление вектора  $\overline{R}_{32}$  определяется векторным уравнением (сумма сил равна нулю).

Величины сил реакций после построения плана сил определяются обычным образом — умножением величин соответствующих отрезков на масштаб сил  $\mu_p$ .

Следует отметить, что для того чтобы реакцию в промежуточной кинематической паре 2—3 получить непосредственно на основном плане сил, следует при построении плана сил откладывать сначала силы, действующие на одно звено, затем силы, действующие на другое звено. В противном случае для получения реакции  $\overline{R}_{32}$  (или  $\overline{R}_{23}$ ) нужно будет строить дополнительный план сил.

### 5.5. Силовой расчет группы Ассура I класса 2-го вида

Пусть на звенья 2 и 3 группы Ассура I класса 2-го вида действуют соответственно силы  $\overline{F}_2$  и  $\overline{F}_3$  и моменты сил  $M_2$  и  $M_3$  (рис. 5.14,а).

Определение реакций в кинематических парах ведем следующим образом.

1. Прикладываем в точке А звена 2 реакцию  $\overline{R}_{12}$  со стороны звена 1 (в произвольном направлении) и раскладываем ее на две составляющие — на касательную  $\overline{R}_{12}^r$ , направленную перпендикулярно звену 2, и нормальную  $\overline{R}_{12}^n$ , направленную вдоль звена 2:

$$\overline{R}_{12} = \overline{R}_{12}^n + \overline{R}_{12}^r .$$

К звену 3 перпендикулярно направлению хх относительного движения звеньев 3 и 4 прикладываем реакцию  $\overline{R}_{43}$  со стороны звена 4. Точку приложения реакции  $\overline{R}_{43}$  выбираем произвольно (она неизвестна).

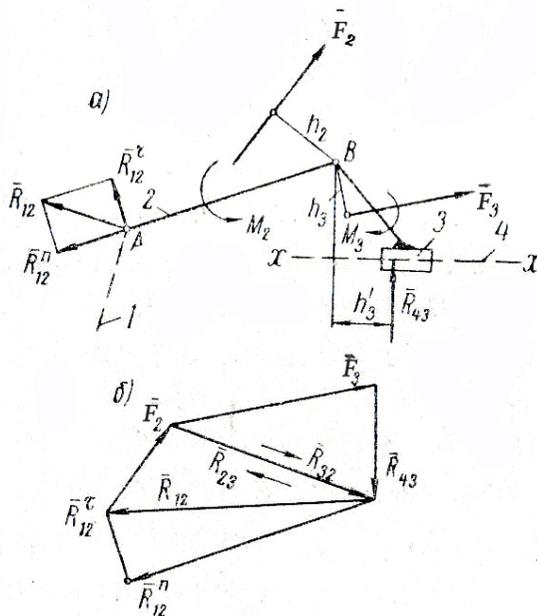


Рис. 5.14. К силовому расчету группы Ассур I класса 2-го вида

2. Определяем величину касательной составляющей реакции  $\bar{R}_{12}^{\tau}$ , для чего составляем для звена 2 уравнение моментов сил относительно точки B:

$$\bar{R}_{12}^{\tau} l_{AB} + F_2 l_{h_2} - M_2 = 0 ,$$

откуда

$$\bar{R}_{12}^{\tau} = \frac{M_2 - F_2 l_{h_2}}{l_{AB}}$$

(порядок определения плеча  $l_{h_2}$  смотри в предыдущем пункте).

3. Сумма всех сил (включая и силы инерции), действующих на группу Ассур, равна нулю:

$$\bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} = 0$$

или

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^{\tau} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43}^n + \bar{R}_{43}^{\tau} = 0 .$$

В этом уравнении два вектора  $\overline{R}_{12}^n$  и  $\overline{R}_{43}^n$  известны только по направлению (они подчеркнуты одной чертой), остальные векторы известны полностью (они подчеркнуты двумя чертами). Следовательно, уравнение решается.

В соответствии с этим уравнением строим в выбранном масштабе план сил (рис. 5.14,б). Для этого в масштабе из произвольной точки последовательно откладываем все известные векторы  $\overline{R}_{12}^r, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ . Далее (в соответствии с уравнением), через начало вектора  $\overline{R}_{12}^r$ , проводим направление вектора  $\overline{R}_{12}^n$  (параллельно звену 2), а через конец вектора  $\overline{F}_3$  — направление вектора  $\overline{R}_{43}$  (перпендикулярно  $xx$ ). Пересечение этих направлений определяет величины отрезков, изображающих в выбранном масштабе векторы  $\overline{R}_{12}^n$  и  $\overline{R}_{43}$ . Направление этих векторов должно быть таким, чтобы при обходе контура плана сил все силы были направлены в направлении обхода контура (сумма всех сил равна нулю).

Далее, складывая на плане силы  $\overline{R}_{12}^n$  и  $\overline{R}_{12}^r$  (т.е. соединяя начало вектора  $\overline{R}_{12}^n$  с концом вектора  $\overline{R}_{12}^r$ ), получим полную реакцию  $\overline{R}_{12}$ .

4. Определяем реакцию в промежуточной кинематической паре 2—3. Для этого мысленно отбрасываем звено 3 и в точке  $B$  к звену 2 прикладываем реакцию, действующую со стороны звена 3— $\overline{R}_{32}$ . Сумма сил, действующих на звено 2, равна нулю, т.е.

$$\underline{\underline{\overline{R}_{12}}} + \underline{\underline{F_2}} + \underline{\underline{R_{32}}} = 0 .$$

В соответствии с этим векторным уравнением соединяем на плане сил конец вектора  $\overline{F}_2$  с началом вектора  $\overline{R}_{12}$ . Этот отрезок будет в масштабе изображать искомую реакцию  $\overline{R}_{32}$ . Направление вектора легко определяется по векторному уравнению (сумма сил равна нулю).

5. Определяем точку приложения реакции  $\overline{R}_{43}$ . Для этого достаточно определить расстояние  $l_{h'_3}$  линии действия силы  $\overline{R}_{43}$  от точки  $B$ . Составляем уравнение моментов относительно точки  $B$  для звена 3.

При этом нужно учесть действительное направление реакции  $\overline{R}_{43}$ . Она направлена не вверх, как указано на схеме группы Ассура (когда составляли схему, мы не знали истинного направления реакции), а вниз, как получилось на плане сил. Тогда

$$-R_{43}l_{h'_3} + F_3l_{h_3} - M_3 = 0,$$

откуда

$$l_{h'_3} = \frac{F_3l_{h_3} - M_3}{R_{43}}.$$

### 5.6. Порядок силового расчета групп Ассура I класса, 3, 4 и 5-го видов

Подробное решение задач об определении реакций в группах Ассура I класса 3, 4 и 5-го видов приводить не будем. Укажем лишь порядок и последовательность решения.

**Группа Ассура I класса 3-го вида** (рис. 5.15), Решение ведем в следующей последовательности,

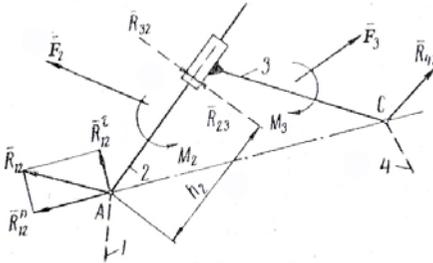


Рис. 5.15. К силовому расчету группы Ассура I класса 3-го вида

1. Раскладываем реакцию  $\bar{R}_{12}$  на две составляющие: касательную  $\bar{R}_{12}^{\tau}$ , перпендикулярную линии AC, и нормальную  $\bar{R}_{12}^n$  — вдоль линии AC:

$$\bar{R}_{12} = \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^{\tau}.$$

2. Составляем уравнение моментов для звеньев 2 и 3 относительно точки C:

$$\sum (M_c)_{зв.2-3} = 0,$$

откуда определяем величину касательной составляющей  $\bar{R}_{12}^{\tau}$ .

3. Составляем векторное уравнение сил для звена 2:

$$\sum \bar{F}_{зв.2} = 0.$$

Строя по этому уравнению план сил, находим реакции

$$\bar{R}_{12}^n, \bar{R}_{12}, \bar{R}_{32}.$$

4. Составляем уравнение моментов относительно точки A для звена 2:

$$\sum (M_A)_{зв.2} = 0,$$

откуда находим величину  $l_{h_2}$  определяющую точку приложения реакции  $\bar{R}_{32}$ .

5. Составляем векторное уравнение для сил, действующих на звенья 2 и 3:

$$\sum \bar{F}_{зв.2-3} = 0 .$$

Строя по этому уравнению план сил, определяем реакцию  $\bar{R}_{43}$ .

**Группа Ассура I класса 4-го вида** (рис. 5.16). Определение реакций в кинематических парах ведем в такой последовательности.

1. Составляем векторное уравнение для сил, действующих на оба звена 2 и 5 группы Ассура:

$$\sum \bar{F}_{зв.2-3} = 0 .$$

Строя по этому уравнению план сил, определяем реакции  $\bar{R}_{12}$  и  $\bar{R}_{43}$  (направления их известны).

2. Составляем векторное уравнение сил для звена 2:

$$\sum \bar{F}_{зв.2} = 0 ,$$

по которому на плане сил находим реакцию  $\bar{R}_{32}$ .

3. Составляем уравнение моментов сил для звена 2 относительно точки A:

$$\sum (M_A)_{зв.2} = 0 ,$$

откуда определяем величину плеча  $l_{h_2}$ , характеризующего положение линии действия силы  $\bar{R}_{12}$ .

4. Составляем уравнение моментов сил для звена 3 относительно точки A:

$$\sum (M_A)_{зв.3} = 0 ,$$

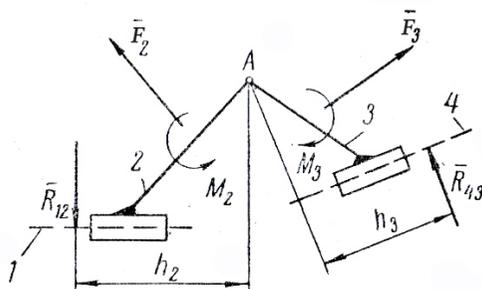


Рис. 5.16. К силовому расчету группы Ассура I класса 4-го вида

откуда определяем величину плеча  $l_{h_3}$ , характеризующего положение линии действия силы  $\bar{R}_{43}$ .

**Группа Ассура I класса 5-го вида** (рис. 5.17). Определение реакций в кинематических парах ведем в такой последовательности.

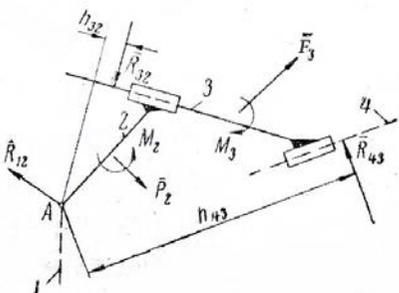


Рис. 5.17. К силовому расчету группы Ассура I класса 5-го вида

1. Составляем векторное уравнение для сил, действующих на звено 3:

$$\sum \bar{F}_{зв.3} = 0 .$$

Строя по этому уравнению план сил, определяем реакции  $\bar{R}_{23}$  и  $\bar{R}_{43}$  (направление этих реакций известно).

2. Составляем векторное уравнение сил для звена 2.

$$\sum \bar{F}_{зв.2} = 0 .$$

Строя по этому уравнению план сил, определяем реакцию  $\bar{R}_{12}$ .

3. Составляем уравнение моментов сил, действующих на звено 2, относительно точки A:

$$\sum (M_A)_{зв.2} = 0 ,$$

из которого определяем плечо  $l_{h_{32}}$ , характеризующее положение линии действия силы  $\bar{R}_{32}$ .

4. Составляем уравнение моментов сил, действующих на оба звена 2 и 3, относительно точки A

$$\sum (M_A)_{зв.2-3} = 0 ,$$

из которого определяем плечо  $l_{h_{43}}$ , характеризующее положение линии действия силы  $\bar{R}_{43}$ .

### 5.7. Силовой расчет кривошипа (ведущего звена)

После расчета всех групп Ассура, входящих в состав механизма, переходим к расчету ведущего звена (кривошипа).

Пусть на ведущее звено (рис. 5.18) действуют заданные силы  $\bar{F}_1$  и момент  $M_1$  (включая и силы инерции). Кроме того, на ведущее звено в

в точке  $A$  действует реакция  $\overline{R}_{21}$  со стороны звена 2 группы Ассура, присоединенной к ведущему звену. Эта реакция уже известна. Она равна по величине, но направлена в противоположную сторону реакции  $\overline{R}_{12}$ , определенной при расчете группы Ассура,

$$\overline{R}_{21} = -\overline{R}_{12}.$$

В точке  $O$  кривошипа действует реакция  $\overline{R}_{01}$  со стороны стойки. Эту реакцию требуется определить.

Ведущее звено, как уже указывалось, статически неопределимо. Действительно, для него можно составить три уравнения статики, а неизвестных всего два

— величина и направление реакции  $\overline{R}_{01}$ . Поэтому под действием приложенных сил ведущее звено не будет находиться в равновесии. Для равновесия к нему необходимо приложить уравновешивающую силу  $\overline{F}_{ур}$  (рис. 5.19) или уравновешивающий момент  $M_{ур}$  (см. рис. 5.18).

Что действует на ведущее звено — сила  $\overline{F}_{ур}$  или момент  $M_{ур}$  — должно быть задано. Если действует сила, то также должно быть задано положение линии ее действия. Например, если коленчатый вал двигателя соединяется с валом рабочей машины муфтой, то к валу двигателя приложен момент  $M$ ; если вал двигателя соединяется с валом рабочей машины при помощи зубчатой передачи, то к валу двигателя приложена сила, которая действует по линии зацепления, и т.д. В зависимости от того, что действует — сила (и как она приложена) или момент — реакция  $\overline{R}_{01}$  в кинематической паре  $O-I$  будет различна.

Уравновешивающая сила или уравновешивающий мо-

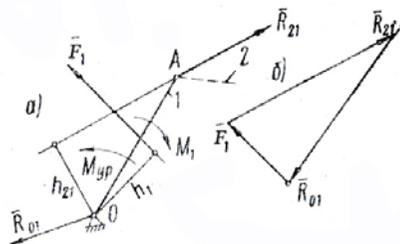


Рис. 5.18. К силовому расчету ведущего звена в случае, когда к нему приложен уравновешивающий момент

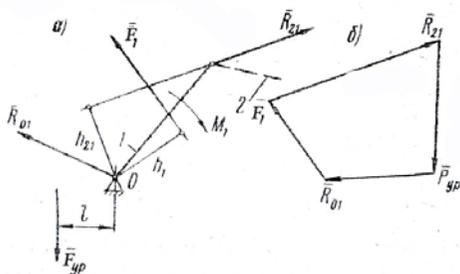


Рис. 5.19. К силовому расчету ведущего звена в случае, когда к нему приложена уравновешивающая сила

мент, как уже указывалось (см. пункт 5.3), является такой силой или моментом, который должен быть приложен к ведущему звену, чтобы механизм двигался по заданному закону (обычно движение ведущего звена задается равномерным). Однако реальная сила, приложенная к ведущему звену, отличается от уравнивающей силы (или уравнивающего момента), поэтому в действительности движение ведущего звена будет отличаться от заданного. Об этом речь пойдет ниже, в разделе 6.

Рассмотрим два случая:

а) когда на ведущее звено действует уравнивающий момент  $M_{yp}$ ;

б) когда на ведущее звено действует уравнивающая сила  $\overline{F}_{yp}$ .

**Случай первый.** На ведущее звено действуют известные заданные внешние силы  $\overline{F}_1$  и момент  $M_1$ . Требуется определить уравнивающий момент  $M_{yp}$  и реакцию  $\overline{R}_{01}$  (рис. 5.18,а).

Расчеты ведем следующим образом.

1. Составляем уравнение моментов относительно точки  $O$  и определяем величину уравнивающего момента  $M_{yp}$ :

$$F_1 l_{h_1} - R_{21} l_{h_{21}} - M_1 + M_{yp} = 0 ,$$

откуда

$$M_{yp} = M_1 + R_{21} l_{h_{21}} - F_1 l_{h_1} .$$

2. Составляем векторное уравнение для сил, действующих на ведущее звено:

$$\underline{\overline{F}}_1 + \underline{\overline{R}}_{21} + \underline{\overline{R}}_{01} = 0 .$$

В соответствии с этим уравнением в масштабе откладываем последовательно известные векторы  $\overline{F}_1$ , и  $\overline{R}_{21}$  (рис. 5.19,б). Замыкающий вектор, соединяющий конец вектора  $\overline{R}_{21}$  с началом вектора  $\overline{F}_1$ , есть искомый вектор  $\overline{R}_{01}$ .

**Случай второй.** Если на кривошип действует уравнивающая сила  $\overline{F}_{yp}$  (например, в вертикальном направлении на заданном расстоянии  $l$  от оси вращения ведущего звена), то расчеты ведем следующим образом (рис. 5.19,а).

1. Составляем уравнение моментов относительно точки  $O$  и определяем величину уравнивающей силы:

$$F_{yp} l - R_{21} l_{h_{21}} - M_1 + F_1 l_{h_1} = 0 ,$$

откуда

$$F_{yp} = \frac{R_{21}l_{h_{21}} + M_1 - F_1l_{h_1}}{l}.$$

2. Составляем векторное уравнение для сил, действующих на ведущее звено:

$$\underline{\underline{\vec{F}_1}} + \underline{\underline{\vec{R}_{21}}} + \underline{\underline{\vec{F}_{yp}}} + \underline{\underline{\vec{R}_{01}}} = 0.$$

В соответствии с этим уравнением откладываем в масштабе последовательно известные векторы  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{R}_{21}$  и  $\vec{F}_{yp}$  (рис. 5.19,б). Замыкающий вектор, соединяющий конец вектора  $\vec{F}_{yp}$  с началом вектора  $\vec{F}_1$ , есть искомый вектор  $\vec{R}_{01}$ .

### 5.8. Теорема Н. Е. Жуковского о «жестком рычаге»

Уравновешивающая сила или уравновешивающий момент могут быть легко определены при помощи теоремы Н.Е.Жуковского о «жестком рычаге».

Пусть на точку А какого-либо звена, движущуюся со скоростью  $\vec{v}_A$ , действует сила  $\vec{F}$  (рис. 5.20,а),

Элементарная работа силы  $\vec{F}$  равна

$$dA = F ds_A \cos \alpha,$$

а мгновенная мощность этой силы равна

$$N = F v_A \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между направлением силы  $\vec{F}$  и направлением вектора скорости  $\vec{v}_A$ .

Повернем вектор скорости  $\vec{v}_A$  на  $90^\circ$  (в любом направлении) и перенесем силу параллельно самой себе в конец этого вектора (в точку а) (рис. 5.20,б). Момент силы  $\vec{F}$  относительно начала вектора  $\vec{v}_A$  (точки р), как это видно из рисунка, равен

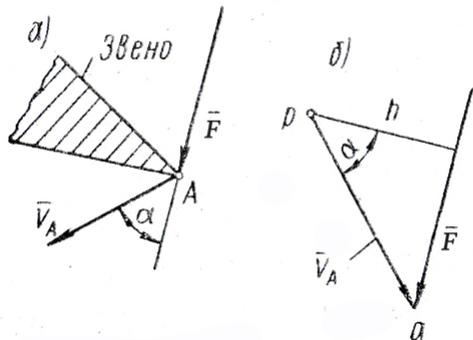


Рис. 5.20. К теореме Жуковского

$$M = Fh = F[pa] \cos \alpha .$$

Сравнивая равенства, видим, что момент силы, действующей на некоторую точку (точку  $A$ ) звена, перенесенной параллельно самой себе в одноименную точку (точку  $a$ ) повернутого на  $90^\circ$  плана скоростей этой точки, относительно полюса плана, пропорционален мощности этой силы.

Это справедливо для любой силы.

Из теоретической механики известно, что если система (механизм) под действием сил находится в равновесии, то сумма элементарных работ или мощностей этих сил равна нулю. Следовательно, равна нулю и сумма моментов сил относительно полюса повернутого плана скоростей (так как моменты пропорциональны силам).

Если механизм не находится в равновесии, то, приложив силы инерции и уравнивающую силу (или уравнивающий момент), можно рассматривать его находящимся в равновесии. Следовательно, *сумма моментов всех сил, действующих на механизм, включая и силы инерции, перенесенных параллельно самим себе в одноименные точки повернутого на  $90^\circ$  плана скоростей, относительно полюса плана, равна нулю.*

Таким образом, план скоростей рассматривается как жесткий рычаг, шарнирно закрепленный в полюсе и находящийся под действием сил в равновесии. Эта теорема носит имя ее автора Н.Е. Жуковского и называется теоремой о «жестком рычаге».

По теореме Жуковского легко можно определить уравнивающую силу  $\overline{F}_{ур}$  или уравнивающий момент  $M_{ур}$ , не определяя реакций в кинематических парах механизма.

Рассмотрим пример. Пусть требуется определить уравнивающую силу  $\overline{F}_{ур}$  для механизма, на звенья 2 и 3 которого действуют си-

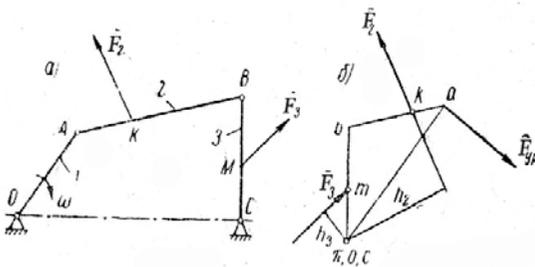


Рис. 5.21. К примеру на теорему Жуковского

лы  $\overline{F}_2$  и  $\overline{F}_3$  (включающие и силы инерции). Уравнивающая сила приложена в точке  $A$  и направлена перпендикулярно кривошипу (рис. 5,21,а).

Решение ведем в такой последовательности.

1. Строим в произвольном масштабе повернутый план скоростей механизма. Неко-

торые при этом строят сначала обычный план скоростей, затем поворачивают его на  $90^\circ$  — это усложняет построение. Поэтому рекомендуется строить сразу повернутый план скоростей;

План скоростей строим по векторному уравнению

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} .$$

В действительности векторы скоростей в этом уравнении направлены следующим образом:

$$\vec{v}_B \perp \overline{BC}, \quad \vec{v}_A \perp \overline{OA}, \quad \vec{v}_{BA} \perp \overline{AB} .$$

Строя повернутый план скоростей, следует направить эти векторы перпендикулярно соответствующим звеньям, а параллельно:

$$\vec{v}_B \parallel \overline{BC}, \quad \vec{v}_A \parallel \overline{OA}, \quad \vec{v}_{BA} \parallel \overline{AB} .$$

Повернутый план скоростей построен на рис. 5.21,б

2. По теореме подобия находим на плане скоростей точки  $k$  и  $m$  — точки, одноименные точкам  $K$  и  $M$  механизма, в которых приложены силы  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$ .

3. Переносим параллельно самим себе в точки  $k$  и  $m$  соответственно силы  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$ . В точке  $a$  плана скоростей перпендикулярно кривошипу  $OA$  (так задано) или перпендикулярно отрезку  $[pa]$  плана скоростей прикладываем уравнивающую силу  $\vec{F}_{yp}$ .

Составляем уравнение моментов сил относительно полюса  $p$  плана скоростей:

$$F_{yp} [pa] - F_2 h_2 + F_3 h_3 = 0 ,$$

откуда

$$F_{yp} = \frac{F_2 h_2 - F_3 h_3}{[pa]} .$$

Отрезки (плечи сил)  $h_2, h_3$  измеряются по чертежу ( $mm$ ).

Если на звенья действуют моменты, то их следует представить как пару сил, вычислив их величины и приложив в соответствующих точках. Например, если на звено 2 действует момент  $M_2$ , то его представляем как пару сил  $\vec{F}'_1$  и  $-\vec{F}'_1$ , приложенных в точках  $A$  и  $B$  (рис. 5.21). Величины этих сил определяем по формуле

$$F' = \frac{M_2}{l_{AB}} .$$

Аналогично следует поступить, если задано, что на ведущее звено действует уравнивающий момент  $M_{yp}$ . Его тогда следует представить как пару сил, приложенных в точках  $O$  и  $A$ .

## Раздел 6. ДВИЖЕНИЕ МЕХАНИЗМА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЗАДАННЫХ СИЛ

### 6.1. Общие положения

До сих пор мы рассматривали движение механизма вне зависимости от действующих на него сил и считали, что ведущее звено механизма движется равномерно. Однако, как известно из теоретической механики, закон движения тела или системы зависит от действующих на них сил и моментов сил и от масс и моментов инерции тел.

Соответственно и закон движения механизма также зависит от сил и моментов сил, действующих на его звенья, и от масс и моментов инерции звеньев.

Для установления закона движения механизма достаточно установить закон движения одного ведущего звена, так как, зная закон его движения, всегда можно обычными способами кинематики определить закон движения других звеньев и точек механизма.

Таким образом, задачей настоящей главы является определение истинного закона движения ведущего звена механизма под действием заданных сил и моментов сил.

Для решения этой задачи можно воспользоваться известным из теоретической механики законом живых сил, который гласит: *изменение кинетической энергии системы  $\Delta E$  за некоторый промежуток времени равно работе всех сил  $F$ , приложенных к системе за этот же промежуток времени:*

$$\Delta E = F. \quad (6.1)$$

Учитывая, что  $\Delta E$  есть разность кинетических энергий системы в конце и начале периода, уравнение (6.1) можно записать следующим образом:

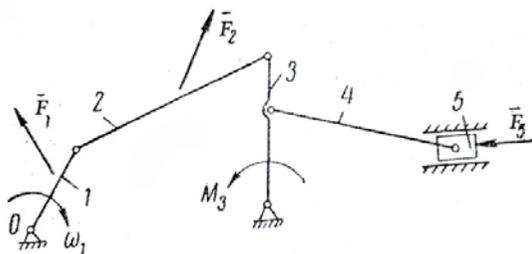


Рис. 6.1. Сложный механизм, на звенья которого действуют различные силы и моменты сил

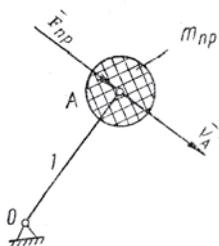
$$E_1 - E_0 = F, \quad (6.1a)$$

где  $E_1$  – кинетическая энергия механизма в конце периода;  $E_0$  – кинетическая энергия механизма в начале периода.

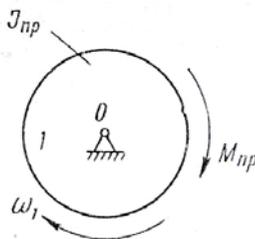
Пользоваться уравнением (6.1a) в общем случае очень сложно, так как механизм имеет много звеньев с различными массами

и моментами инерции, различными скоростями точек; на звенья действуют различные силы и моменты сил (рис. 6.1).

Поэтому для определения закона движения ведущего звена нужно произвести так называемое приведение всех сил и моментов сил и всех масс и моментов инерции звеньев к этому звену. Нужно задачу свести к рассмотрению движения только ведущего звена, заменив все силы и моменты сил, действующие на различные звенья механизма, одной приведенной силой  $F_{np}$  (или одним приведенным моментом  $M_{np}$ ), действующей на ведущее звено, а массы и моменты инерции всех звеньев — одной приведенной массой  $m_{np}$  (или одним приведенным моментом инерции  $I_{np}$ ), которым как бы обладает ведущее звено (рис. 6.2 и 6.3).



*Рис. 6.2. Звено приведения в случае, когда к нему все силы приводятся в виде приведенной силы, а массы и моменты инерции всех звеньев в виде приведенной массы*



*Рис. 6.3. Звено приведения в случае, когда к нему все силы приводятся в виде приведенного момента силы, а массы и моменты инерции всех звеньев в виде приведенного момента инерции*

При этом, чтобы уравнение (6.1а) не изменилось, необходимо замену осуществить таким образом, чтобы работа приведенной силы  $F_{np}$  (или приведенного момента  $M_{np}$ ) была равна сумме работ всех сил и моментов сил, действующих на различные звенья, а кинетическая энергия приведенной массы  $m_{np}$  (или приведенного момента инерции  $I_{np}$ ) была равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма.

При такой замене мы будем иметь дело только с одним ведущим звеном, на которое действует только одна сила  $F_{np}$  (или один момент  $M_{np}$ ), которое обладает массой  $m_{np}$  (или моментом инерции  $I_{np}$ ) и которое имеет скорость  $v$  (или  $\omega$ ).

**6.2. Работа сил и моментов сил. Приведенная сила.  
Приведенный момент силы**

Пусть на звенья сложного механизма действуют в общем случае различные силы  $F_i$  и моменты сил  $M_i$  (см. рис. 6.1). Тогда элементарная работа  $dA$  всех этих сил и моментов равна

$$dA = \sum (F_i ds_i \cos \alpha_i + M_i d\varphi_i), \quad (6.2)$$

где  $ds_i$  — элементарное линейное перемещение точки приложения силы  $F_i$ ;

$\alpha_i$  — угол между направлением вектора силы  $F_i$  и направлением перемещения (скорости) точки приложения силы;

$d\varphi_i$  — элементарное угловое перемещение звена, на которое действует момент  $M_i$ .

Заменим эту элементарную работу равной ей элементарной работой некоторой приведенной силы  $F_{np}$ , приложенной перпендикулярно ведущему звену в точке  $A$  (рис. 6.2),

$$dA = F_{np} ds_A,$$

тогда

$$F_{np} ds_A = \sum (F_i ds_i \cos \alpha_i + M_i d\varphi_i).$$

Разделим это уравнение на  $dt$ . Тогда вместо равенства элементарных работ получим равенство мощностей

$$F_{np} \frac{ds_A}{dt} = \sum \left( F_i \frac{ds_i}{dt} \cos \alpha_i + M_i \frac{d\varphi_i}{dt} \right)$$

или

$$F_{np} v_A = \sum (F_i v_i \cos \alpha_i + M_i \omega_i).$$

Из этого равенства можно определить величину приведенной силы

$$F_{np} = \sum \left( F_i \frac{v_i}{v_A} \cos \alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{v_A} \right). \quad (6.3)$$

Таким образом, **приведенной силой** называется сила, приложенная в точке приведения (точка  $A$ ) звена приведения (ведущего звена), работа или мощность которой равна работе или мощности всех внешних сил и моментов, действующих на звенья механизма.

Элементарную работу всех сил и моментов сил, действующих на различные звенья механизма (уравнение (6.2), можно также заменить равной ей элементарной работой некоторого приведенного момента силы  $M_{np}$ , приложенного к ведущему звену,

$$dA = M_{np} d\varphi_1,$$

где  $d\varphi_1$  — элементарное угловое перемещение ведущего звена.

Тогда

$$M_{np} d\varphi_1 = \sum (F_i ds_i \cos \alpha_i + M_i d\varphi_i).$$

Разделим это равенство на  $dt$ . Тогда вместо равенства элементарных работ получим равенство мощностей

$$M_{np} = \sum \left( F_i \frac{ds_i}{dt} \cos \alpha_i + M_i \frac{d\varphi_i}{dt} \right)$$

или

$$M_{np} \omega_1 = \sum (F_i v_i \cos \alpha_i + M_i \omega_i),$$

откуда величина приведенного момента силы  $M_{np}$  равна

$$M_{np} = \sum \left( F_i \frac{v_i}{\omega} \cos \alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{\omega_1} \right). \quad (6.4)$$

Таким образом, **приведенным моментом** силы называется такой момент, приложенный к звену приведения (ведущему звену), работа или мощность которого равна работе или мощности всех внешних сил и моментов сил, действующих на звенья механизма.

Из изложенного видно, что все силы и моменты сил, действующие на различные звенья механизма, можно заменить приведенной силой  $F_{np}$  или приведенным моментом силы  $M_{np}$ , действующими на ведущее звено.

Следует отметить, что если ведущее звено совершает поступательное движение, то все силы и моменты сил, действующие на различные звенья механизма, нужно заменять приведенной силой  $F_{np}$ . Если ведущее звено совершает вращательное движе-

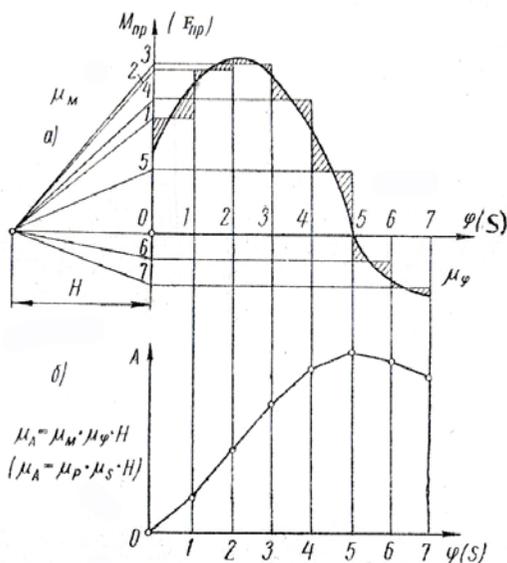


Рис. 6.4. Определение работы приведенного момента силы (или приведенной силы) методом графического интегрирования

ние (таких звеньев большинство), то все силы и моменты сил, действующие на звенья, удобнее заменять приведенным моментом сил  $M_{np}$ .

Отметим, что приведенная сила  $F_{np}$  и приведенный момент  $M_{np}$  зависят, кроме величин сил и моментов сил, действующих на звенья механизма, также от положения механизма, так как отношения скоростей (см. уравнения (6.3) и (6.4)) зависят только от положения механизма, а не от абсолютных скоростей.

Необходимо указать, что можно приводить к ведущему звену не все силы и моменты сил вместе, а каждую силу или момент силы или группу сил и моментов сил в отдельности.

После определения приведенной силы  $F_{np}$  или приведенного момента  $M_{np}$  для ряда положений механизма можно построить диаграмму  $F_{np} = f(S_A)$  или диаграмму  $M_{np} = f(\varphi_1)$  (рис. 6.4,а), после чего методом графического интегрирования (см. раздел 2, пункт 2.10) легко построить диаграмму работ (рис. 6.4,б), так как

$$A = \int_{s_0}^{s_1} F_{np} ds_A$$

и

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{np} d\varphi.$$

### **6.3. Кинетическая энергия механизма. Приведенная масса. Приведенный момент инерции**

Кинетическая энергия механизма складывается из суммы кинетических энергий его звеньев. Кинетическая энергия каждого звена в общем случае движения состоит из двух частей: кинетической энергии в поступательном движении звена и кинетической энергии во вращательном движении:

$$E_{зв} = \frac{mv_S^2}{2} + \frac{I_S\omega^2}{2}, \quad (6.5)$$

где  $v_S$  — скорость центра тяжести звена;

$\omega$  — угловая скорость звена;

$m$  — масса звена;

$I_S$  — момент инерции звена относительно оси, проходящей через его центр тяжести.

Кинетическая энергия всех звеньев механизма равна

$$E = \sum \left( \frac{m_i v_{S_i}^2}{2} + \frac{I_{S_i} \omega_i^2}{2} \right).$$

Разделим и умножим правую часть равенства на квадрат скорости точки приведения  $A$ :

$$E = \frac{v_A^2}{2} \sum \left[ m_i \left( \frac{v_{S_i}}{v_A} \right)^2 + I_{S_i} \left( \frac{\omega_i}{v_A} \right)^2 \right].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, как легко видеть, имеет размерность массы. Обозначим

$$\sum \left[ m_i \left( \frac{v_{S_i}}{v_A} \right)^2 + I_{S_i} \left( \frac{\omega_i}{v_A} \right)^2 \right] = m_{np}, \quad (6.6)$$

тогда

$$E = \frac{m_{np} v_A^2}{2}, \quad (6.7)$$

т.е. кинетическая энергия механизма может быть выражена через кинетическую энергию некоторой условной приведенной массы  $m_{np}$ , которая как бы сосредоточена в точке приведения  $A$  звена приведения (рис. 6.2).

Таким образом, **приведенной массой механизма** называется такая условная масса, которая как бы сосредоточена в точке приведения механизма, кинетическая энергия которой равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма.

Формулу (6.7) можно написать иначе:

$$E = \frac{m_{np} v_A^2}{2} = \frac{m_{np} l_{OA}^2 \omega_1^2}{2}.$$

Но  $m_{np} l_{OA}^2$  есть момент инерции приведенной массы относительно оси вращения звена приведения. Обозначим

$$I_{np} = m_{np} l_{OA}^2 = \sum \left[ m_i \left( \frac{v_{S_i}}{v_A} \right)^2 + I_{S_i} \left( \frac{\omega_i}{v_A} \right)^2 \right] l_{OA}^2, \quad (6.8)$$

тогда

$$E = \frac{I_{np} \omega_1^2}{2}, \quad (6.9)$$

т.е. кинетическая энергия механизма может быть также выражена через кинетическую энергию некоторого условного приведенного момента инерции  $I_{np}$ , которым как бы обладает звено приведения (рис. 6.3).

Таким образом, **приведенным моментом инерции механизма** называется такой условный момент инерции, которым как бы обладает звено приведения относительно оси вращения, кинетическая энергия которого (при таком моменте инерции) равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма.

Из формул (6.6) и (6.8) видно, что приведенная масса  $m_{np}$  и приведенный момент инерции  $I_{np}$  механизма есть величины переменные и зависят (кроме постоянных масс и моментов инерции отдельных звеньев) от положения механизма (так как отношения скоростей зависят только от положения механизма).

Следует отметить, что если звено приведения совершает поступательное движение, то для исследования его движения нужно определять приведенную к нему массу  $m_{np}$ , а если оно совершает вращательное движение (таких ведущих звеньев большинство), то для исследования его движения удобнее определять приведенный момент инерции  $I_{np}$ .

Таким образом, после приведения к ведущему звену всех сил (и моментов сил) и всех масс (и моментов инерции) звеньев, исследование движения сложного механизма сводится к рассмотрению движения одного лишь ведущего звена по схеме, изображенной на рис. 6.2, или по схеме, изображенной на рис. 6.3, где приведенная сила (или момент силы) и масса (или момент инерции) в общем случае есть величины переменные.

#### 6.4. Уравнение движения машины

После приведения всех масс, и моментов инерции, а также всех сил и моментов сил к ведущему звену кинетическую энергию механизма можно выразить через кинетическую энергию приведенной массы (или приведенного момента инерции), а работу всех сил — через работу приведенной силы (или приведенного момента силы). Тогда уравнение (6.1а) примет вид:

для схемы по рис. 6.2

$$\frac{m_{np1} v_{A_1}^2}{2} - \frac{m_{np0} v_{A_0}^2}{2} = \int_{s_0}^{s_1} F_{np} ds_A; \quad (6.10)$$

для схемы по рис. 6.3

$$\frac{I_{np1} \omega_1^2}{2} - \frac{I_{np0} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{np} d\varphi; \quad (6.11)$$

где  $m_{np}$  — приведенная к точке  $A$  ведущего звена масса механизма, соответствующая его положению в конце рассматриваемого периода;

$m_{np0}$  — приведенная к точке  $A$  ведущего звена масса механизма, соответствующая его положению в начале рассматриваемого периода;

$F_{np}$  — приведенная к ведущему звену сила;

$v_{A1}$  — скорость точки  $A$  ведущего звена в конце периода;

$v_{A0}$  — скорость точки  $A$  ведущего звена в начале периода;

$I_{np1}$  — приведенный к ведущему звену момент инерции механизма в конце рассматриваемого периода;

$I_{np0}$  — приведенный к ведущему звену момент инерции механизма в начале рассматриваемого периода;

$M_{np}$  — приведенный к ведущему звену момент силы;

$\omega_1$  — угловая скорость ведущего звена в конце периода;

$\omega_0$  — угловая скорость ведущего звена в начале периода.

Мы в дальнейшем будем пользоваться в основном уравнением (6.11) и схемой, изображенной на рис. 6.3, так как большинство ведущих звеньев совершает вращательное движение, для которого этими уравнением и схемой пользоваться удобнее.

Перепишем правые части уравнений (6.10) и (6.11) несколько иначе. В теории механизмов и машин будем различать движущие силы и силы сопротивления. Напомним, что движущие силы направлены в сторону движения, и их работы считаются положительными, а силы сопротивления направлены противоположно движению, и их работы считаются отрицательными. Произведя приведение этих сил к ведущему звену в отдаленности, уравнения (6.10) и (6.11) будут иметь вид:

$$\frac{m_{np1} v_{A1}^2}{2} - \frac{m_{np0} v_{A0}^2}{2} = A_d - A_c; \quad (6.10 a)$$

$$\frac{I_{np1} \omega_1^2}{2} - \frac{I_{np0} \omega_0^2}{2} = A_d - A_c, \quad (6.11 a)$$

где  $A_d$  — работа движущих сил;

$A_c$  — работа сил сопротивления;

но 
$$A_d = \int_{s_0}^{s_1} F_{np0} ds_A \quad \text{или} \quad A_d = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{np0} d\varphi$$

и 
$$A_c = \int_{s_0}^{s_1} F_{np0} ds_A \quad \text{или} \quad A_c = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{np0} d\varphi .$$

Тогда уравнения движения примут вид:

$$\frac{m_{np_1} v_{A_1}^2}{2} - \frac{m_{np_0} v_{A_0}^2}{2} = \int_{s_0}^{s_1} (F_{np_o} - F_{np_c}) ds_A \quad (6.10 \text{ б})$$

$$\frac{I_{np_1} \omega_1^2}{2} - \frac{I_{np_0} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (M_{np_o} - M_{np_c}) d\varphi. \quad (6.11 \text{ б})$$

Для удобства дальнейшего изложения разность между работами движущих сил  $A_d$  и сил сопротивления  $A_c$  назовем **избыточной работой** и обозначим  $A_{изб}$ :

$$A_{изб} = A_d - A_c. \quad (6.12)$$

Тогда уравнение движения в общем виде будет иметь вид

$$E = E_1 - E_0 = A_{изб}. \quad (6.1 \text{ б})$$

### 6.5. Уравнение движения в дифференциальной форме

Силы и моменты сил, действующие на механизм, в общем случае зависят не только от положения механизма, но и от времени  $t$  и скорости  $v$  (или  $\omega$ ). В этом случае пользоваться уравнениями (6.10) и (6.11) невозможно, так как невозможно определить работу сил и моментов сил по уравнениям:

$$A = \int_{s_0}^{s_1} F(s, v, t) ds \quad \text{и} \quad A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M(\varphi, \omega, t) d\varphi.$$

Для получения уравнения движения в общем случае, когда приведенная сила (или приведенный момент силы) зависят от положения механизма, скорости и времени, воспользуемся уравнением (6.1) в дифференциальной форме

$$dE = dA \quad (6.1 \text{ в})$$

или

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F(s, v, t) ds.$$

Здесь для сокращения вместо  $m_{np}$  и  $v_A$  подставлено просто  $m$  и  $v$ . Разделив на  $ds$  и дифференцируя левую часть, получим

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F(s, v, t)$$

или

$$\frac{1}{2}v^2 \frac{dm}{ds} + mv \frac{dv}{ds} = F(s, v, t). \quad (6.13)$$

В случае, когда на ведущее звено действует приведенный момент силы, уравнение движения можно получить аналогично:

$$dE = dA$$

или

$$d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = M(\varphi, \omega, t)d\varphi.$$

(Здесь  $I$  — приведенный момент инерции,  $\omega$  — угловая скорость звена приведения.)

Разделив на  $d\varphi$  и дифференцируя левую часть, получим

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = M(\varphi, \omega, t)$$

или

$$\frac{1}{2}\omega^2 \frac{dI}{d\varphi} + I\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = M(\varphi, \omega, t). \quad (6.14)$$

Учитывая, что  $v = \frac{ds}{dt}$  и  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , уравнения (6.13) и (6.14) будут

иметь вид:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dm}{ds} + m \frac{dv}{dt} = F(s, v, t); \quad (6.13 a)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{dI}{d\varphi} + I \frac{d\omega}{dt} = M(\varphi, \omega, t). \quad (6.14 a)$$

Полученные уравнения представляют собой второй закон Ньютона для случая, когда масса (и момент инерции) является величиной переменной, зависящей от положения механизма. При  $m=const$  (или  $I=const$ ) эти формулы обращаются в известные формулы второго закона Ньютона:

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad \text{и} \quad I \frac{d\omega}{dt} = M.$$

Уравнения (6.13 a) и (6.14 a) представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка.

Укажем, что полученные ранее уравнения (6.10) и (6.11) являются частными случаями уравнений (6.13) и (6.14), когда  $F_{np}$  и  $M_{np}$  зависят только от положения механизма.

Установление закона движения ведущего звена зависит от трудности решения уравнений движения (6.13) и (6.14), которая в свою очередь зависит от комбинаций зависимостей  $F_{np}$  (или  $M_{np}$ ). Как мы уже видели, наиболее просто решение, когда  $F_{np}$  (или  $M_{np}$ ) зависит только от положения механизма.

### 6.6. Неравномерность движения машины. Различные периоды и режимы движения машины

Из уравнения движения машины (6.11а) (будем рассматривать в дальнейшем только это уравнение) легко заметить, что машина (вернее, ведущее звено машины) в общем случае движется неравномерно.

Действительно, решим это уравнение относительно угловой скорости ведущего звена  $\omega_1$  в конце рассматриваемого периода

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(A_d - A_c) + I_{np}\omega_0^2}{I_{np1}}}. \quad (6.15)$$

Из этого равенства видно, что  $\omega_1$  в общем случае не является постоянной, так как, во-первых, работа движущих сил  $A_d$  и работа сил сопротивления  $A_c$  за произвольный промежуток времени в реальных машинах не равны между собой (они могут быть равны только тогда, когда приведенные силы, движущие и сопротивления, всегда равны между собой, что практически бывает очень редко) и, во-вторых, приведенный момент инерции не является величиной постоянной.

Рассмотрим различные периоды и режимы движения машины.

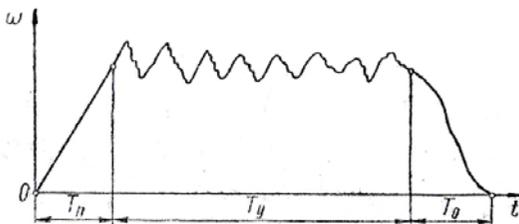


Рис. 6.5. Диаграмма изменения скорости машины за полное время ее движения

машины, находившегося в начале периода в покое ( $\omega_0=0$ ), приобретает некоторое значение  $\omega_1$ . Уравнение движения машины (6.11а) для этого периода примет вид

На рис. 6.5 изображена диаграмма изменения угловой скорости ведущего звена от времени. Весь период движения машины от пуска машины до ее полной остановки можно разбить на три периода.

1. Период пуска или разгона машины  $T_n$ , в течение которого скорость ведущего звена

$$\frac{I_{np1} \omega_1^2}{2} = A_d - A_c. \quad (6.16)$$

Так как кинетическая энергия всегда положительна, то для возможности пуска машины в ход необходимо, чтобы работа движущих сил была больше работы сил сопротивления

$$A_d > A_c.$$

2. Период установившегося движения  $T_y$ . Установившееся движение возможно трех различных режимов:

- равномерно установившееся;
- периодически неравномерно установившееся;
- непериодически неравномерное движение.

А. Равномерно установившееся движение — это такое движение, когда скорость ведущего звена машины является строго постоянной —  $\omega = const$  (рис. 6. б, а).

Такое движение, как мы уже видели, возможно, если:

а) за любой промежуток времени работа движущих сил равна работе сил сопротивления

$$A_d = A_c, \quad (6.17)$$

что возможно в свою очередь, когда в любой момент

$$M_{npd} = M_{npc}$$

(в реальных машинах это бывает очень редко);

б) приведенный момент инерции машины  $I_{np}$  — величина постоянная:

$$I_{np} = const.$$

Это возможно только в машинах ротационного типа, в которых все звенья имеют только вращательное движение и передаточные отношения между звеньями есть величины постоянные (так как при постоянном отношении скоростей звеньев  $I_{np}$  есть величина постоянная).

Б. Периодически неравномерно установившееся движение — это

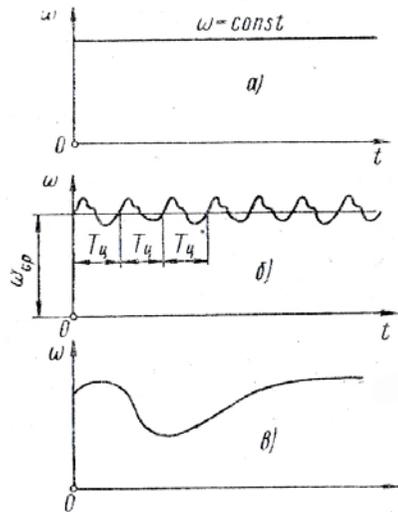


Рис. 6.б. Различные режимы установившегося движения машины:

- а — равномерное;  
 б — периодически неравномерное;  
 в — неравномерное

такое движение, когда существует некоторый промежуток времени, называемый периодом цикла  $T_u$ , по истечении которого все параметры машины принимают первоначальное значение (рис.6.6,б). Закон изменения каждого параметра машины (например, скорости кинетической энергии, силы и т.д.) во время каждого периода цикла одинаков.

При таком движении скорости ведущего звена в начале и конце цикла одинаковы:

$$\omega_1 = \omega_0,$$

одинаковы и приведенные моменты инерции механизма в начале и конце цикла:

$$I_{np1} = I_{np0},$$

а следовательно, одинаковы и кинетические энергии машины в начале и конце цикла:

$$E_1 = E_0.$$

Тогда уравнение движения (6.11,а) за полный цикл имеет вид

$$A_d - A_c = 0$$

или

$$A_d = A_c, \quad (6.18)$$

т. е. при периодически неравномерно установившемся движении за полный цикл работа движущих сил равна работе сил сопротивления.

Уравнение (6.18) не следует смешивать с аналогичным уравнением (6.17) для равномерно установившегося движения. Там это уравнение действительно за любой промежуток времени, а здесь только за полный период цикла.

Для произвольного промежутка времени при периодически неравномерно установившемся движении следует пользоваться полным уравнением движения машины.

Необходимо указать, что периодически неравномерно установившееся движение является наиболее распространенным режимом движения в машинах. Такой режим имеет место, например, в четырехтактном двигателе внутреннего сгорания, где цикл происходит в течение двух оборотов коленчатого вала, в лесопильной раме, где цикл происходит в течение времени двойного хода рамы (одного оборота кривошипа), паровой машины, поршневого насоса, компрессора, станков-автоматов и т. д.

В. Непериодически неравномерное движение — это такое движение, когда в работе машины нет правильных промежутков времени, по истечении которых параметры машины принимают первоначальные значения. Скорость ведущего звена машины (и другие параметры) изменяется произвольно, по непериодическому закону (рис. 6.6, в).

При таком движении следует пользоваться полным уравнением движения машины.

3. Период остановки или выбега машины, в течение которого скорость ведущего звена падает от некоторого начального значения  $\omega_0$  до нуля ( $\omega_1=0$ ). Кроме того, движущие силы при остановке машины выключаются ( $A_d=0$ ).

Уравнение движения машины для этого периода имеет вид

$$-\frac{I_{np0} \omega_0^2}{2} = -A_c$$

или

$$\frac{I_{np0} \omega_0^2}{2} = A_c, \quad (6.19)$$

т.е. остановка машины произойдет тогда, когда вся кинетическая энергия машины будет поглощена работой сил сопротивления.

### 6.7. Средняя скорость машины.

#### Коэффициент неравномерности хода машины

Для удобства изучения периодического движения машины пользуются понятием средней скорости ведущего звена (звена приведения). Пусть угловая скорость ведущего звена периодически изменяется по некоторому закону (рис. 6.7).

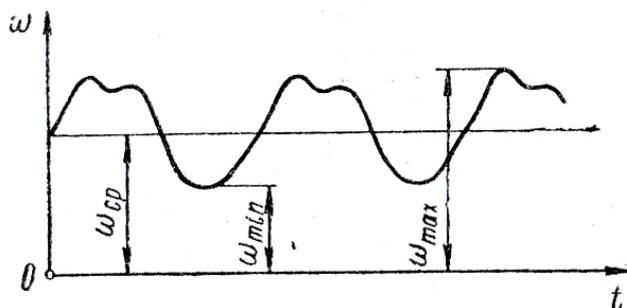


Рис. 6.7. К определению коэффициента неравномерности хода для периодически неравномерно установившегося движения

Среднюю угловую скорость ведущего звена можно приближенно считать равной средней арифметической между ее максимальным и минимальным значениями:

$$\omega_{cp} \approx \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}. \quad (6.20)$$

Колебание угловой скорости машины принято характеризовать так называемым **коэффициентом неравномерности хода**  $\delta$ , который равен отношению разности между максимальной и минимальной угловыми скоростями к средней угловой скорости:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}}. \quad (6.21)$$

Чем больше колебание величины угловой скорости (т.е. разность между  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$ ), тем движение машины является более неравномерным и тем большим является значение коэффициента неравномерности хода  $\delta$ . И наоборот, чем меньше колебание угловой скорости, тем движение машины является более равномерным и тем меньше является коэффициент неравномерности хода. В частном случае при равномерном движении машины, когда  $\omega = \text{const}$ . Коэффициент неравномерности хода  $\delta$  равен нулю.

Часто по заданной средней угловой скорости и заданному коэффициенту неравномерности хода требуется определить минимальное и максимальное значения угловой скорости. Выведем эти зависимости.

На основании равенств (6.20) и (6.21) можно написать:

$$\omega_{\max} + \omega_{\min} = 2\omega_{cp}; \quad (6.20 \text{ a})$$

$$\omega_{\max} - \omega_{\min} = \delta\omega_{cp}. \quad (6.21 \text{ a})$$

Складывая эти равенства и решая относительно  $\omega_{\max}$ , получим

$$\omega_{\max} = \omega_{cp} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right). \quad (6.22)$$

Вычитая и решая относительно  $\omega_{\min}$ , получим

$$\omega_{\min} = \omega_{cp} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right). \quad (6.22 \text{ a})$$

### 6.8. Диаграмма $E=f(I_{np})$

Исследование многих вопросов движения машины удобно вести по так называемой диаграмме энергомасс — диаграмме зависимости кинетической энергии машины  $E$  от ее приведенного момента инерции  $I_{np}$ . Эта зависимость для периодически неравномерно установившегося движения имеет вид замкнутой кривой, так как значения  $E$  и  $I_{np}$  периодически повторяются (рис. 6.8).

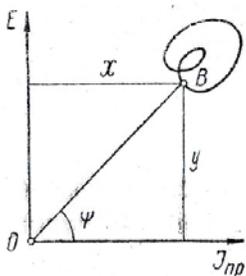


Рис. 6.8. Диаграмма  $E=f(I_{np})$

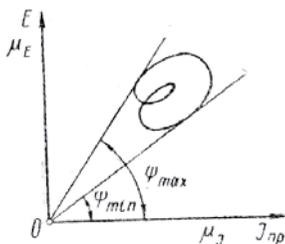


Рис. 6.9. К определению максимальной и минимальной угловых скоростей по диаграмме  $E=f(I_{np})$

Диаграмму  $E=f(I_{np})$  можно построить для каждой машины, если заданы силы, действующие на машину, массы и моменты инерции звеньев и начальная кинетическая энергия механизма  $E_0$ . Для этого необходимо определить для различных положений механизма значения кинетической энергии по уравнению

$$E = E_0 + A_{изб} \quad (6.1 \text{ з})$$

(это уравнение вытекает из уравнения (6.1 б)) и значения  $I_{np}$  по уравнению (6.8).

Зависимость между кинетической энергией машины  $E$ , ее приведенным моментом инерции  $I_{np}$  и угловой скоростью ведущего звена  $\omega$  (звена приведения) имеет вид

$$E = \frac{I_{np} \omega^2}{2},$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{2E}{I_{np}}. \quad (6.9 \text{ а})$$

Используя эту формулу, по диаграмме  $E=f(I_{np})$  легко определить угловую скорость ведущего звена для любого положения механизма. Пусть данному положению механизма соответствует точка  $B$  на кривой  $E=f(I_{np})$  (рис. 6.8) с координатами  $x, y$ . Тогда для этого положения

$$E = y\mu_E, \quad I_{np} = x\mu_I,$$

где  $\mu_E$  – масштаб кинетической энергии;

$\mu_I$  – масштаб момента инерции;

$x$  – отрезок, изображающий в масштабе  $\mu_I$  приведенный момент инерции, мм;

$y$  – отрезок, изображающий в масштабе  $\mu_E$  кинетическую энергию, мм.

Подставляя значения  $E$  и  $I_{np}$  в формулу (6.9 а), получим

$$\omega^2 = 2 \frac{\mu_E}{\mu_I} \cdot \frac{y}{x}$$

или

$$\omega^2 = 2 \frac{\mu_E}{\mu_I} \operatorname{tg} \psi, \quad (6.9 б)$$

т.е. квадрат угловой скорости ведущего звена прямо пропорционален тангенсу угла наклона луча, проведенного из начала координат в соответствующую точку, к оси  $I_{np}$ .

Проведем из начала координат к кривой  $E=f(I_{np})$  две касательные, охватывающие кривую (рис. 6.9). Совершенно очевидно, что нижняя касательная, составляющая с осью  $I_{np}$  минимальный угол  $\psi_{min}$ , соответствует минимальной угловой скорости  $\omega_{min}$ , а верхняя касательная, составляющая с осью  $I_{np}$  максимальный угол  $\psi_{max}$ , соответствует максимальной угловой скорости  $\omega_{max}$ .

$$\left. \begin{aligned} \omega_{min}^2 &= 2 \frac{\mu_E}{\mu_I} \operatorname{tg} \psi_{min}; \\ \omega_{max}^2 &= 2 \frac{\mu_E}{\mu_I} \operatorname{tg} \psi_{max}. \end{aligned} \right\} \quad (6.9 в)$$

Таким образом, построив диаграмму  $E=f(I_{np})$  и проведя через начало координат к кривой касательные, легко измерить углы  $\psi_{max}$  и  $\psi_{min}$  и вычислить по формулам (6.9 в) значения  $\omega_{max}$  и  $\omega_{min}$ , а затем по формулам (6.20) и (6.21) определить среднюю угловую скорость  $\omega_{cp}$  и коэффициент неравномерности хода  $\delta$ .

## Раздел 7. РЕГУЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАШИН

### 7.1. Общие положения

Неравномерность движения машины вызывает возникновение дополнительных сил инерции и, следовательно, дополнительных давлений в кинематических парах, колебание звеньев машины, колебание фундамента, уменьшение к.п.д. машины, неблагоприятное протекание технологического процесса, выполняемого данной машиной, и т.д. Если коэффициент неравномерности хода очень велик, то это может вызвать такие последствия, при которых нормальная работа машины становится невозможной. Отсюда возникает задача об обеспечении движения машины с наперед заданным коэффициентом неравномерности хода.

Установленные многолетней практикой значения коэффициентов неравномерности хода  $\delta$  для машин различных типов, при которых они могут нормально работать, приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Тип машин	Коэффициент неравномерности хода $\delta$
Насосы	0,03 ÷ 0,20
Сельскохозяйственные машины	0,02 ÷ 0,10
Металлообрабатывающие станки	0,02 ÷ 0,05
Двигатели внутреннего сгорания, компрессоры	0,005 ÷ 0,015
Электрические генераторы постоянного тока	0,005 ÷ 0,010
Электрические генераторы переменного тока	0,003 ÷ 0,005
Лесопильные рамы	0,02 ÷ 0,05
Пресса, ножницы	0,10 ÷ 0,15
Дробилки	0,05 ÷ 0,15

Посмотрим, как можно обеспечить движение машины с заданным коэффициентом неравномерности хода.

Кинетическая энергия машины постоянно изменяется ( $\Delta E = A_{шв}$ ), что вызывает в свою очередь изменение угловой скорости ведущего звена. Так как

$$E = \frac{I_{np} \omega^2}{2},$$

то колебание угловой скорости при этом будет тем меньше (следовательно, меньше будет и коэффициент неравномерности хода  $\delta$ ), чем больше приведенный момент инерции механизма.

Таким образом, уменьшение неравномерности хода машины может быть достигнуто за счет увеличения момента инерции машины на неко-

торую величину  $I_m$ . Это достигается постановкой на ведущий (или другой) вал маховика с моментом инерции  $I_m$ .

Однако при помощи маховика можно регулировать равномерность хода только при периодически неравномерном движении, так как только при таком движении происходит вполне определенное изменение величин  $A_0$ ,  $A_c$  и  $A_{изб}$ . Но маховик не поможет при неравномерно непериодическом движении, где нет вполне определенного периодического изменения движущих сил и сил сопротивления и работ этих сил.

Например, маховик не поможет, если по каким-либо причинам на длительный период произошло резкое изменение движущих сил или сил сопротивления. Такое движение регулируется при помощи регуляторов, которые, воздействуя на движущие силы (или силы сопротивления), уравнивают их работу с работой сил сопротивления (движущих сил).

### **7.2. Определение момента инерции маховика при постоянном приведенном моменте инерции механизма**

При постоянном приведенном моменте инерции уравнение движения машины имеет вид

$$\frac{I\omega_1^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2} = A_{изб} \quad \text{или} \quad \omega_1^2 - \omega_0^2 = \frac{2A_{изб}}{I},$$

т.е. разность между конечной и начальной угловыми скоростями будет тем больше, чем больше  $A_{изб}$ . Очевидно, что максимальная разность  $\omega_1^2 - \omega_0^2$  будет соответствовать максимальной избыточной работе  $(A_{изб})_{max}$ . Очевидно также, что максимальная разность  $\omega_1^2 - \omega_0^2$  будет тогда, когда  $\omega_1$  примет максимальное значение, а  $\omega_0$  — минимальное значение. Тогда

$$\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2 = \frac{2(A_{изб})_{max}}{I}. \quad (7.1)$$

Выразим  $\omega_{max}^2$  и  $\omega_{min}^2$  через среднюю угловую скорость  $\omega_{cp}$  и коэффициент неравномерности хода  $\delta$ . Ранее мы имели (7.22 и 7.22 а):

$$\omega_{max} = \omega_{cp} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right); \quad \omega_{min} = \omega_{cp} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right).$$

Возведем уравнения в квадрат, тогда

$$\omega_{max}^2 = \omega_{cp}^2 \left( 1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} \right); \quad \omega_{min}^2 = \omega_{cp}^2 \left( 1 - \delta + \frac{\delta^2}{4} \right).$$

Членом  $\frac{\delta^2}{4}$  ввиду малости  $\delta$  можно пренебречь, тогда

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\max}^2 &= \omega_{cp}^2 (1 + \delta); \\ \omega_{\min}^2 &= \omega_{cp}^2 (1 - \delta). \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Подставляя эти значения в уравнение (7.1), получим

$$\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 = 2\delta\omega_{cp}^2 = \frac{2(A_{изб})_{\max}}{I}.$$

Решая это уравнение относительно  $I$ , получим

$$I = \frac{(A_{изб})_{\max}}{\omega_{cp}^2 \delta}. \quad (7.3)$$

Таким образом, чтобы машина двигалась с заданным коэффициентом неравномерности  $\delta$  при заданной средней угловой скорости  $\omega_{cp}$ , ее момент инерции должен определяться по уравнению (7.3).

Момент инерции машины складывается из собственного момента инерции механизма  $I_0$  и момента инерции маховика  $I_M$ :

$$I = I_0 + I_M,$$

откуда

$$I_M = I - I_0.$$

или окончательно момент инерции маховика равен

$$I_M = \frac{(A_{изб})_{\max}}{\omega_{cp}^2 \delta} - I_0. \quad (7.3 a)$$

Величину  $(A_{изб})_{\max}$  легко определить, если заданы приведенные моменты движущих сил  $M_d$  и сил сопротивления  $M_c$ . Пусть эти моменты для периода установившегося движения заданы графиками, представленными на рис. 7.1, а. Избыточная работа  $A_{изб}$  для различных участков определяется площадями, заключенными между кривыми  $M_d$  и  $M_c$ , так как

$$A_{изб} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (M_d - M_c) d\varphi.$$

Однако нам нужно определить  $(A_{изб})_{\max}$  на участке, где угловая скорость изменяется от  $\omega_{\min}$  до  $\omega_{\max}$ . По взаимному расположению графиков  $M_d$  и  $M_c$  установить, при каком значении угла  $\varphi$  угловая скорость  $\omega$  является максимальной и при каком — минимальной, не всегда удается. И поэтому трудно определить  $(A_{изб})_{\max}$ . Покажем как это сделать.

Построим интегральную кривую  $A_{изб} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (M_d - M_c) d\varphi$ . (рис. 7.1

б). Здесь  $A_{изб}$  отсчитывается от оси  $\varphi$ .

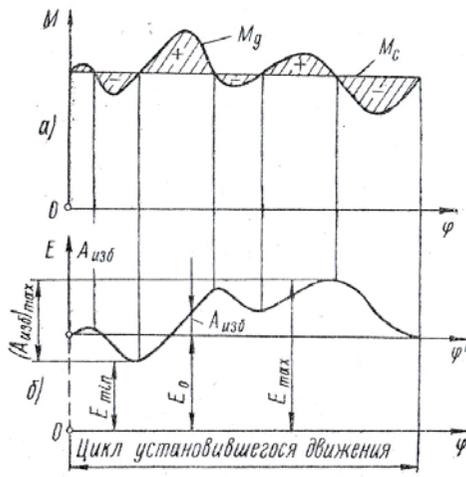


Рис. 7.1. К вопросу об определении  $(A_{изб})_{max}$

соответствующее движению машины из положения, при котором  $\omega$  равно  $\omega_{min}$ , в положение, при котором  $\omega$  равно  $\omega_{max}$ , будет характеризоваться разностью ординат  $E_{max} - E_{min}$ .

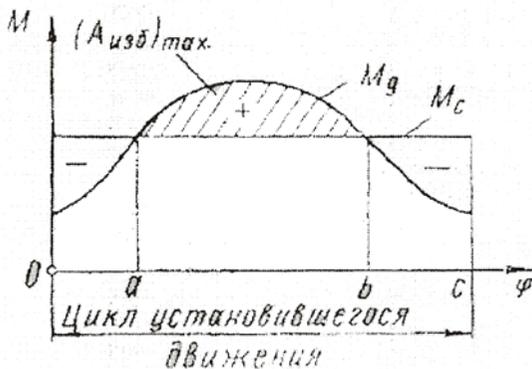


Рис. 7.2. Определение  $(A_{изб})_{max}$  в частном случае

Если кинетическая энергия в начальном положении была  $E_0$ , то эта же кривая, ординаты которой отсчитываются от нижней оси абсцисс  $\varphi$ , отстоящей от верхней оси абсцисс на величину  $E_0$ , будет представлять зависимость кинетической энергии  $E$  от  $\varphi$  (7.1 з).

Совершенно очевидно, что минимальное значение кинетической энергии  $E_{min}$  соответствует минимальному значению угловой скорости  $\omega_{min}$ , а максимальное значение  $E_{max}$  соответствует максимальному значению угловой скорости  $\omega_{max}$ . Тогда  $(A_{изб})_{max}$ ,

Иногда положения, в которых угловая скорость принимает максимальное и минимальное значения и соответственно величину  $(A_{изб})_{max}$ , легко определить и по взаимному расположению кривых  $M_d$  и  $M_c$  (в тех случаях, когда кривые за один полный цикл пересекаются только дважды). Например, на рис. 7.2 приведены кривые  $M_d = f(\varphi)$  и



ют максимальной и минимальной угловым скоростям (см. раздел 6, пункт 8.8). Эти углы определяем следующим образом.

Сопоставляя уравнения (6.9 в) с уравнениями (7.2), получим:

$$\omega_{\max}^2 = \omega_{cp}^2 (1 + \delta) = 2 \frac{\mu_E}{\mu_I} \operatorname{tg} \psi_{\max};$$

$$\omega_{\min}^2 = \omega_{cp}^2 (1 - \delta) = 2 \frac{\mu_E}{\mu_I} \operatorname{tg} \psi_{\min},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_{\max} &= \frac{\mu_I}{2\mu_E} \omega_{cp}^2 (1 + \delta); \\ \operatorname{tg} \psi_{\min} &= \frac{\mu_I}{2\mu_E} \omega_{cp}^2 (1 - \delta). \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Как видно, углы  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$  зависят от  $\omega_{cp}$  и  $\delta$ .

Точка пересечения касательных (точка  $O'$ ) есть начало координат полной диаграммы энергомасс  $E=f(Inp)$ . Отрезок  $O'm$  — расстояние между осями  $E$  и  $\Delta E$  в масштабе  $\mu_I$  представляет искомый момент инерции маховика

$$I_M = \mu_I [O'm],$$

который нужно установить, чтобы машина двигалась с заданным коэффициентом неравномерности хода.

Однако ввиду того, что углы  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$  мало отличаются друг от друга (при малом значении  $\delta$ ), касательные в пределах чертежа обычно не пересекаются. Момент инерции маховика в этом случае определяется следующим образом. Из рис. 7.3 видно

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{km}{O'm}, \quad \operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{lm}{O'm}.$$

Вычитая, получим

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{km - lm}{O'm} = \frac{kl}{O'm}.$$

Но из уравнений (7.4) следует

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{\mu_I}{\mu_E} \omega_{cp}^2 \delta.$$

Приравнявая правые части последних равенств, получим

$$\frac{kl}{O'm} = \frac{\mu_I}{\mu_E} \omega_{cp}^2 \delta \quad \text{или} \quad O'm = \frac{\mu_E}{\mu_I} \cdot \frac{kl}{\omega_{cp}^2 \delta}.$$

Отрезок  $O'm$  в масштабе  $\mu_I$  и есть момент инерции маховика

$$I_M = \mu_I [O'm]$$

или окончательно

$$I_M = \frac{\mu_E [kl]}{\omega_{cp}^2 \delta}. \quad (7.5)$$

Отрезок  $kl$ , отсекаемый касательными на оси ординат, измерить не представляет труда.

Иногда (при больших значениях углов  $\psi_{max}$  и  $\psi_{min}$ ) касательные в пределах чертежа не пересекают ось ординат  $\Delta E$ , но они пересекают ось абсцисс в точках  $c$  и  $d$ . Тогда, измерив отрезки  $Oc$  и  $Od$ , отрезок  $kl$  можно вычислить следующим образом.

Из рис. 7.3 видно, что

$$Ok = O c \operatorname{tg} \psi_{\max},$$

$$Ol = O d \operatorname{tg} \psi_{\min},$$

откуда

$$kl = Ol - Ok = O d \operatorname{tg} \psi_{\min} - O c \operatorname{tg} \psi_{\max}.$$

Определим ориентировочные размеры маховика.

Примерная конструкция маховика представлена на рис. 7.4. Пренебрегая массами ступицы и спиц маховика, можно приблизительно считать, что вся его масса сосредоточена на ободе. Тогда момент инерции маховика равен

$$I_M = mR^2 = \frac{mD^2}{4},$$

где  $R$  — средний радиус обода маховика;  $D$  — средний диаметр обода маховика.

Или

$$mD^2 = 4I_M. \quad (7.6)$$

Задаваясь из конструктивных соображений диаметром обода маховика, легко по этому уравнению определить его массу.

Если диаметр и масса маховика оказываются очень большими и из конструктивных соображений такой маховик установить на ведущий вал

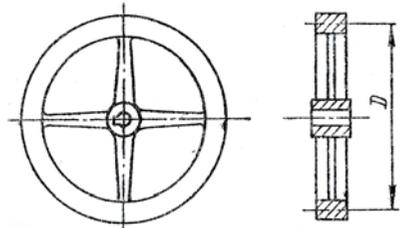


Рис. 7.4. Примерная конструкция маховика

(вал приведения) оказывается невозможным, то маховик следует установить на другой вал, который обладает большей угловой скоростью. Тогда момент инерции маховика и его размеры будут меньше. Действительно, кинетическая энергия маховика  $E_M$  должна быть одинакова, независимо от того, на каком валу он будет установлен:

$$E_M = \frac{I_{M_1} \omega_1^2}{2} = \frac{I_{M_2} \omega_2^2}{2},$$

где  $I_{M_1}$  — момент инерции маховика при установке его на некотором валу 1;

$I_{M_2}$  — момент инерции маховика при установке его на валу 2;

$\omega_1$  — угловая скорость вала 1;

$\omega_2$  — угловая скорость вала 2.

Отсюда следует

$$\frac{I_{M_1}}{I_{M_2}} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2},$$

т.е. моменты инерции маховиков обратно пропорциональны квадратам угловых скоростей валов, на которых они устанавливаются.

Поэтому с точки зрения размеров маховика его выгодно устанавливать на валу, который делает большее число оборотов.

Таким образом, расчет маховика по методу диаграммы энергомасс нужно вести в такой последовательности:

1. Вычислить значения приведенных моментов движущих сил и сил сопротивления по формуле (6.4) (для этого сначала нужно построить планы скоростей) и построить диаграммы (рис. 7.5, а):

$$M_D = f(\varphi) \text{ и } M_c = f(\varphi).$$

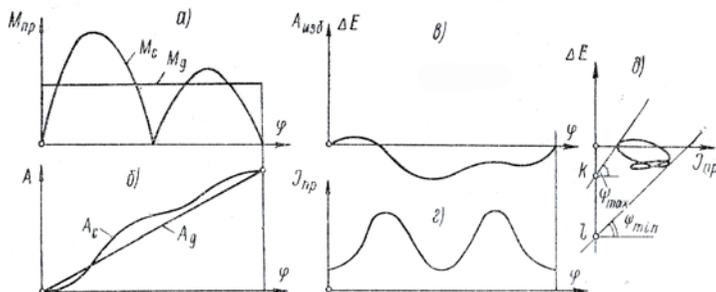


Рис. 7.5. Последовательность определения момента инерции маховика

2. Методом графического интегрирования построить диаграммы работ  $A_D=f(\varphi)$  и  $A_C=f(\varphi)$  (рис. 7.5, б). (Так как за полный цикл  $A_D=A_C$ , эти кривые в начале и конце цикла должны совпадать.)

3. Вычитая из работы движущих сил работу сил сопротивления, построить диаграмму избыточной работы  $A_{изб}$  или приращения кинетической энергии  $\Delta E$  (рис. 7.5, в):

$$A_D - A_C = A_{изб} = \Delta E = f(\varphi).$$

4. Вычислить по формуле (6.8) для каждого положения механизма значение приведенного момента инерции  $I_{np}$  и построить диаграмму  $I_{np}=f(\varphi)$  (рис. 7.5, г).

5. На основании двух последних диаграмм построить неполную диаграмму энергомасс  $\Delta E=f(I_{np})$  (рис. 7.5, д).

6. По формулам (7.4) определить значения углов  $\psi_{max}$  и  $\psi_{min}$  наклона касательных к кривой энергомасс с осью абсцисс. Под этими углами провести к кривой  $\Delta E=f(I_{np})$  соответствующие касательные до пересечения с осью ординат и измерить (или вычислить) отрезок  $kl$ , отсекаемый касательными на оси ординат.

7. По формуле

$$I_M = \frac{\mu_E [kl]}{\omega_{cp}^2 \delta}$$

вычислить момент инерции маховика.

#### **7.4. Регулирование неравномерного неперiodического движения.**

##### **Регуляторы и принцип их действия**

При помощи маховика можно регулировать скорость хода лишь при периодически неравномерном установившемся движении, когда движущие силы и силы сопротивления изменяются в течение цикла по какому-то определенному закону, и работа движущих сил за полный цикл равна работе сил сопротивления. Диаграмма энергомасс при таком движении имеет вполне определенный вид (замкнутая кривая).

Но маховик не может регулировать скорость движения, если движение неравномерно неперiodическое, когда нет равенства между работами движущих сил и сил сопротивления за какой-либо постоянный период. Например, нагрузка на генератор электрического тока, приводимого в движение двигателем внутреннего сгорания, может резко изменяться вследствие изменения потребления тока различными потребителями. Это вызывает резкое изменение момента сил сопротивления на валу двигателя, в результате чего нарушается соответствие между работами движущих сил и сил сопротивления, что вызывает резкое колебание скорости. Если нагрузка на генератор резко упала (отключение большинства потре-

бителей), то в результате уменьшения сил сопротивления (а движущие силы не изменились) скорость двигателя будет резко увеличиваться (говорят в таких случаях: «двигатель идет вразнос»), и может произойти авария. Если нагрузка на генератор, наоборот, резко возрастет, то в результате увеличения сил сопротивления скорость двигателя будет быстро падать, и он может остановиться. Диаграмма энергомакс при таком движении не имеет определенной формы и вообще не может быть построена.

Таким образом, чтобы не было указанных явлений и скорость машинного агрегата колебалась в заданных пределах, необходимо приспособление, которое постоянно уравнивает движущие силы двигателя с силами сопротивления рабочей машины. Таким приспособлением является регулятор, который достигает этого, регулируя подачу горючей смеси в двигатель.

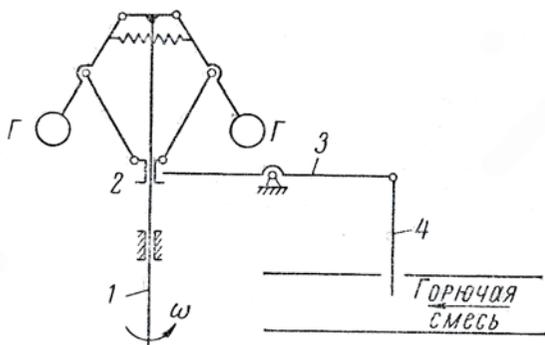


Рис. 7.6. Схема центробежного регулятора прямого действия

Рассмотрим действие регулятора центробежного типа. Схема такого регулятора изображена на рис. 7.6.

Вал регулятора 1 получает вращение от вала, угловую скорость которого следует поддерживать в определенных пределах. Положения грузов Г регулятора зависят от числа

оборотов вала. Чем больше число оборотов, тем выше положение грузов, и чем меньше число оборотов, тем ниже положение грузов. Соответственно с изменением положения грузов изменяет свое положение и муфта 2, с которой связан рычаг 3. На правом конце последнего шарнирно укреплена заслонка 4, перекрывающая в той или иной степени трубопровод, по которому в двигатель поступает горючая смесь.

Действует регулятор следующим образом.

При падении сопротивления на валу агрегата скорость его возрастает, в результате чего грузы Г регулятора поднимаются, поднимая и муфту 2. Муфта, воздействуя на рычаг 3, поднимает его левый конец, опуская правый вместе с заслонкой 4. Заслонка перекрывает часть сечения трубопровода, доступ горючей смеси уменьшается, вследствие чего уменьшается мощность (а следовательно, и движущая сила) двигателя. Таким об-

разом, происходит уравнивание движущих сил с силами сопротивления, и скорость вала убывает, достигая необходимой величины.

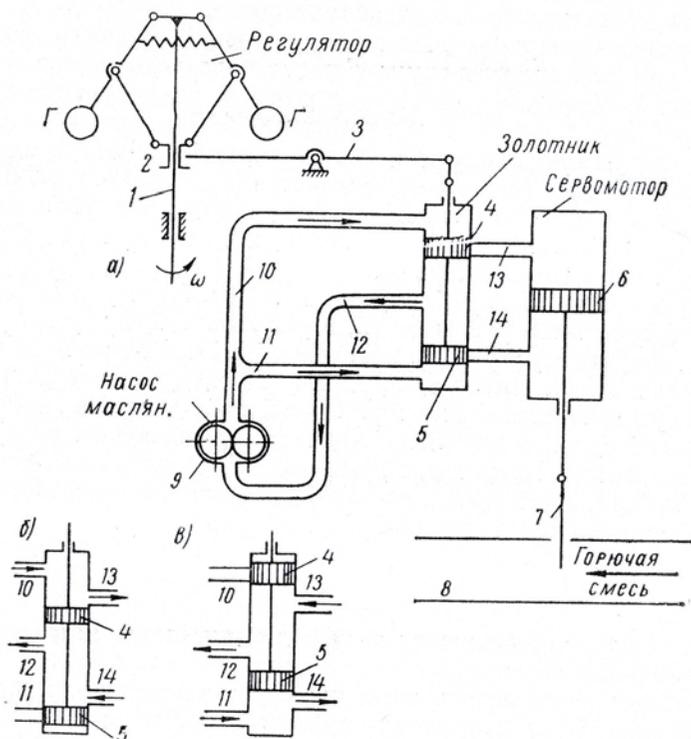


Рис. 7.7. Схема центробежного регулятора косвенного действия

Если сопротивление на валу агрегата, наоборот, резко возрастает, то скорость его уменьшается, в результате чего грузы  $G$  опускаются, опуская муфту. Опускается и левый конец рычага, подымая правый конец вместе с заслонкой. Проходное сечение трубопровода увеличивается, вследствие чего увеличивается поступление горючей смеси в двигатель, мощность (и движущая сила) двигателя возрастает. Происходит уравнивание движущих сил с силами сопротивления, в результате чего скорость машины возрастает, достигая необходимой величины.

В рассмотренном регуляторе перемещение заслонки осуществляется за счет сил, возникающих в самом регуляторе. Такой регулятор называется **регулятором прямого действия**.

Однако во многих случаях этих сил оказывается недостаточно. Поэтому применяются **регуляторы непрямого действия**, где перестановка заслонки осуществляется при помощи вспомогательного двигателя (электрического, гидравлического и т.д.), который включается или переключается в нужный момент регулятором. Схема регулятора непрямого действия изображена на рис.7.7, а.

При возрастании скорости вращения вала 1 вследствие падения сил сопротивления происходит подъем грузов 1 и муфты 2 регулятора и опускание правого конца рычага 3, конец которого соединен не с заслонкой, как в предыдущем случае, а с поршеньками 4 и 5 золотника. Поршеньки 4 и 5, опускаясь, соединяют трубопроводы 10 и 13, по которым масло из насоса 9 под давлением поступает в сервомотор, давя на поршень 6, в результате чего заслонка 7 опускается и уменьшает сечение трубопровода 8, по которому поступает горячая смесь в двигатель. Происходит уменьшение мощности двигателя и уравнивание движущих сил с силами сопротивления. Масло из-под поршня 6 при этом снова поступает в насос через трубопроводы 14 и 12, также соединенными при опускании поршеньков. Положение поршеньков золотника и направление потоков масла при этом показано на рис. 7.7, б.

При убывании скорости вращения вала все происходит в обратном порядке. Положение поршеньков золотника и направление потоков масла при этом показано на рис. 7.7, в.

Мы рассмотрели регуляторы, которые регулируют скорость движения, воздействуя на изменение движущих сил, уравнивая их с силами сопротивления. Иногда на практике применяются регуляторы другого типа, которые воздействуют на силы сопротивления, уравнивая их с движущими силами. Такие регуляторы называются **модераторами** или **регуляторами тормозного типа**. Принципиально их действие не отличается от действия описанных выше регуляторов.

## Раздел 8. УРАВНОВЕШИВАНИЕ МАСС

### 8.1. Общие положения

При движении механизма различные точки его звеньев движутся с ускорениями, в результате чего возникают силы инерции, которые вызывают дополнительные нагрузки в кинематических парах. Эти нагрузки, изменяясь по величине и направлению, передаются раме машины и фундаменту и вызывают их вибрацию, колебания и расшатывание. Особенно велики силы инерции и вызываемые ими нагрузки в современных быстроходных машинах.

Отсюда возникает задача о проектировании механизмов таким образом, чтобы избежать (полностью или частично) указанные нагрузки. Решение этой задачи достигается уравновешиванием сил Инерции и моментов этих сил с помощью рационального размещения и подбора масс звеньев механизма.

Различают две задачи:

- уравновешивание вращающихся масс;
- уравновешивание машин на фундаменте.

### 8.2. Уравновешивание вращающихся масс

Пусть звено, схема которого представлена в двух проекциях на рис. 8.1, вращается равномерно в подшипниках  $A$  и  $B$  с некоторой постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Центры тяжести масс  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  этого звена отстоят от оси вращения на расстояниях радиусов  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ .

Сила инерции каждой массы при равномерном вращении звена направлена вдоль радиуса от оси вращения и равна

$$\vec{F}_i = -m_i \vec{a}_{s_i} = -m_i \vec{r}_i \omega^2.$$

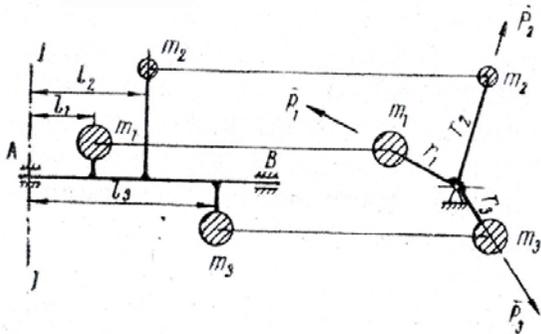


Рис. 8.1. Схема вращающегося звена, массы которого не уравновешены ни статически, ни динамически

Главный вектор сил инерции всех масс равен

$$\bar{F} = \sum m_i \bar{r}_i \omega^2.$$

Для того чтобы силы инерции не оказывали давления на опоры, необходимо, чтобы главный вектор был равен нулю:

$$\bar{F} = \sum m_i \bar{r}_i \omega^2 = 0$$

или

$$\sum m_i \bar{r}_i = 0. \quad (8.1)$$

Это условие называется **условием статической уравновешенности**.

Вектор  $\sum m_i \bar{r}_i$  называется **статическим моментом** и, как известно из механики, он равен

$$\sum m_i \bar{r}_i = m \bar{r}_S,$$

где  $m$  — масса всего звена;

$r_S$  — расстояние общего центра тяжести всех масс от оси вращения.

Поэтому статическая уравновешенность возможна, если общий центр тяжести звена лежит на оси вращения.

Для статического уравновешивания масс звена достаточно одной уравновешивающей массы.

Однако условия (8.1) недостаточно. Чтобы не было давления в опорах, кроме того, необходимо, чтобы сумма моментов этих сил, например, относительно плоскости  $I$ , была равна нулю:

$$\sum \bar{M}_i = 0. \quad (8.2)$$

Величина момента  $M_i$  равна произведению силы инерции  $P_i$  на плечо  $l_i$ :

$$M_i = P_i l_i = m_i r_i \omega^2 l_i.$$

Тогда при сокращении на величину  $\omega^2$  уравнение (8.2) примет вид

$$\sum \overline{m_i r_i l_i} = 0. \quad (8.2 a)$$

Это есть **условие динамического уравновешивания** вращающихся масс.

Вектор  $\overline{e_i m_i r_i l_i}$  представляет собой центробежный момент инерции масс относительно оси вращения и плоскости, перпендикулярной к оси вращения (плоскости  $I$ ). Этот момент может быть равен нулю, т. е. звено может быть динамически уравновешено, если, как это известно, из теоретической механики, ось вращения совпадает с одной из главных осей инерции.

Вектор  $\overline{M}_i$  (или  $\overline{m_i r_i l_i}$ ) направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения и соответствующий радиус, в сторону, определяемую правилом правого винта, т. е. если смотреть вдоль вектора, то момент от соответствующей силы инерции относительно плоскости  $I$  должен быть направлен по часовой стрелке (рис. 8.2).

Однако если все векторы уравнения (8.2 а) повернуть на  $90^\circ$ , то уравнение от этого не изменится, а векторы будут направлены параллельно соответствующим радиусам. Это значительно облегчает построение. Так будем поступать в дальнейшем.

Таким образом, звено будет полностью уравновешено, если выполняются уравнения (8.1) и (8.2 а).

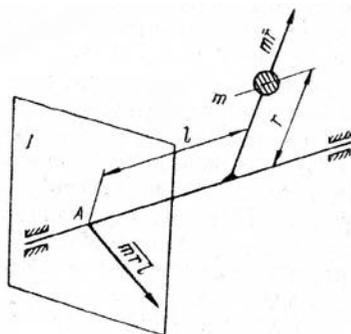


Рис. 8.2. К вопросу о направлении векторов  $\overline{m_i r_i}$  и  $\overline{m_i r_i l_i}$

### 8.3. Балансировка вращающихся масс

Правильно спроектированные с точки зрения уравновешенности звенья все же вследствие неоднородности материала, неточности изготовления, дефектов сборки могут оказаться на практике несколько неуравновешенными, что неблагоприятно сказывается при работе этих звеньев, особенно если они работают при больших числах оборотов.

Многие современные машины работают при очень больших скоростях. Например, обороты коленчатого вала двигателей внутреннего сгорания колеблются в пределах 2000—5000 об/мин, роторы электродвигателей имеют обороты от 1000 до 2000 об/мин, а обороты некоторых достигают 20000 об/мин и более, обороты валов реактивных двигателей 10000 об/мин, обороты валов некоторых гироскопических приборов и центрифуг 30000 об/мин. Поэтому даже незначительная неуравновешенность таких звеньев недопустима.

Мера неуравновешенности таких звеньев — их дисбаланс — должна быть обнаружена и устранена. На практике это достигается так называемой балансировкой, которая осуществляется на специальных приспособлениях и машинах.

Статическая неуравновешенность — несовпадение центра тяжести звена с осью вращения — может быть обнаружена простыми приспособлениями при нахождении звена в покое. Если положить статически неуравновешенное звено своей осью вращения на горизонтальные

призмы (рис. 8.3), то звено будет перекатываться на призмах до тех пор, пока центр тяжести звена не займет нижнее положение, т.е. будет расположен внизу на вертикали, проходящей через его ось вращения. Располагая уравновешивающую массу по этой же вертикали вверх (для этого можно применить, например, пластилин или другую какую-либо массу), при помощи ряда попыток устанавливают величину этой массы. Попытки проводятся до тех пор, пока звено будет занимать безразличное положение и не будет перекатываться по призмам. Затем уравновешивающие массы (противовесы) из металла или других материалов, масса которых равна массе пластилина, крепят на звене на определенном радиусе. Часто вместо установки противовесов с противоположной стороны удаляют часть металла звена (высверливают отверстия и др.). Иногда в качестве противовесов служит свинец, который заливают в специально высверленные отверстия.

Существуют и более сложные приборы для статического уравновешивания, у которых масса необходимого противовеса (и место, где он должен устанавливаться) определяется по показанию специального прибора.

Динамическая неуравновешенность не может быть установлена при нахождении звена в покое, так как силы инерции и их моменты возникают только при вращении звена. Поэтому динамическая балансировка производится на специальных балансировочных машинах или станках, на которых звену сообщается вращательное движение.

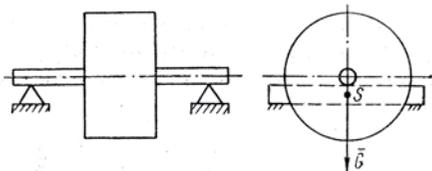


Рис. 8.3. Схема статической балансировки

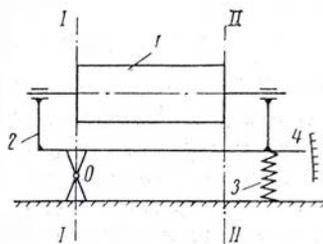


Рис. 8.4. Схема динамической балансировки

Принципиальная схема машины для динамической балансировки представлена на рис. 8.4. Балансируемому звену  $I$ , которое устанавливается в подшипниках на раме  $2$ , сообщается достаточно быстрое вращательное движение, в результате чего, если звено не уравновешено, возникают силы инерции. Эти силы воздействуют на раму, которая соединена шарниром  $O$  и пружиной  $3$  с неподвижной станиной, и вызывают ее колебание относительно шарнира. Максимальная амплитуда колебания, зависящая от величины дисбаланса, наступит тогда, когда наступит явление

резонанса, т.е. когда период вынужденных колебаний, зависящих от числа оборотов звена (числа оборотов звена после сообщения ему оборотов падают), совпадает с периодом собственных колебаний системы. Эта амплитуда регистрируется самописцем 4.

Запись амплитуды колебания рамы ведется при двух различных положениях звена на раме. После выбора плоскостей размещения противовесов (плоскости I и II) звено устанавливается на раме сначала так, чтобы плоскость I проходила через шарнир O. Затем опыт повторяется при повороте звена, когда плоскость II проходит через шарнир O. После записи амплитуд колебания определяют величины противовесов и направления, на которых их следует установить в плоскостях I и II. Отметим, что при этом одновременно производится и статическая и динамическая балансировка.

#### 8.4. Уравновешивание машин на фундаменте

Уравновесить силы инерции отдельных звеньев механизма, совершающих поступательное и общее движения, никаким распределением масс невозможно, так как центры тяжести таких звеньев движутся по замкнутым кривым (или совершают возвратно-поступательное движение) и, следовательно, всегда имеют ускорения.

Однако уравновесить силы инерции всех звеньев механизма одновременно оказывается возможным. Это можно достигнуть следующими способами:

- а) при помощи противовесов;
- б) при помощи рационального размещения звеньев механизма.

Рассмотрим первый способ.

Равнодействующая сил инерции всех звеньев механизма равна

$$\overline{F}_{II} = -m\overline{a}_S,$$

где  $m$  — масса всех звеньев механизма;  $\overline{a}_S$  — ускорение общего центра тяжести механизма.

Уравновесить эту равнодействующую, т.е. сделать ее равной нулю, можно только сделав общий центр тяжести механизма неподвижным ( $a_S=0$ ). Это можно достигнуть установкой на звеньях механизма ряда противовесов.

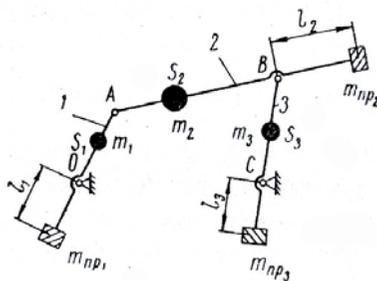


Рис. 8.5. Расположение противовесов при уравновешивании сил инерции шарнирного четырехзвенника

Рассмотрим этот способ на примере шарнирного четырехзвенника (рис. 8.5). Размеры звеньев  $l_{OA}$ ,  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ , положения их центров тяжести  $l_{OS_1}$ ,  $l_{AS_2}$ ,  $l_{CS_3}$  и их массы  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  являются заданными.

Размещение противовеса ведем следующими этапами:

1. На продолжении (вниз) звена  $OA$  на некотором расстоянии  $l_1$  от точки  $O$  устанавливаем противовес массой  $m_{np1}$  таким образом, чтобы центр тяжести звена 1 вместе с противовесом совпал с неподвижной точкой  $O$ . Для этого должно быть соблюдено равенство

$$m_{np1} l_1 = m_1 l_{OS_1}.$$

Задаваясь из конструктивных соображений расстоянием  $l_1$ , легко определить массу противовеса

$$m_{np1} = \frac{m_1 l_{OS_1}}{l_1}.$$

2. На продолжении звена  $AB$  (вправо) на некотором расстоянии  $l_2$  от точки  $B$  устанавливаем противовес массой  $m_{np2}$  таким образом, чтобы центр тяжести звена 2 вместе с противовесом совпал с точкой  $B$ . Для этого должно быть соблюдено равенство

$$m_{np2} l_2 = m_2 l_{BS_2},$$

Задаваясь расстоянием  $l_2$ , определяем массу противовеса

$$m_{np2} = \frac{m_2 l_{BS_2}}{l_2}.$$

3. На продолжении звена  $BC$  (вниз) на некотором расстоянии  $l_3$  от точки  $C$  устанавливаем противовес массой  $m_{np3}$  таким образом, чтобы центр тяжести звеньев 2 и 3 вместе с противовесами совпал с точкой  $C$ . Для этого должно быть соблюдено равенство

$$m_{np3} = m_B l_{BC} + m_3 l_{CS_3},$$

где  $m_B = m_2 + m_{np2}$  есть масса звена 2 вместе с противовесом, центр тяжести которой совпадает с точкой  $B$ . Задаваясь величиной  $l_3$ , получим

$$m_{np3} = \frac{m_B l_{BC} + m_3 l_{CS_3}}{l_3}.$$

Таким образом, центр масс звена 1 вместе со своим противовесом совпадает с неподвижной точкой  $O$ , центр масс звеньев 2 и 3 вместе с их противовесами совпадает с неподвижной точкой  $C$ . Следовательно, центр всех масс будет также совпадать с неподвижной точкой (определять эту точку нам нет необходимости), и результирующая сил инерции будет

равна нулю, т.е. на фундамент не будут оказывать давление дополнительные силы.

Необходимо отметить, что при уравнивании при помощи противовесов механизмов уравниваются только силы инерции звеньев. Моменты сил инерции не уравниваются.

Описанное полное уравнивание сил инерции механизмов ввиду громоздкости не всегда возможно применить по конструктивным соображениям. Поэтому, несмотря на все его достоинства, оно используется редко. На практике чаще применяется частичное уравнивание сил инерции, при котором производится уравнивание только части сил инерции.

Силы инерции поступательно движущихся масс кривошипно-ползунного механизма можно уравновесить силами инерции масс, устанавливаемых на специальных зубчатых колесах, обороты которых связаны с оборотами кривошипа (рис. 8.6).

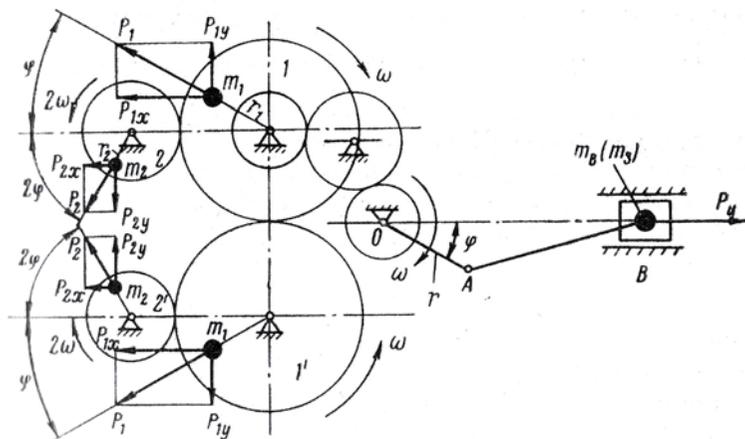


Рис. 8.6. Уравнивание поступательно движущихся масс кривошипно-ползунного механизма путем установки противовесов на специальных зубчатых колесах

Действительно, сила инерции поступательно движущихся масс по величине равна

$$F_{II} = m_B a_B$$

или, учитывая формулу (2. 23) (раздел 2, 2. 11),

$$F_{II} = m_B \omega^2 r (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (8.3)$$

Свяжем теперь с валом кривошипа зубчатые колеса 1, 1' и 2, 2' так, чтобы колеса 1 и 1' вращались с такой же по величине угловой скоростью, как кривошип, но в противоположные друг другу стороны, а колеса

2 и 2' — тоже в противоположные друг другу стороны, но в два раза быстрее. Установим на колесах 1 и 1' под углами  $\varphi$  к горизонтали (угол  $\varphi$  должен быть таким же, как угол между кривошипом и горизонталью) противовесы с массами  $m_1$ , а на колесах 2 и 2' под углами  $2\varphi$  к горизонтали — противовесы с массами  $m_2$  (так как колеса 2 и 2' вращаются в два раза быстрее, чем колеса 1 и 1', то угол отклонения направления противовесов от горизонтали у колес 2 и 2' будет всегда в два раза больше, чем у колес 1 и 1'). Тогда силы инерции этих противовесов будут по величине равны:

$$F_1 = m_1 \omega^2 r_1; \quad F_2 = m_2 (2\omega)^2 r_2.$$

Разложим эти силы на вертикальные и горизонтальные составляющие:

$$F_{1y} = m_1 \omega^2 r_1 \sin \varphi; \quad F_{1x} = m_1 \omega^2 r_1 \cos \varphi;$$

$$F_{2y} = 4m_2 \omega^2 r_2 \sin 2\varphi; \quad F_{2x} = 4m_2 \omega^2 r_2 \cos 2\varphi;$$

Вертикальные составляющие сил инерции всех колес попарно уравновешиваются.

Сумма всех горизонтальных составляющих сил инерции противовесов равна

$$F_x = 2m_1 \omega^2 r_1 \cos \varphi + 8m_2 \omega^2 r_2 \cos 2\varphi.$$

Сравнивая эту силу с силой инерции поступательно движущихся (8.3) масс, видно, что при правильном выборе величин уравновешивающих масс  $m_1$  и  $m_2$  можно добиться уравновешивания сил инерции ползуна. Приравняем силы  $F_x$  и  $F_u$ . Сокращая на  $\omega^2$ , получим

$$2m_1 r_1 \cos \varphi + 8m_2 r_2 \cos 2\varphi = m_B r \cos \varphi + m_B \lambda r \cos 2\varphi.$$

Приравнивая величины коэффициентов при  $\cos \varphi$  и  $\cos 2\varphi$ , легко определить величины масс противовесов:

$$2m_1 r_1 = m_B r; \quad 8m_2 r_2 = m_B \lambda r,$$

откуда, задавая величинами радиусов  $r_1$  и  $r_2$ , на которых следует установить противовесы, получим:

$$m_1 = \frac{m_B r}{2r_1}; \quad m_2 = \frac{m_B \lambda r}{8r_2}.$$

Рассмотрим уравновешивание механизмов методом рационального размещения звеньев.

Схемы таких кривошипно-ползунного и шарнирного четырехзвенного механизмов изображены на рис. 8.7 и 8.8. Как видно, в этих механизмах к ведущему звену 1 симметрично присоединены по две одинаковые группы Ассур (2, 3) и (2', 3'), благодаря чему силы инерции соответствующих симметрично расположенных звеньев равны по величине, но

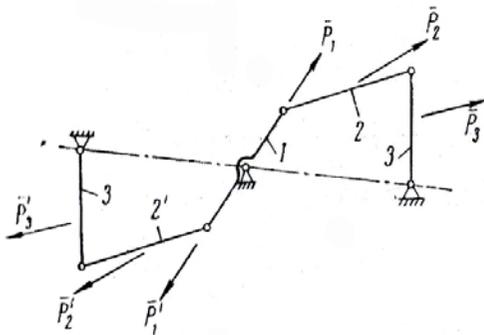


Рис. 8.7. Уравновешивание масс шарнирного четырехзвенника методом рационального размещения звеньев

например, ставить дополнительную группу Ассура только для уравновешивания машины, если для ее работы достаточно только одной группы Ассура. Поэтому такое уравновешивание на практике применяется редко. Оно целесообразно только в случаях, когда в машине работают оба симметричных механизма (обе группы Ассура), например, в многоцилиндровых двигателях внутреннего сгорания и др.

обратны по направлению, т.е. попарно уравновешиваются. Поэтому равнодействующая всех сил инерции равна нулю. Однако моменты сил инерции звеньев здесь так же, как и при уравновешивании при помощи противовесов, не уравновешиваются.

Конечно, такое размещение звеньев механизма очень громоздко и не всегда целесообразно. Зачем,

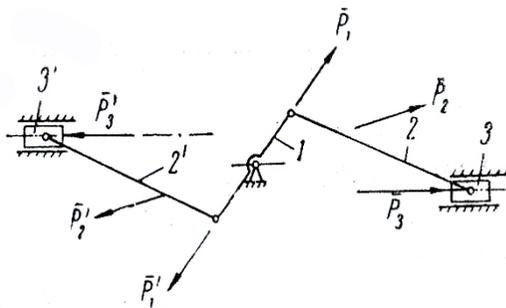


Рис. 8.8. Уравновешивание масс кривоштанно-ползунного механизма методом рационального размещения звеньев

Таблица значений инволют  $\Theta = inv \alpha$ 

$\alpha^\circ$	Порядок	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$
1	0,000	00177	00225	00281	00346	00420	00504
2	0,000	01418	01603	01804	02020	02253	02503
3	0,000	04790	05201	05634	06091	06573	07078
4	0,000	11364	12090	12847	13634	14453	15305
5	0,000	22220	23352	24522	25731	26978	28266
6	0,00	03845	04008	04175	04347	04524	04706
7	0,00	06115	06337	06564	06797	07035	07279
8	0,00	09145	09435	09732	10034	10343	10659
9	0,00	13048	13416	13792	14174	14563	14960
10	0,00	17941	17397	18860	19332	19812	20299
11	0,00	23941	24495	25057	25628	26208	26797
12	0,00	31171	31832	32504	33185	33875	34555
13	0,00	39754	40534	41325	42126	42938	43760
14	0,00	49819	50729	51650	52582	53526	54482
15	0,00	61488	62548	63611	64686	65773	66873

Продолжение табл.

$\alpha^\circ$	Порядок	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$
16	0,0	07493	07613	07635	07857	07982	08107
17	0,0	09025	09161	09299	09439	09580	09722
18	0,0	10760	10915	11071	11228	11387	11547
19	0,0	12715	12888	13063	13240	13418	13598
20	0,0	14904	15098	15293	15490	15689	15890
21	0,0	17345	17560	17777	17996	18217	18440
22	0,0	20054	20292	20533	20775	21019	21266
23	0,0	23044	23312	23577	23845	24114	24386
24	0,0	26350	26639	26931	27225	27421	27820
25	0,0	29975	30293	30613	30935	31260	31587
26	0,0	33947	34294	34644	34997	35352	35709
27	0,0	38297	38666	39047	39432	39819	40209
28	0,0	43017	43430	43845	44264	44685	45110
29	0,0	48164	48612	49064	49518	49946	50437
30	0,0	53761	54238	54728	55221	55717	56217

Продолжение табл.

$\alpha^\circ$	Порядок	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$
31	0,0	58809	60335	60856	61600	61937	62478
32	0,0	66364	66934	65707	68080	68665	69250
33	0,0	73449	74064	74684	75307	75934	76565
34	0,0	81097	81760	82428	83100	83777	84457
35	0,0	89342	90058	90777	91502	92230	92963
36	0,0	09822	09899	09977	10055	10133	10212
37	0	10778	10861	10944	11028	11113	11197
38	0	11806	11895	11985	12075	12165	12257
39	0	22911	13006	13102	13199	13297	13395
40	0	14097	14200	14303	14407	14511	14616
41	0	15370	15408	15591	15703	15815	15928
42	0	16737	16855	16974	17093	17214	17335
43	0	18202	18329	18457	18585	18714	18844
44	0	19774	19910	20047	20185	20323	20463
45	0	21460	21606	21753	21900	22049	22198

Продолжение табл.

$\alpha^\circ$	Порядок	0°	5°	10°	15°	20°	25°
46	0	23268	23424	23582	23740	23899	24059
47	0	25206	25374	25543	25713	25883	26055
48	0	27285	27465	27646	27828	28012	28196
49	0	29516	29709	29903	30098	30295	30492
50	0	31909	32116	32324	32534	32745	32957
51	0	34478	34700	34924	35149	36376	35604
52	0	37237	47476	37716	37958	38202	38446
53	0	40202	40459	40717	40977	31239	41502

Продолжение табл.

$\alpha^\circ$	Порядок	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$
1	0,000	00598	00704	00821	00950	01092	01248
2	0,000	02771	03058	03384	03689	04035	04402
3	0,000	07610	08167	08751	09362	1000	10668
4	0,000	16189	17107	18059	19045	20067	21125
5	0,000	29594	30963	32394	33827	35324	16864
6	0,00	04892	05083	05280	05481	05687	05898
7	0,00	07528	07783	08044	08310	08582	08861
8	0,00	10980	11308	11643	11984	12332	12687
9	0,00	15363	15774	16193	16618	17051	17492
10	0,00	20795	21299	21810	22330	22859	23396
11	0,00	27394	28001	28016	29241	29875	30518
12	0,00	35285	36005	36735	37474	38224	38984
13	0,00	44553	45437	46291	47157	48033	48921
14	0,00	51448	56427	57117	58420	59434	60460
15	0,00	67985	69110	70248	71398	72561	73738

Продолжение табл.

$\alpha^\circ$	Порядок	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$
16	0,00	08234	08362	08492	08623	08756	68889
17	0,00	09866	10012	10158	10307	10456	10608
18	0,0	11709	11873	12038	12205	02373	12543
19	0,0	13779	13963	14148	14334	14523	14713
20	0,0	16082	16296	16502	16710	16920	17132
21	0,0	18665	18891	19120	19350	19583	19817
22	0,0	21514	21765	22018	22272	22529	22788
23	0,0	21660	24936	25214	25495	25778	26062
24	0,0	28121	28424	28729	29037	29348	29660
25	0,0	31917	32249	32583	32920	33260	33602
26	0,0	36069	36432	36787	37166	37537	37910
27	0,0	40602	40397	41395	41797	42201	42607
28	0,0	40537	45967	46400	46837	47276	47718
29	0,0	50901	51363	51838	52312	52788	53268
30	0,0	56720	57226	57736	58249	58765	59285

Продолжение табл.

$\alpha^\circ$	Порядок	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$
31	0,0	63022	63570	64122	64677	65236	65798
32	0,0	69838	70430	71026	71626	72230	72838
33	0,0	77200	77839	78483	79130	79781	80437
34	0,0	85142	85832	86525	87223	87925	88631
35	0,0	63701	94443	95190	95942	96698	97450
36	0	10292	10371	10452	10533	10614	10696
37	0	11283	11369	11455	11542	11630	11718
38	0	12348	12441	12534	12627	12721	12715
39	0	13493	13592	13692	13792	13893	13995
40	0	14722	14829	14936	15043	15152	15261
41	0	16041	16156	16270	16386	16502	16619
42	0	17457	17579	17702	17826	17931	18076
43	0	18975	19106	19238	19371	19905	19639
44	0	20603	20743	20885	21028	21171	21315
45	0	22348	22499	22651	21804	21908	23112

Окончание табл.

$\alpha^\circ$	Порядок	0°	5°	10°	15°	20°	25°
46	0	24220	24382	24545	24709	24874	25040
47	0	26228	26401	26576	26752	26929	27107
48	0	23381	28567	28755	28943	29133	29324
49	0	30691	30891	31092	31295	31498	31703
50	0	33171	33385	33601	33818	34637	34257
51	0	35833	36063	36925	36529	36763	36999
52	0	38693	38941	39190	39441	39603	39947
53	0	41767	42034	42302	42571	42843	43116

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Теория механизмов и механика машин: учебник для вузов / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.; под ред. К.В. Фролова.- 4-е изд., испр.- М.: Высш. шк., 2003. - 496 с.
2. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин: учебник для вузов / И.И. Артоболевский.- Изд. 5-е, стер., перепеч. с изд. 1988 г.- М.: Альянс, 2011. - 639 с.
3. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин: учеб. пособие для вузов / А.С. Коренько, Л.И. Кременштейн, С.Д. Петровский [ и др. ].- Изд. 6-е, стер.; перепеч. с изд. 1970 г.- М.: [Медиа Стар], 2006. - 330 с.
4. Попов, С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин: учеб. пособие для вузов/ С.А. Попов, Г.А. Тимофеев; под ред. К.В. Фролова.-Изд. 5-е, перераб. и доп.- М.: Высш. шк., 2004. - 458 с.
5. Механика машин: учебн. пособие для вузов / под ред. Г.А. Смирнова.- М.: Высш. шк., 2004. - 458 с.
6. Левитская, О.Н. Курс теории механизмов и машин: учебн. пособие для механ. спец. вузов/ О.Н. Левитская, Н.И. Левитский.- 2-е изд., перераб. и доп.- М.: Высш. шк., 1985. - 279 с.
7. Осипов, Ю.Р. Прикладная механика. Учебное пособие: Ч.-1 / Ю.Р. Осипов.- Вологда: ВоГТУ, 2011. - 204 с.
8. Осипов, Ю.Р. Прикладная механика. Исследования кинематики и динамики плоских механизмов на ЭВМ / Ю.Р. Осипов.- Вологда: ВоГТУ, 2003. - 186 с.

## Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	2
Раздел 1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ .....	4
1.1. Кинематическая пара .....	4
1.2. Классификация кинематических пар.....	4
1.3. Кинематические цепи .....	8
1.4. Степень подвижности плоской кинематической цепи .....	9
1.5. Механизм .....	10
1.6. Принцип образования механизмов. Группы Ассура.....	11
1.7. Классификация механизмов. Их строение .....	15
1.8. Замена высших кинематических пар в механизмах низшими .....	16
Раздел 2. Кинематическое исследование плоских механизмов с низшими кинематическими парами .....	19
2.1. Общие положения .....	19
2.2. Масштабные коэффициенты.....	19

2.3. Построение планов положений механизмов. Построение траекторий .....	21
2.4. Определение крайних положений звеньев механизма.....	24
2.5. Основные уравнения для определения скоростей и ускорений.....	27
2.6. Построение планов скоростей и ускорений.....	32
2.7. Теоремы подобия для планов скоростей и ускорений.....	38
2.8. Кинематические диаграммы.....	40
2.9. Графическое дифференцирование.....	45
2.10. Графическое интегрирование.....	50
2.11. Аналитическое исследование механизмов .....	51
Раздел 3. Кулачковые механизмы .....	54
3.1. Общие положения .....	54
3.2. Определение положений кулачковых механизмов .....	57
3.3. Определение скоростей и ускорений толкателя.....	64
3.4. Выбор закона движения толкателя.....	67
3.5. Профилирование кулачков.....	71
3.6. Определение размера минимального радиуса профиля кулачка с учетом угла давления .....	79
Раздел 4. Теория зубчатого зацепления .....	85
4.1. Общие положения .....	85
4.2. Начальные окружности.....	88
4.3. Основная теорема зацепления.....	89
4.4. Эвольвента окружности и ее свойства. Уравнение эвольвенты .....	91
4.5. Эвольвентное зацепление.....	93
4.6. Основные геометрические параметры нормальных зубчатых колес.....	98
4.7. Построение нормального зубчатого зацепления.....	100
4.8. Линия зацепления. Дуга зацепления. Коэффициент перекрытия ..	104
4.9. Явление подрезания зубьев. Минимальное количество зубьев .....	109
4.10. Некоторые сведения о методах изготовления зубчатых колес .....	113
4.11. Корригирование зубчатых колес .....	115
4.12. Корригирование методом смещения инструментальной рейки.....	122
4.13. Смещение инструментальной рейки при нарезании зубчатых колес с количеством зубьев меньше $Z_{min}$ .....	124
4.14. Выбор смещения рейки .....	125
4.15. Косозубые цилиндрические колеса .....	130
Раздел 5. Силовое исследование плоских механизмов с низшими кинематическими парами.....	130
5.1. Внешние силы .....	132
5.2. Силы инерции.....	139
5.3. Условие статической определенности кинематической цепи .....	141
5.4. Силовой расчет группы Ассур I класса 1-го вида .....	145
5.5. Силовой расчет группы Ассур I класса 2-го вида .....	148
5.6. Порядок силового расчета групп Ассур I класса, 3, 4 и 5-го видов.....	150
5.7. Силовой расчет кривошипа (ведущего звена).....	153
5.8. Теорема Н. Е. Жуковского о «жестком рычаге» .....	156
Раздел 6. Движение механизма под действием заданных сил .....	156
6.1. Общие положения .....	158
6.2. Работа сил и моментов сил. Приведенная сила. Приведенный момент силы .....	158

6.3. Кинетическая энергия механизма. Приведенная масса. Приведенный момент инерции .....	160
6.4. Уравнение движения машины .....	162
6.5. Уравнение движения в дифференциальной форме .....	164
6.6. Неравномерность движения машины. Различные периоды и режимы движения машины .....	166
6.7. Средняя скорость машины. Коэффициент неравномерности хода машины.....	169
6.8. Диаграмма $E=f(I_{пр})$ .....	170
Раздел 7. Регулирование движения машин.....	173
7.1. Общие положения .....	173
7.2. Определение момента инерции маховика при постоянном приведенном моменте инерции механизма .....	174
7.3. Расчет момента инерции маховика при переменном приведенном моменте инерции механизма по диаграмме $E=f(I_{пр})$ .....	177
7.4. Регулирование неравномерного непериодического движения. Регуляторы и принцип их действия.....	181
Раздел 8. Уравновешивание масс .....	185
8.1. Общие положения .....	185
8.2. Уравновешивание вращающихся масс.....	185
8.3. Балансировка вращающихся масс .....	187
8.4. Уравновешивание машин на фундаменте.....	189
Библиографический список .....	202

Учебное издание

**Юрий Романович Осипов**

**ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

Учебное пособие

Редактор Л.А. Перерукова

Подписано в печать 6.11.2013 г.  
Формат 60х90/16. Бумага офисная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,75.  
Тираж экз. Заказ .

Отпечатано: РИО ВоГТУ  
160000, г. Вологда, ул. Ленина, 15.