

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛОГОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Сопротивление материалов»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Задания и методические указания
к расчетно-проектировочным работам,
контрольные вопросы для защиты, примеры задач*

Часть 1

Факультет производственного менеджмента и инновационных технологий

Направление подготовки: **23.03.03** – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов;

Профиль подготовки: автомобили и автомобильное хозяйство

Направление подготовки: **15.03.02** – Технологические машины и оборудование;

Профиль подготовки: машины и оборудование лесного комплекса

Вологда
2014

УДК: 620.1

Сопротивление материалов: задания и методические указания к расчетно-проектировочным работам, контрольные вопросы для защиты, примеры задач. Ч. 1. – Вологда: ВоГУ, 2014. – 43 с.

В методических указаниях даны общие указания о порядке выполнения расчетно-проектировочных работ, расчетные схемы и данные к задачам, вопросы для защиты РПР, примеры решения задач.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Составители: В.А. Шапкина, доцент
И.И. Комиссарова, доцент

Рецензент А.А. Богомолов, канд. техн. наук, доцент

ВВЕДЕНИЕ

В методические указания включены задачи расчетно-проектировочных работ (РПР) по курсу «Соппротивление материалов», указания к их выполнению, отдельные справочные данные, вопросы к защите РПР и примеры задач по темам РПР.

Перечень расчетно-проектировочных работ охватывает основные разделы 1 части курса, по которым специалист должен иметь необходимые знания и умения: геометрические характеристики поперечного сечения; растяжение или сжатие стержней (статически определимых и статически неопределимых); прямой плоский изгиб балок и рам.

Каждый студент выполняет индивидуальное задание в соответствии с номером варианта.

При выполнении расчетно-проектировочных работ рекомендуется следующее:

- предварительно изучить соответствующий теоретический материал курса;
- записать условие задания с численными значениями параметров;
- начертить расчетную схему с указанием на чертеже числовых значений нагрузок и размеров;
- выполнить необходимые расчеты в десятичных дробях, оставляя три значащие цифры;
- рисунки и расчеты выполнять на отдельных листах формата А4 (210*297мм);
- эпюры внутренних усилий, напряжений, перемещений строить на одном листе под расчетной схемой; на эпюрах указывать числовые значения соответствующих ординат и единицы их измерения, знаки проставлять внутри эпюры.

Защита расчетно-проектировочных работ состоит в ответах на контрольные вопросы и в умении решать задачи по их тематике.

Примечание. Основные положения теории, относящиеся к данной теме курса, находятся, прежде всего, в конспектах лекций. Полное изложение всех разделов содержится в учебнике [1] и, а примеры решения задач в учебных пособиях [2], [3], [4].
Успехов!

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

Задача 1А. Центральное растяжение и сжатие статически определимого ступенчатого стержня (рис. 1.1).

Ступенчатый стержень находится под действием продольных расчетных сил. Материал стержня – сталь. Исходные данные приведены в таблице 1.1.

Требуется:

1. Построить эпюру продольных сил.
2. Построить эпюру нормальных напряжений по длине бруса.
3. Проверить прочность бруса.
4. Построить эпюру перемещений сечений бруса.

Примечания: – точки приложения сил располагаются либо на границах участков, либо в середине участка,
 – модуль упругости материала (сталь) $E=2 \cdot 10^5$ МПа,
 – допускаемое напряжение стали на растяжение $[\sigma]=160$ МПа.

Таблица 1.1

Исходные данные к задачам 1А и 1Б

№ группы	Длина участка, м			Площадь поперечного сечения, см ²			Нагрузка, кН					
	l_1	l_2	l_3	A_1	A_2	A_3	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	0,6	0,5	0,7	10	8	12	80	70	65	140	100	88
2	0,5	0,4	0,8	8	10	6	100	80	70	65	50	120
3	0,7	0,8	0,4	10	12	8	80	60	50	80	70	55
4	0,4	0,7	0,5	12	6	14	120	85	120	160	130	70
5	0,8	0,6	0,3	14	4	8	80	40	160	50	60	86

Схемы к работе 1А

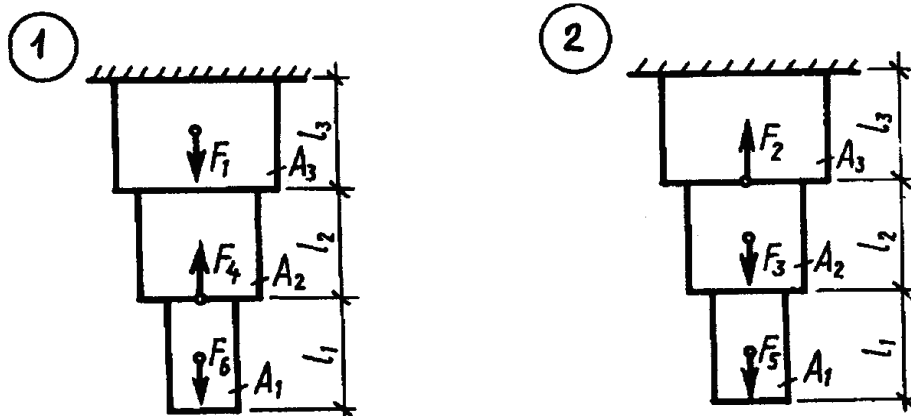


Рис. 1.1

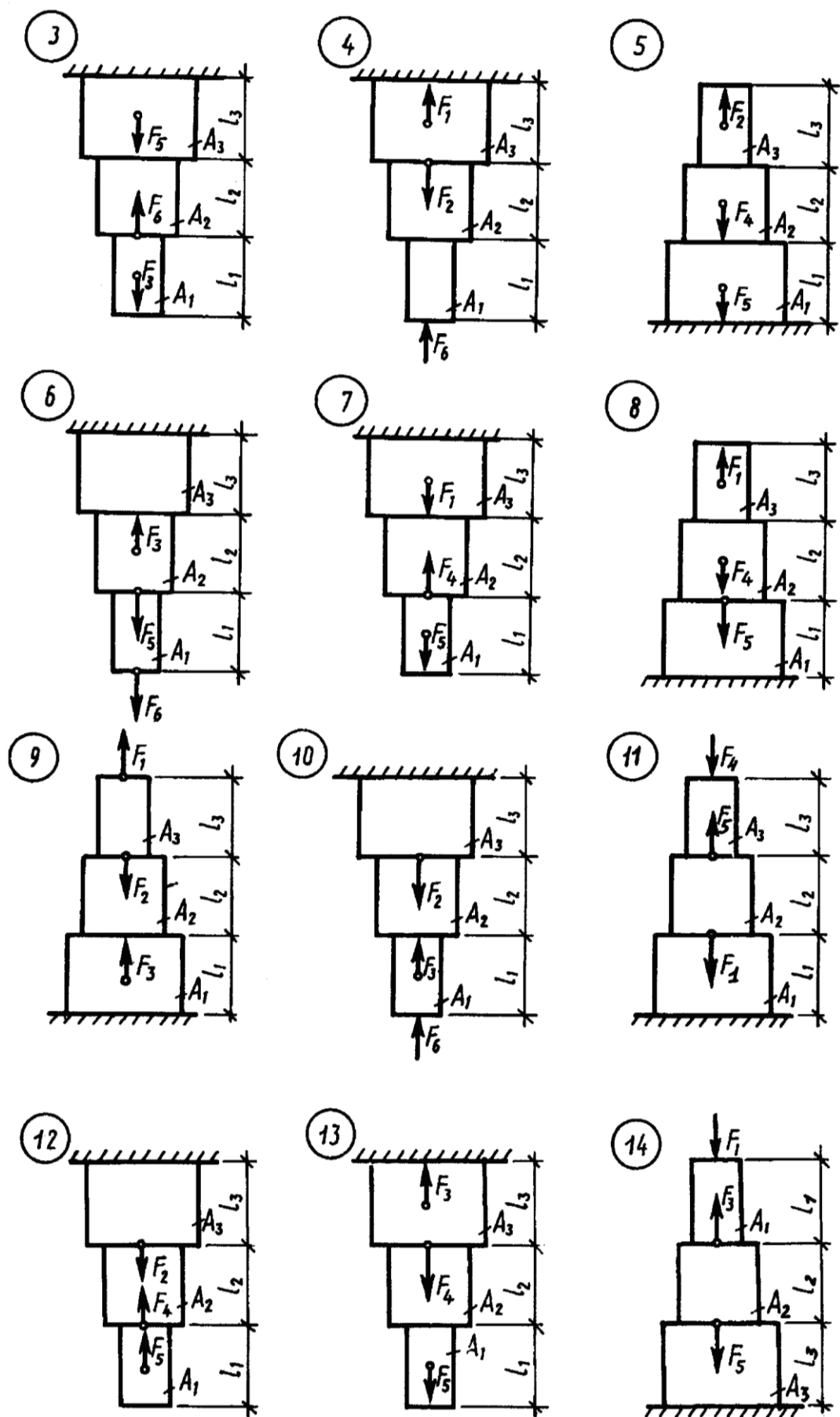


Рис. 1.1

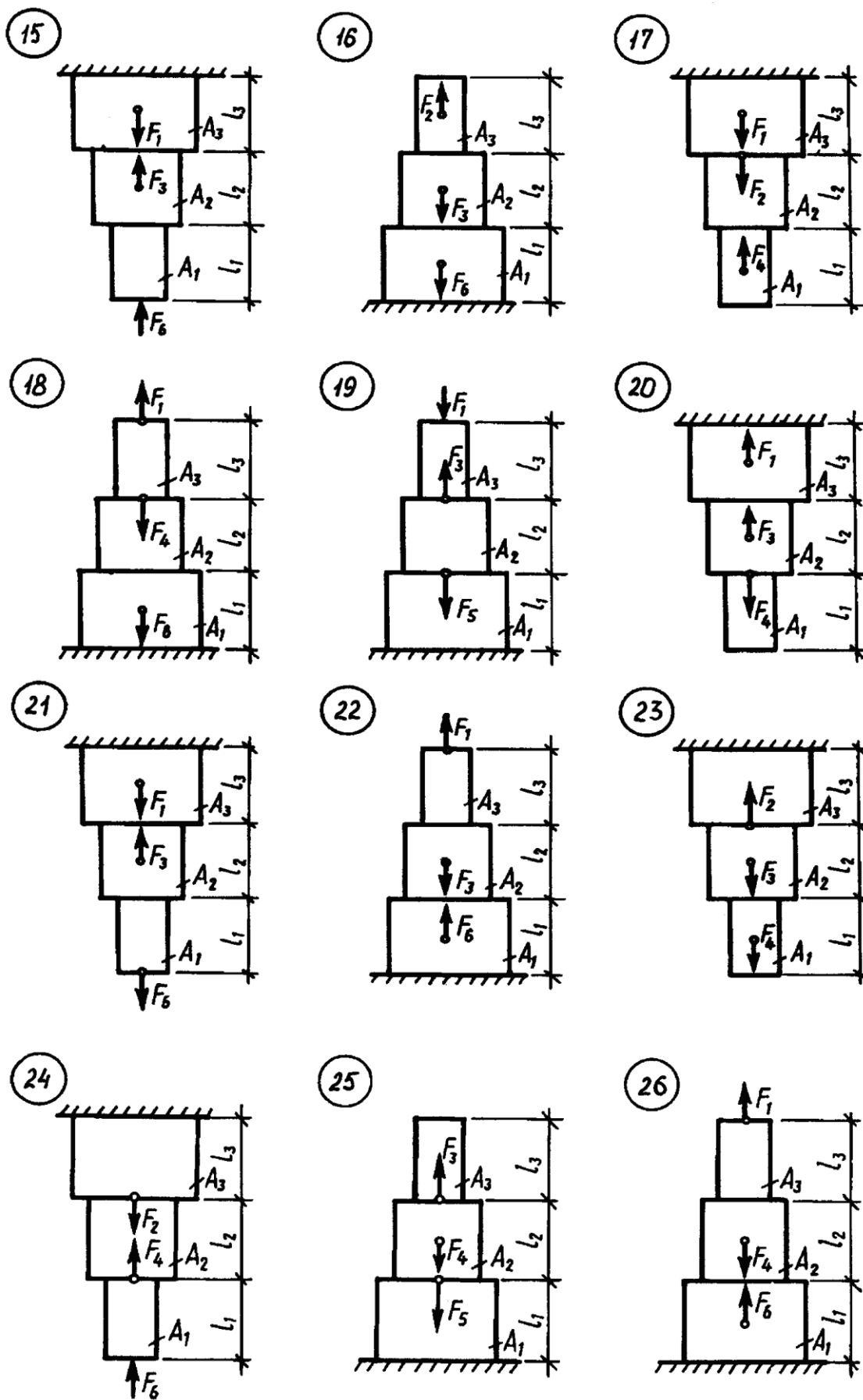


Рис. 1.1

Задача 1Б. Центральное растяжение и сжатие статически неопределимого ступенчатого стержня (рис. 1.2)

Ступенчатый стержень нагружен продольными расчетными силами. Материал стержня – сталь, зазор $\Delta=0.1$ мм. Исходные данные приведены в таблице 1.1.

Требуется:

1. Построить эпюру продольных сил.
2. Построить эпюру нормальных напряжений по длине бруса.
3. Проверить прочность бруса.
4. Построить эпюру перемещений сечений бруса.

Примечания: – точки приложения сил располагаются либо на границах участков, либо в середине участка,
 – модуль упругости материала (сталь) $E=2 \cdot 10^5$ МПа,
 – допускаемое напряжение стали на растяжение $[\sigma]=160$ МПа.

Схемы к работе 1Б

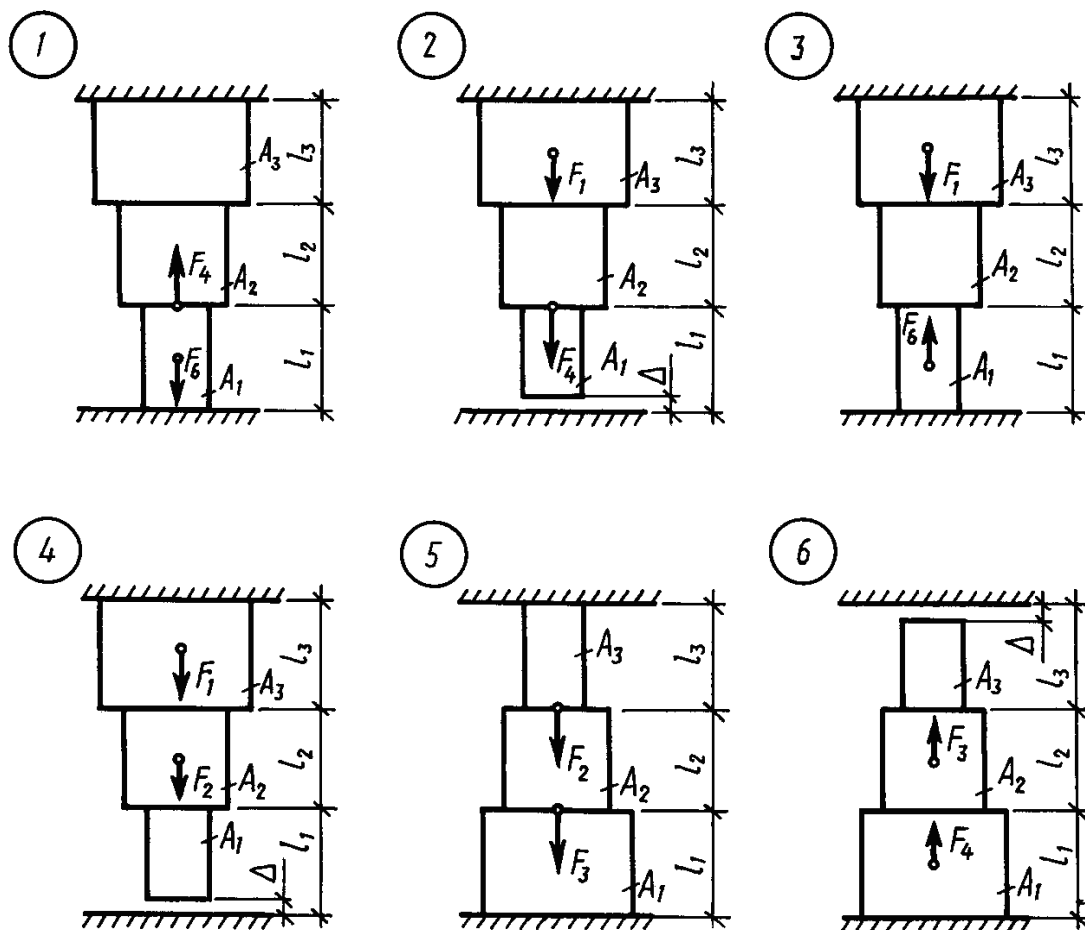


Рис. 1.2

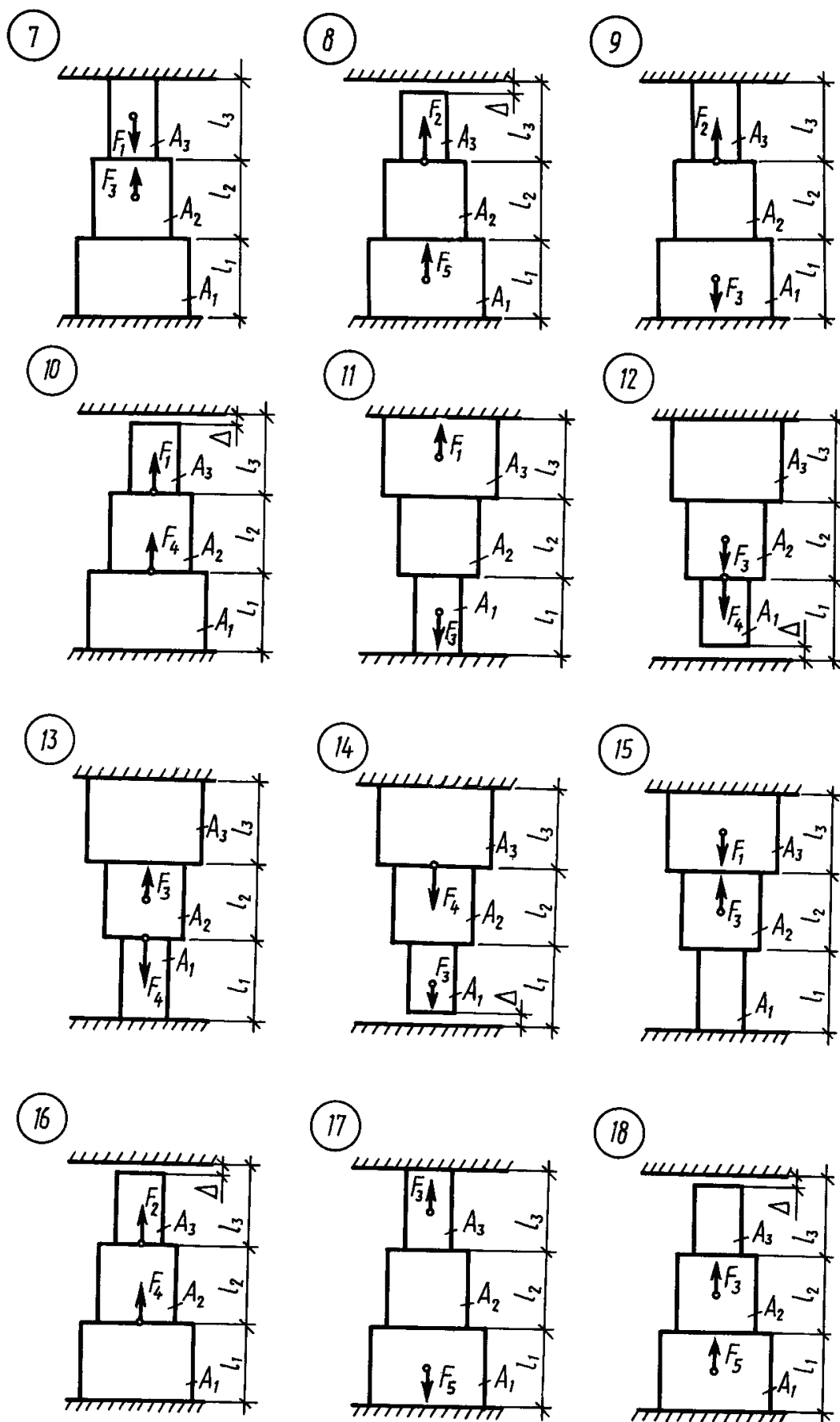


Рис. 1.2

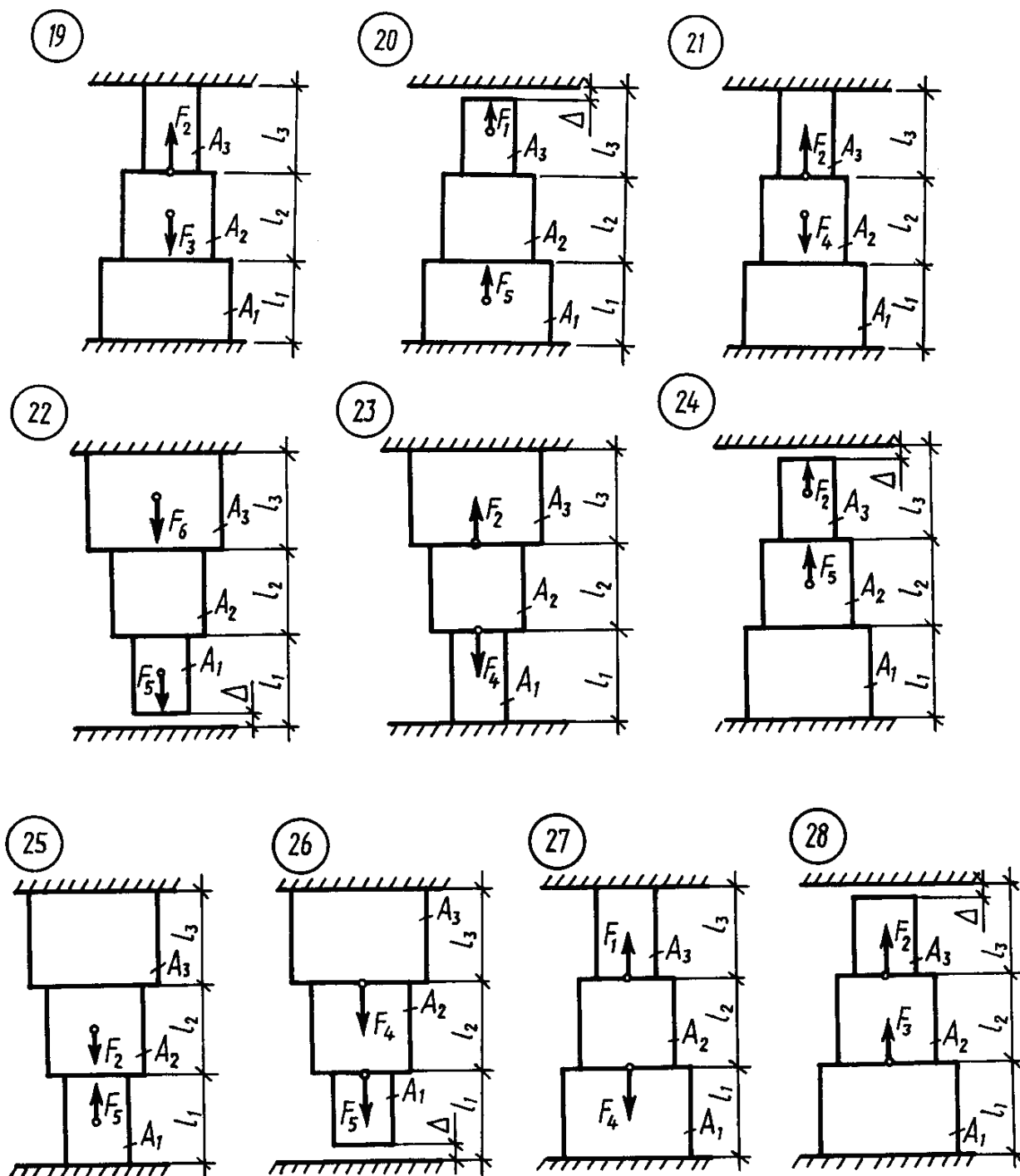


Рис. 1.2

Задача 1В. Статически неопределимые стержневые системы (рис. 1.3).

На систему, состоящую из элемента большой жесткости и двух стальных стержней, действует расчетная нагрузка.

Требуется: определить напряжения в стержнях при заданных значениях нагрузки и площадях сечений стержней.

Таблица 1.2

Исходные данные

№ группы	Нагрузка			Длины участков элемента и стержней, м					Площадь сечения, см ²		Угол, град	
	кН	кН	кН/м	a	b	c	l_1	l_2	A_1	A_2	α_1	α_2
	F_1	F_2	q									
1	-	50	-	5,4	2,6	1,6	1,0	1,2	6	8	90	45
2	30	-	-	5,2	2,8	1,2	1,4	1,0	8	12	30	90
3	12	-	-	4,6	2,4	1,8	1,2	1,4	10	6	135	90
4	-	-	10	4,4	3,2	1,0	1,0	1,4	12	8	90	120
5	-	25	-	4,8	3,0	1,4	1,2	1,6	8	10	60	90

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЩИТЕ ЗАДАЧ 1А, 1Б и 1В

1. Что такое внутренние силы? Порядок их определения методом сечений.
2. Какой вид сопротивления называют центральным растяжением-сжатием?
3. Что такое продольная сила в сечении? Правило её знаков.
4. Что такое напряжение в точке? Формула нормальных напряжений при растяжении-сжатии.
5. Какое напряжение считают опасным (предельным) для пластичных материалов?
6. Какие напряжения считают опасными для хрупкого материала?
7. Допускаемое напряжение для пластичного материала при растяжении и при сжатии.
8. Допускаемые напряжения для хрупкого материала при растяжении и при сжатии.
9. Условие прочности при растяжении-сжатии бруса из пластичного материала.
10. Закон Гука при растяжении-сжатии.
11. Закон Пуассона. Возможные значения коэффициента Пуассона.
12. Абсолютная и относительная деформации. Связь между ними. Как они вычисляются?
13. Что такое перемещение сечения бруса при растяжении-сжатии?

Схемы к работе 1В

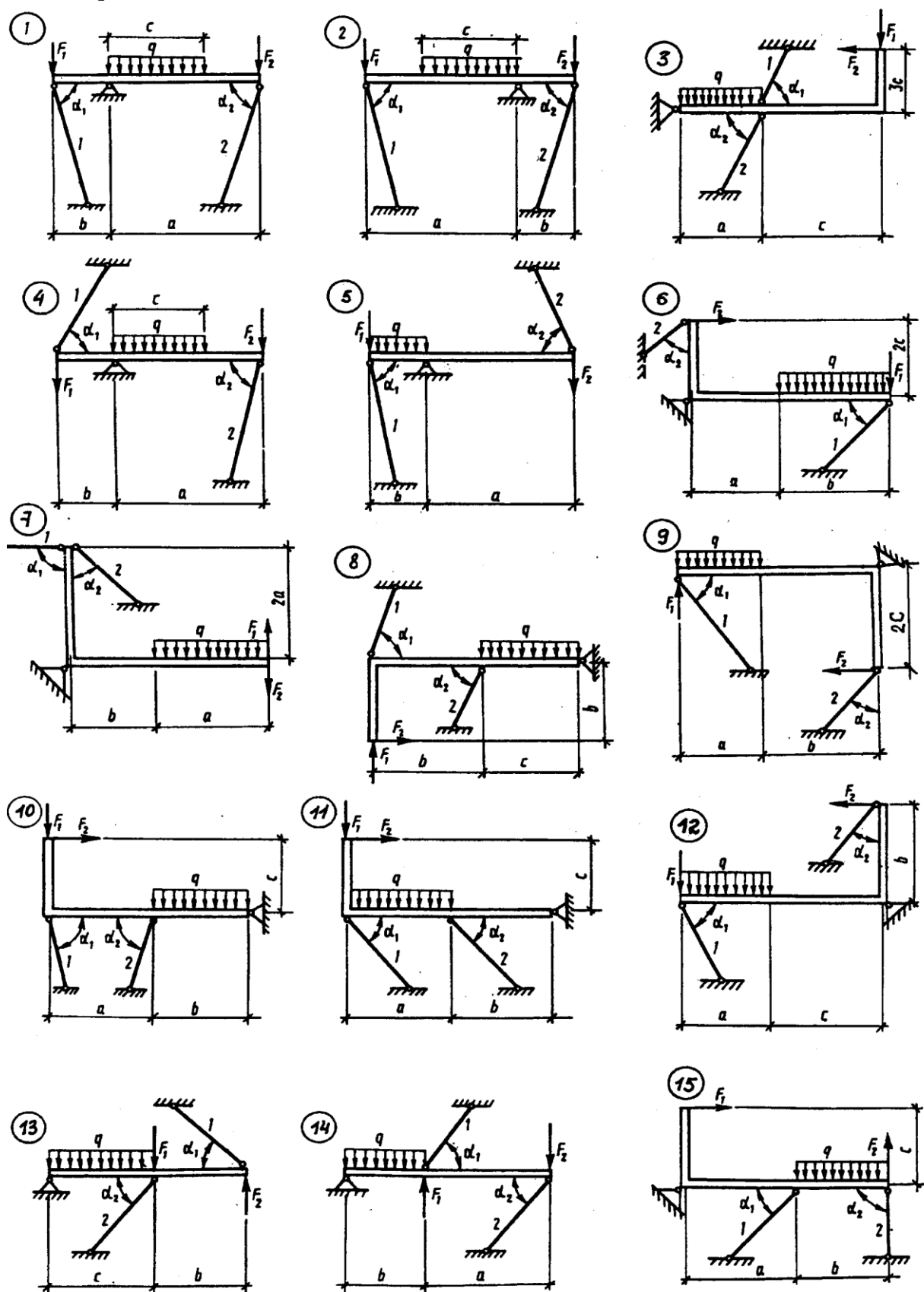
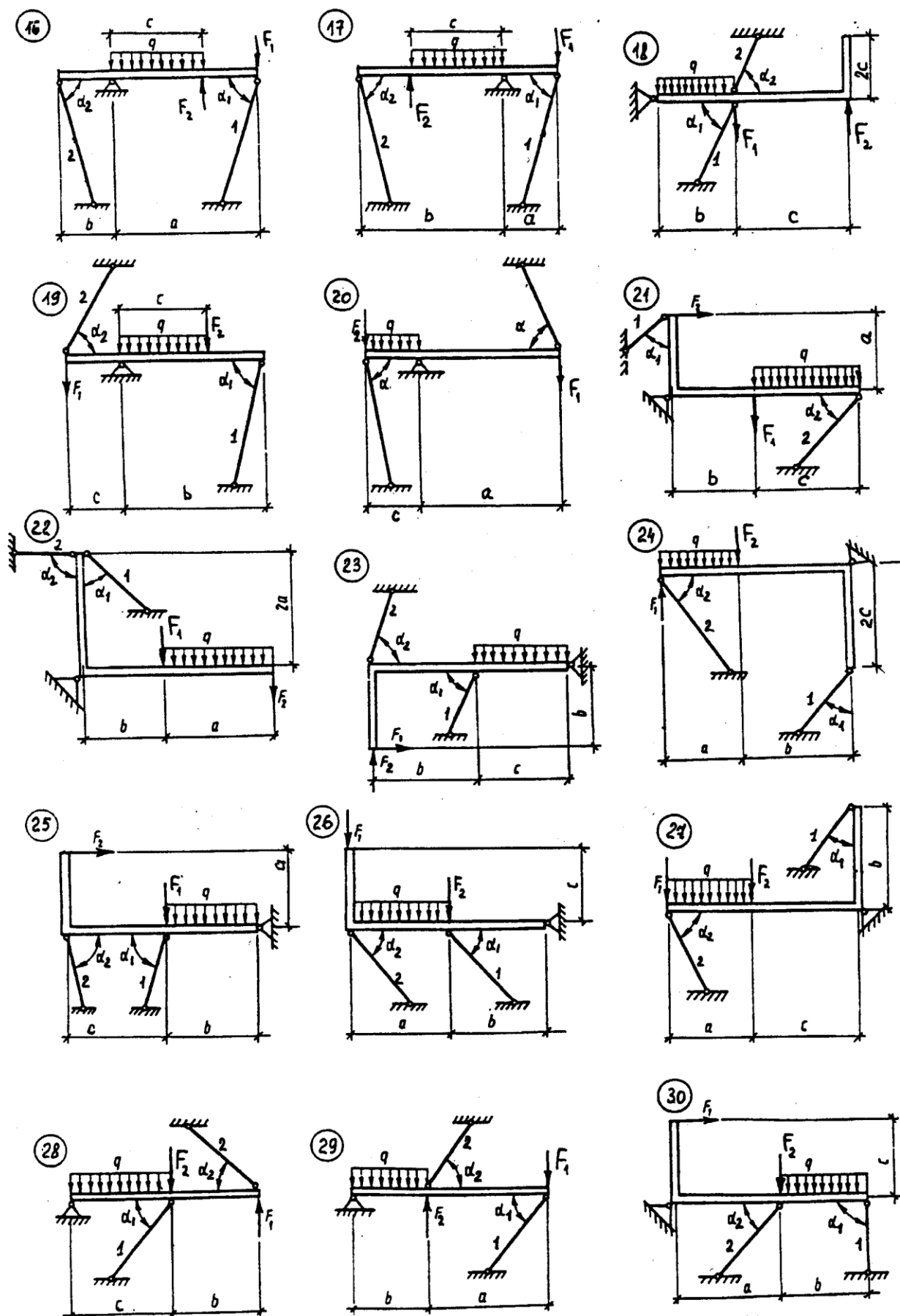


Рис.1.3.



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР

Задача 2А. Определение геометрических характеристик несимметричного сечения. Исходные данные взять в таблице 2.1 (рис 2.1).

Требуется:

1. Вычислить значения главных центральных моментов инерции.
2. Определить значения моментов сопротивления.

Таблица 2.1

Исходные данные

№ группы	размеры				номер	
	листа, см		уголка, мм		Двутавра	Швеллера
	h	b	равнобокого	неравнобокого		
1	24	2,0	80x80x8	100x63x7	20	22
2	20	1,8	125x125x10	110x70x8	16	20
3	20	1,8	90x90x7	125x80x10	24а	18

Примечание: поскольку сечение включает в себя прокатные профили, то следует воспользоваться таблицами сортамента стального проката, из которых выписать все нужные данные и начертить сечение в масштабе 1:1 или 1:2, или 1:4. Сечение располагается на формате А4 в выбранном масштабе.

Задача 2Б. Определение геометрических характеристик симметричного сечения, состоящего из простых геометрических фигур. Исходные данные взять в таблице 2.2 (рис 2.2).

Требуется:

1. Найти положение центра тяжести.
2. Показать главные центральные оси.
3. Вычислить главные центральные моменты инерции и осевые моменты сопротивления.

Таблица 2.2

№ группы	Размеры сечения, см	
	a	b
1	24	18
2	30	12
3	40	14
4	28	15
5	26	20

Схемы к работе 2А

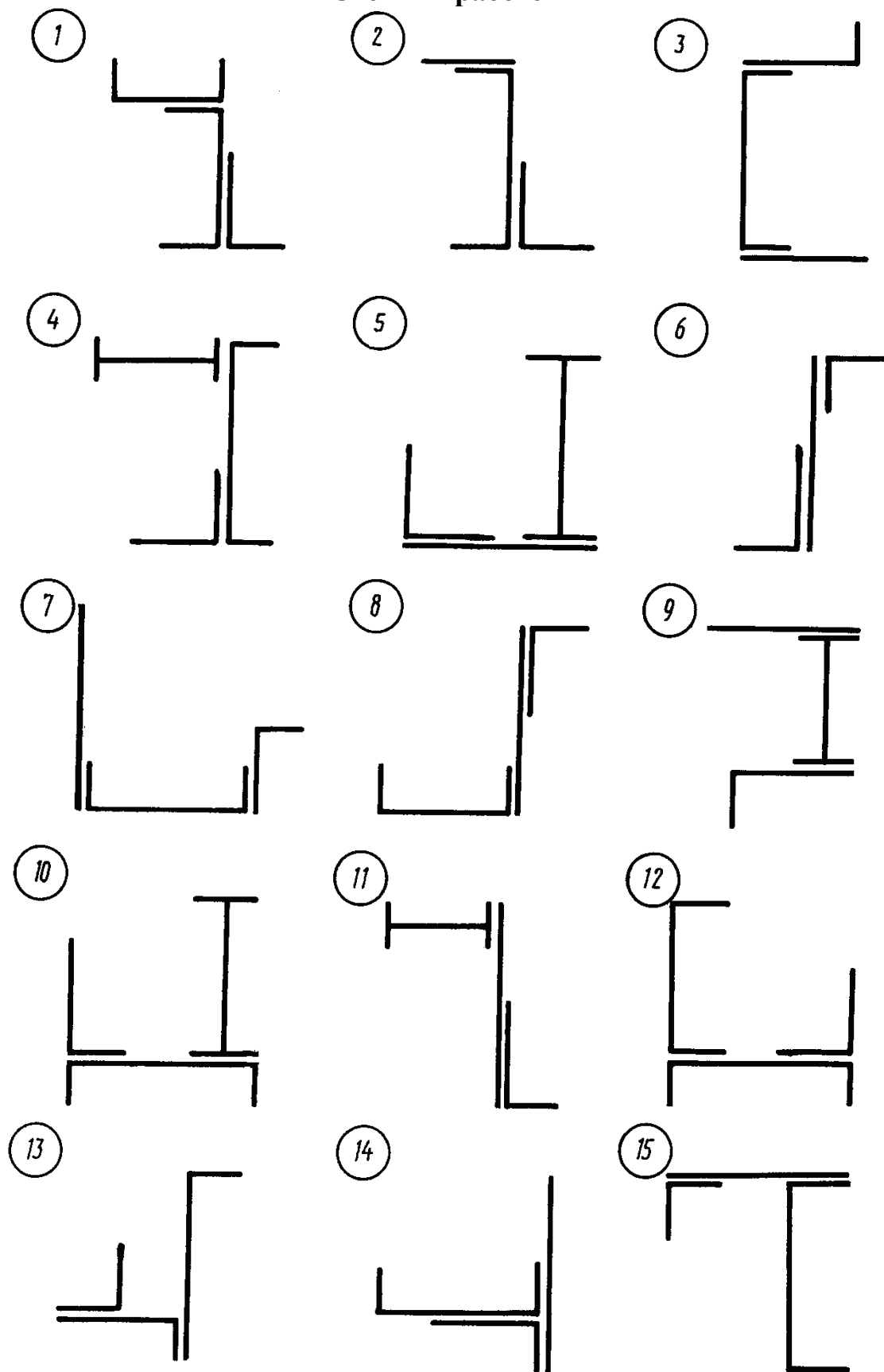


Рис. 2.1

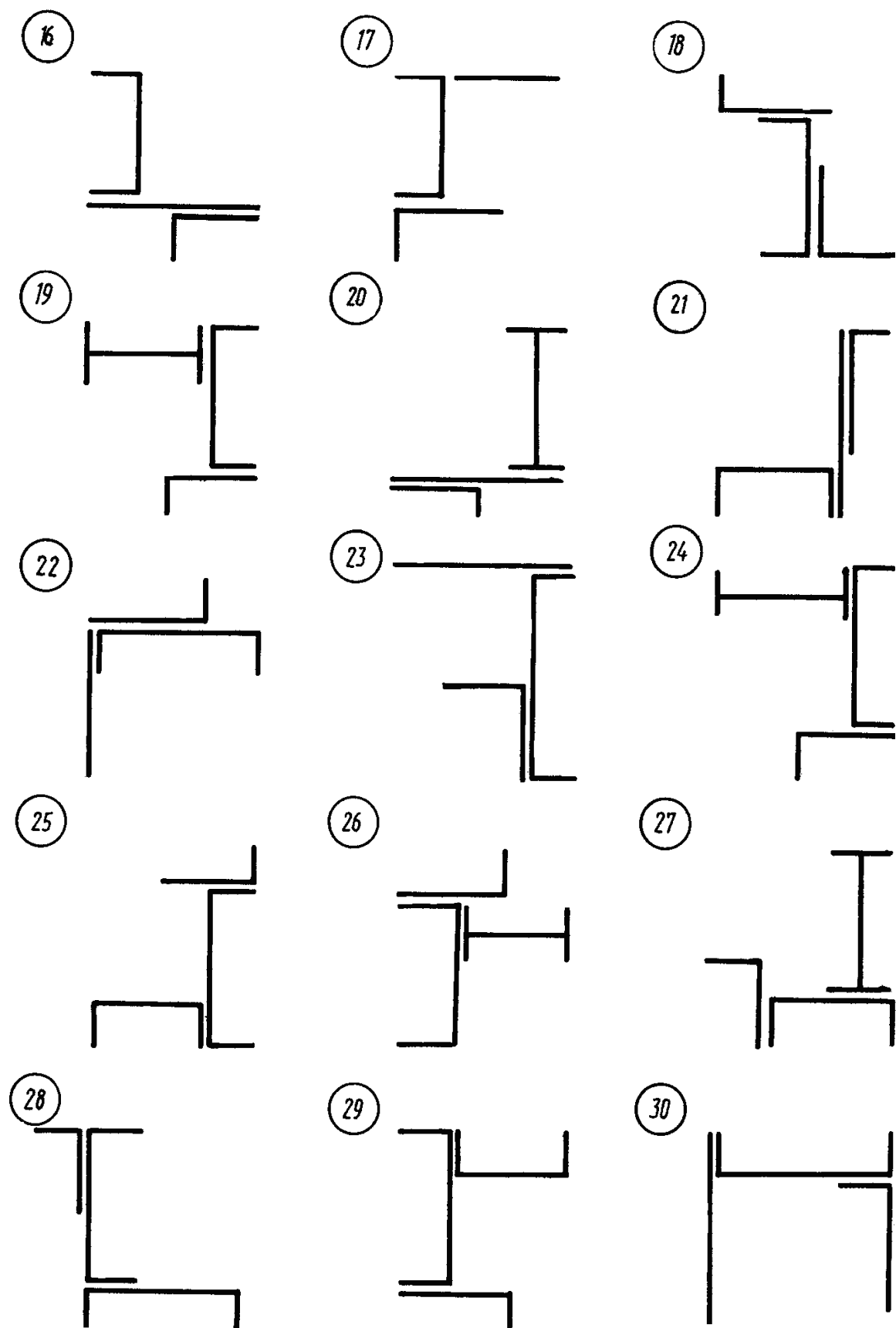


Рис. 2.1

Схемы к работе 2Б

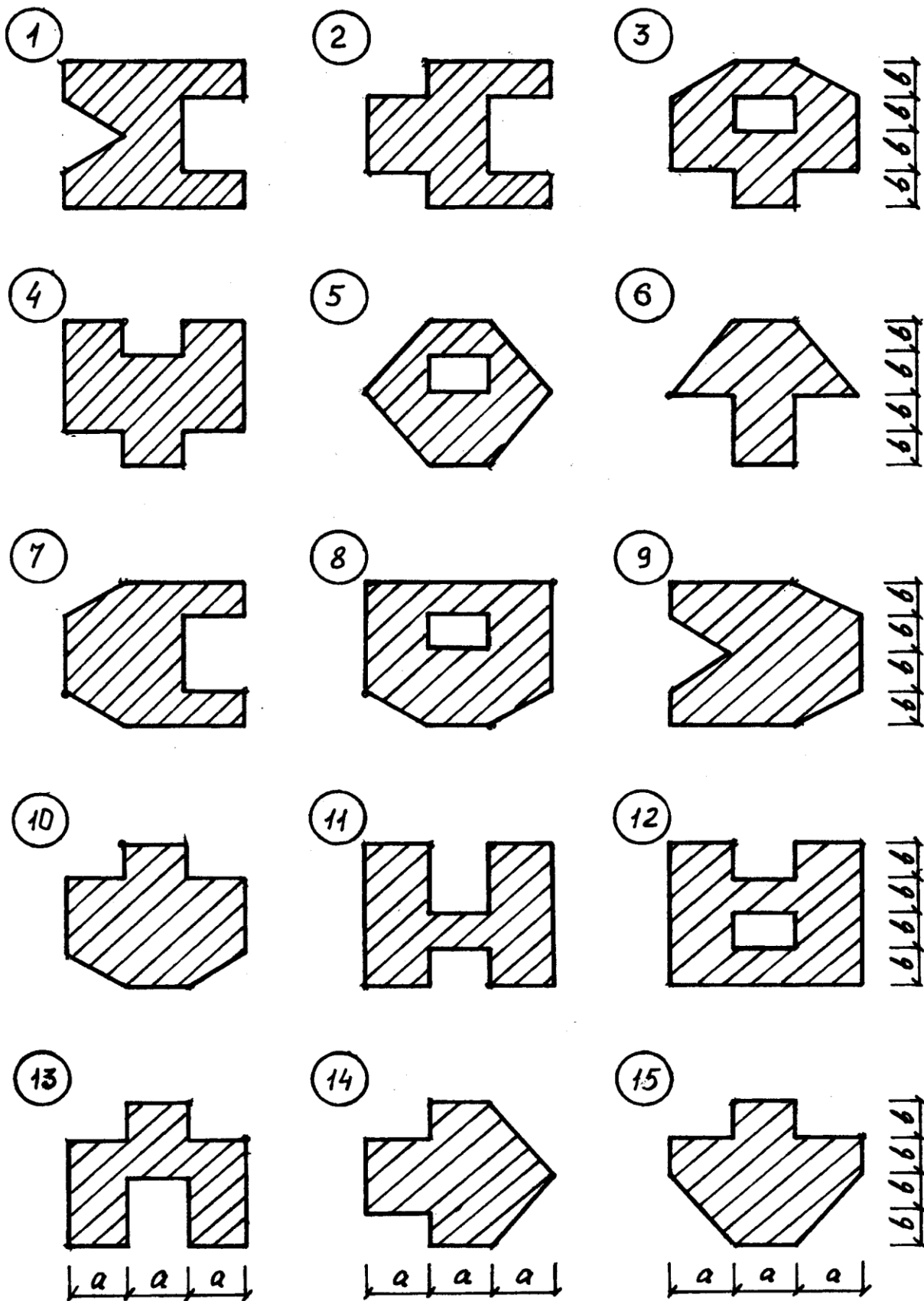
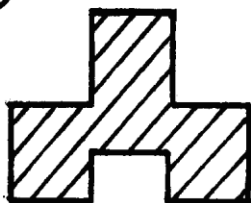
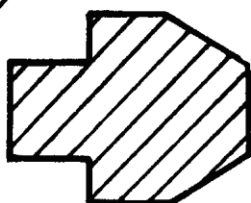


Рис. 2.2

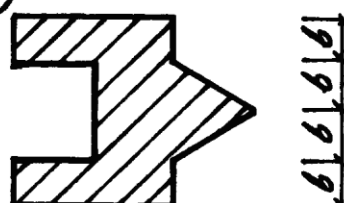
16



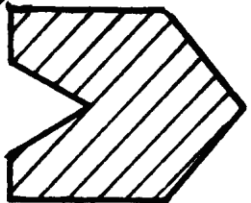
17



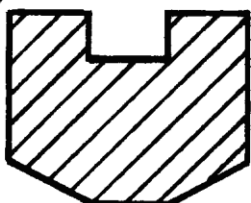
18



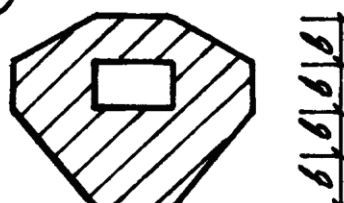
19



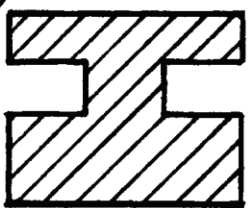
20



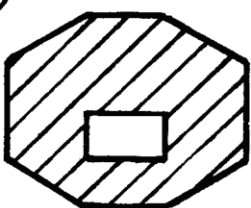
21



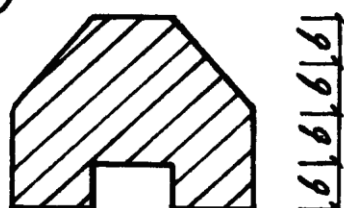
22



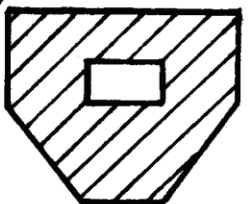
23



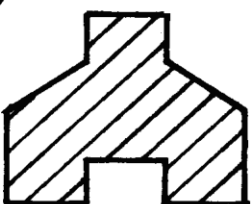
24



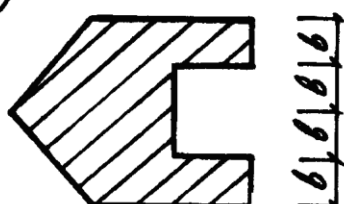
25



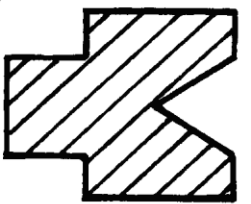
26



27

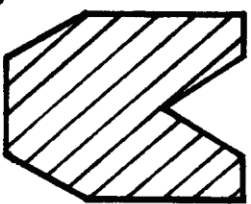


28



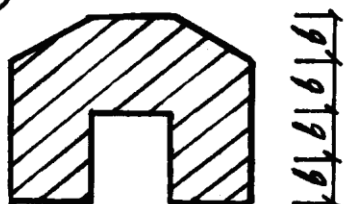
$a \quad a \quad a$

29



$a \quad a \quad a$

30



$a \quad a \quad a$

Рис. 2.2

Задача 2В. Определение геометрических характеристик симметричного сечения, состоящего из прокатных профилей. Исходные данные взять в таблице 2.3 (рис 2.3).

Требуется:

4. Найти положение центра тяжести.
5. Показать главные центральные оси.
6. Вычислить главные центральные моменты инерции и осевые моменты сопротивления.

Таблица 2.3

№ группы	размеры				номер	
	листа, см		уголка, мм		Двутавра	Швеллера
	h	b	равнобокого	неравнобокого		
1	34	2,2	110x110x8	90x56x8	20а	18а
2	28	1,4	80x80x8	125x80x10	18а	20
3	26	1,6	125x125x10	110x70x8	22а	16
4	30	1,8	90x90x7	100x63x7	24	18
5	32	2,0	100x100x12	80x50x6	16	22а

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЩИТЕ ЗАДАЧ 2А, 2Б и 2В

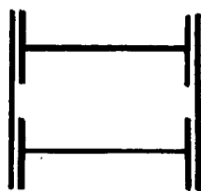
1. Статический момент, моменты инерции, момент сопротивления: их определения, размерности, знаки.
2. Чему равен статический момент сечения относительно центральной оси?
3. В каких случаях и какие геометрические характеристики обращаются в нуль?
4. Какие моменты инерции всегда положительны?
5. Как определить координаты центра тяжести сложного сечения?
6. Приведите формулы моментов инерции и моментов сопротивления для простых сечений (прямоугольник, круг, треугольник).
7. Как изменяется центробежный момент инерции при повороте осей на 90° ?
8. Какие оси называются главными центральными? Какими свойствами они обладают?
9. В каких случаях можно без вычислений установить положение главных осей?
10. Почему ось симметрии является всегда одной из главных центральных осей инерции?
11. В чем состоит закон суммы осевых моментов инерции?
12. Как вычисляется момент сопротивления сечения?
13. Как вычисляется радиус инерции?

Схемы к работе 2В

1



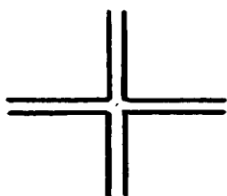
2



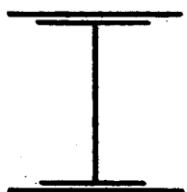
3



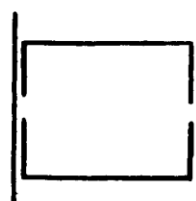
4



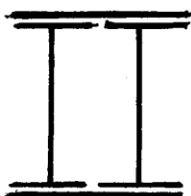
5



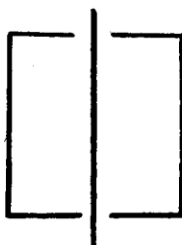
6



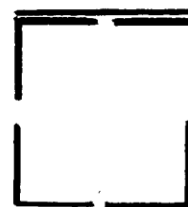
7



8



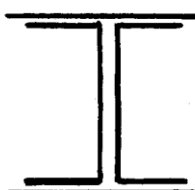
9



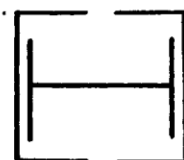
10



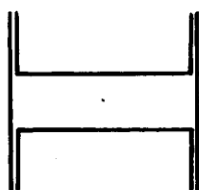
11



12



13



14



15

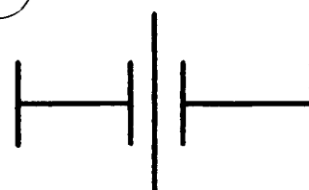
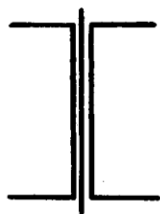
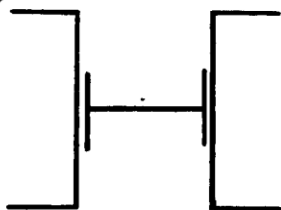


Рис. 2.3

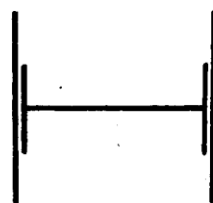
16



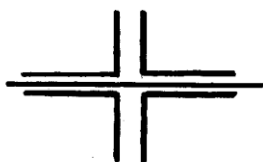
17



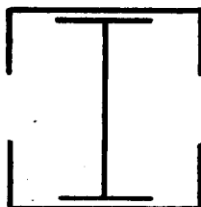
18



19



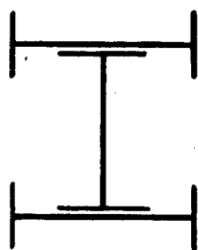
20



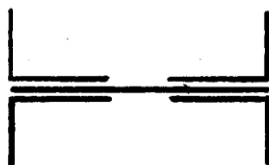
21



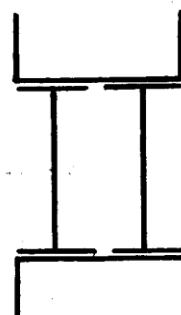
22



23



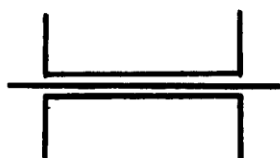
24



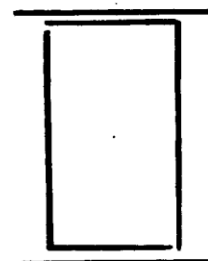
25



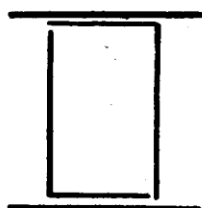
26



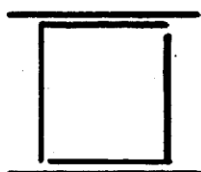
27



28



29



30

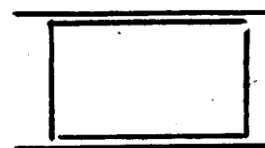


Рис. 2.3

ПРЯМОЙ ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

Задача 3. Расчет балок и рам при плоском поперечном изгибе (рис.3.1, табл.3.1).

В каждой из шести схем для балок найти опорные реакции и построить эпюры изгибающих моментов (M) и поперечных сил (Q).

Подобрать сечения заданной формы из условия прочности по нормальным напряжениям и выполнить проверку прочности по касательным напряжениям.

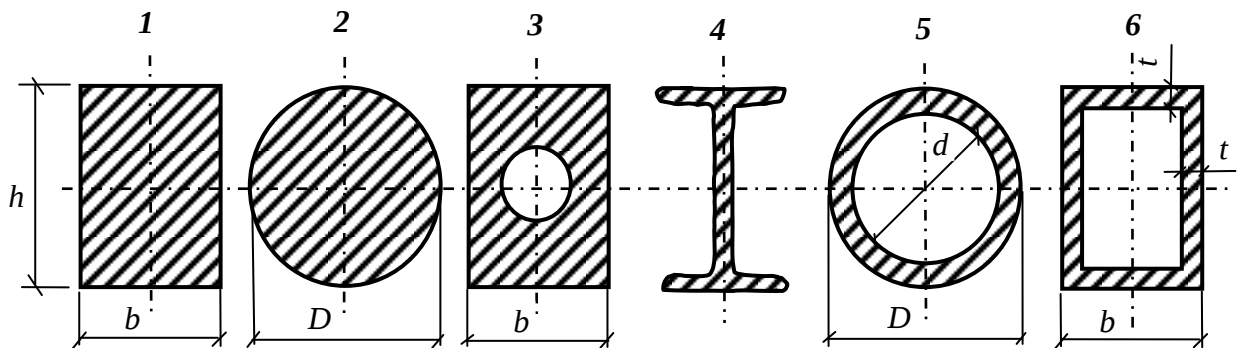
Номер формы сечения совпадает с порядковым номером схемы балки.

Материал балок 1 и 2 – древесина, для которой $[\sigma]=15$ МПа, $[\tau]=3$ МПа, $E=1 \cdot 10^{10}$ Па.

Материал балки 3 – чугун, для которого $[\sigma]_{\text{раст.}}=30$ МПа, $[\sigma]_{\text{сжат.}}=120$ МПа, $[\tau]=15$ МПа, $E=1,2 \cdot 10^{11}$ Па.

Материал балок 4,5 и 6 – сталь, для которой $[\sigma]=160$ МПа, $[\tau]=80$ МПа, $E=2 \cdot 10^{11}$ Па.

Форма поперечного сечения балок:



Для рам построить эпюры внутренних силовых факторов при изгибе (Q , M и N), выполнить проверку правильности построения эпюр путем вырезания узлов рамы.

Примечание: Схема рамы, эпюры и вырезанные узлы должны находиться на одной странице.

Таблица 3.1

Исходные данные

№ группы	F , кН	q , кН/м	M , кНм	Длина участка a , м	h/b	d/D	t/b
1	20	10	50	2	2	0,9	0,1
2	30	20	60	1,6	3	0,8	0,2
3	40	10	80	1,4	1,5	0,9	0,1
4	50	20	100	1,2	2,5	0,8	0,2
5	60	15	60	1,5	2	0,6	0,3

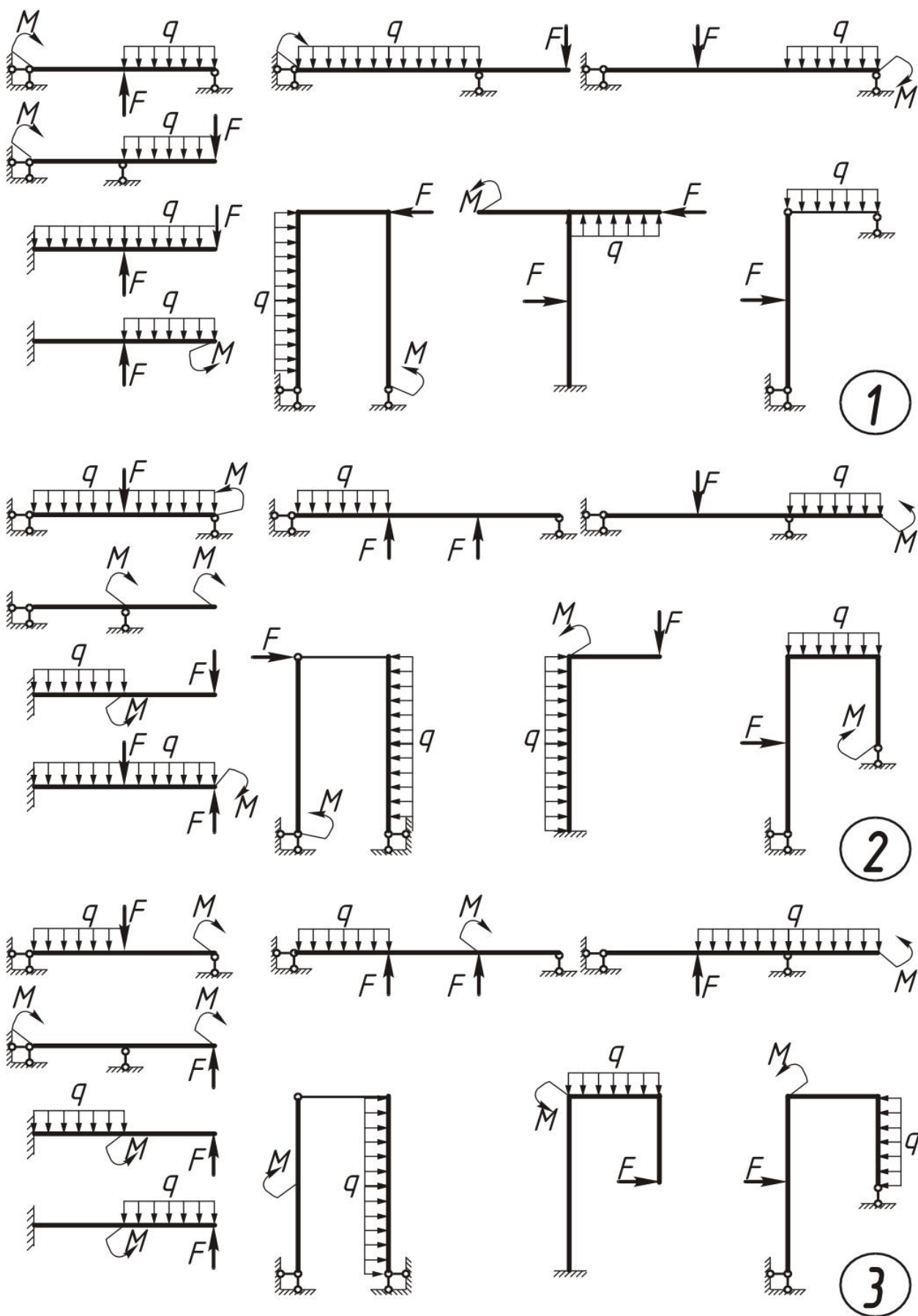


Рис. 3.1

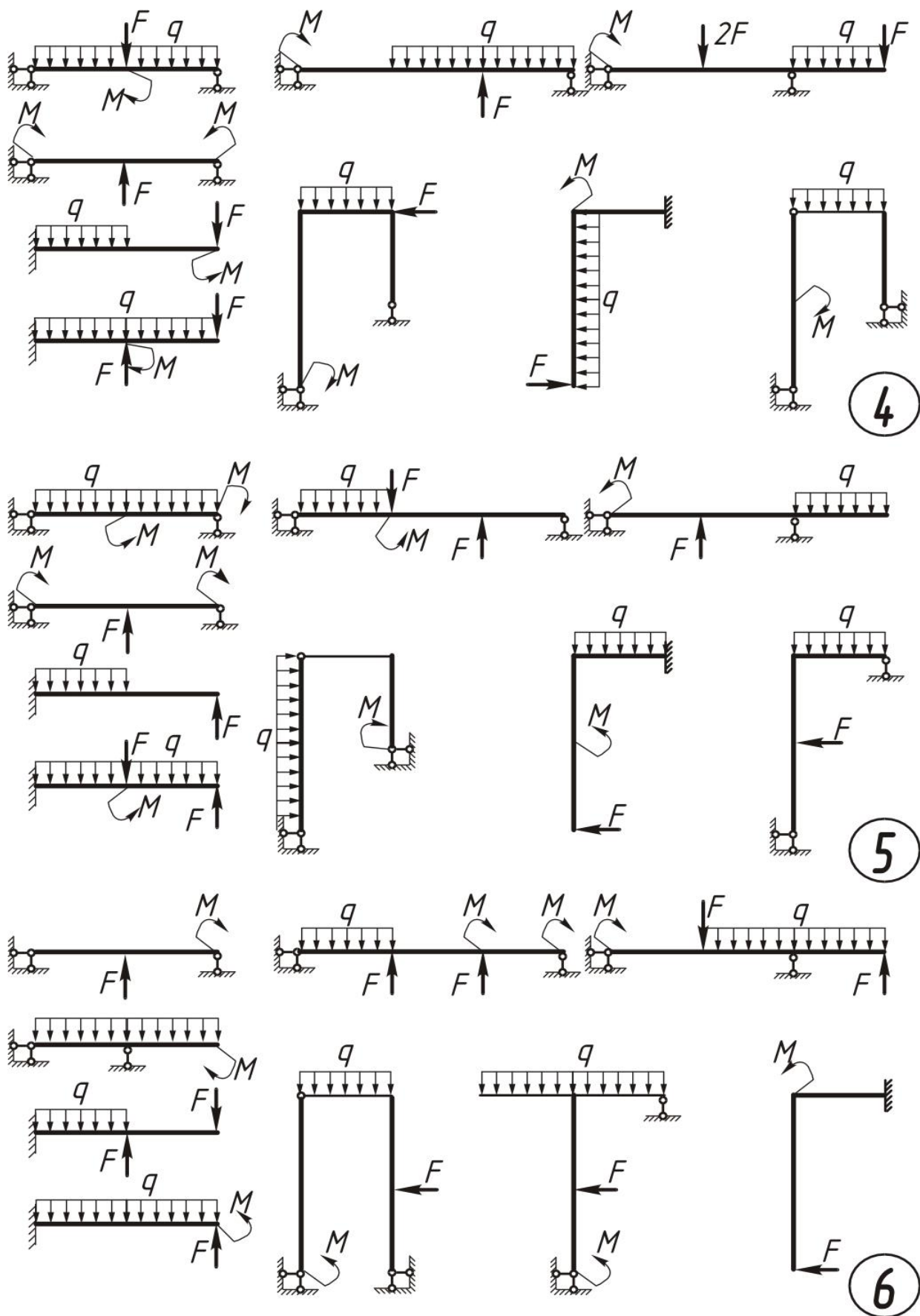


Рис. 3.1

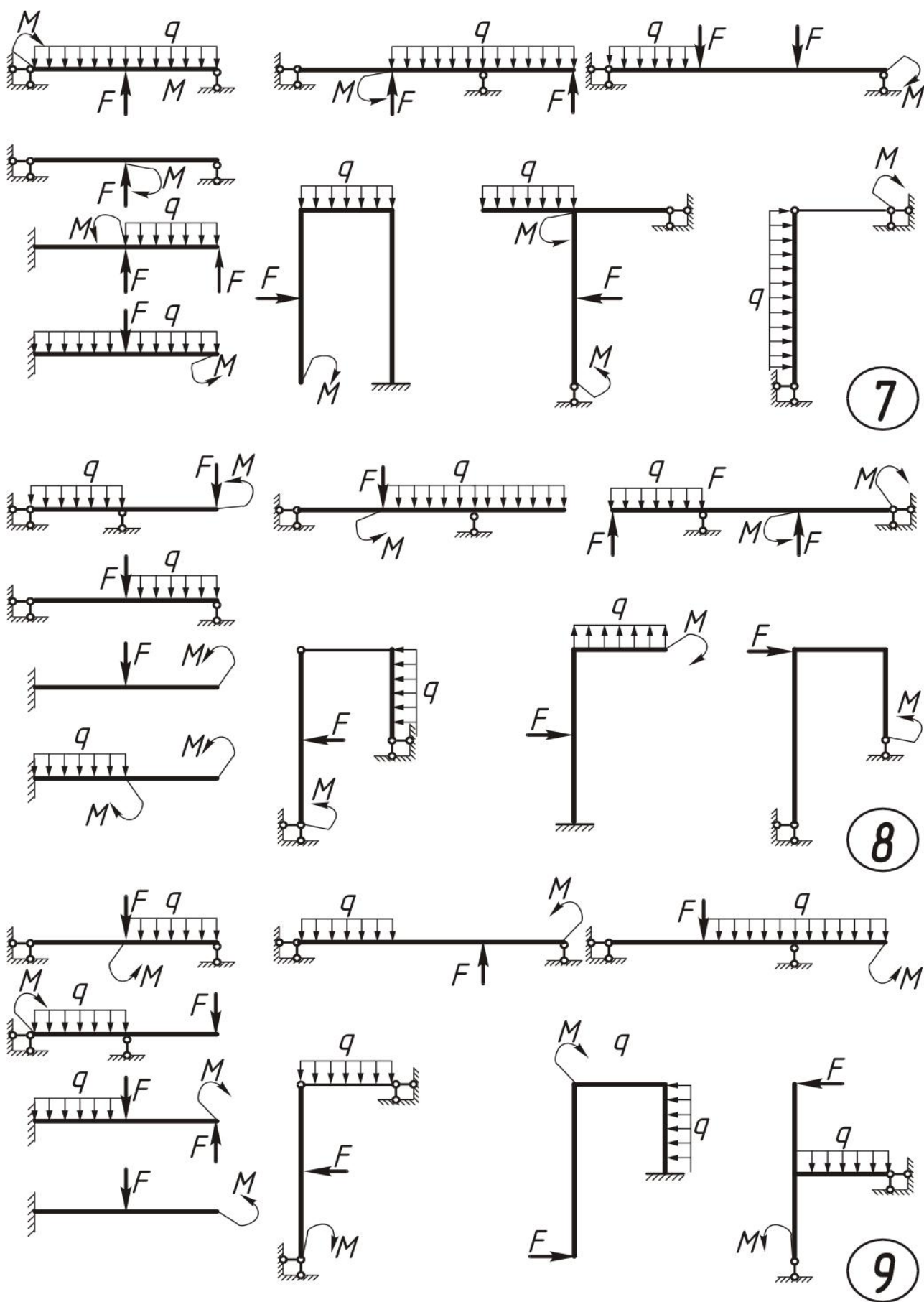


Рис. 3.1

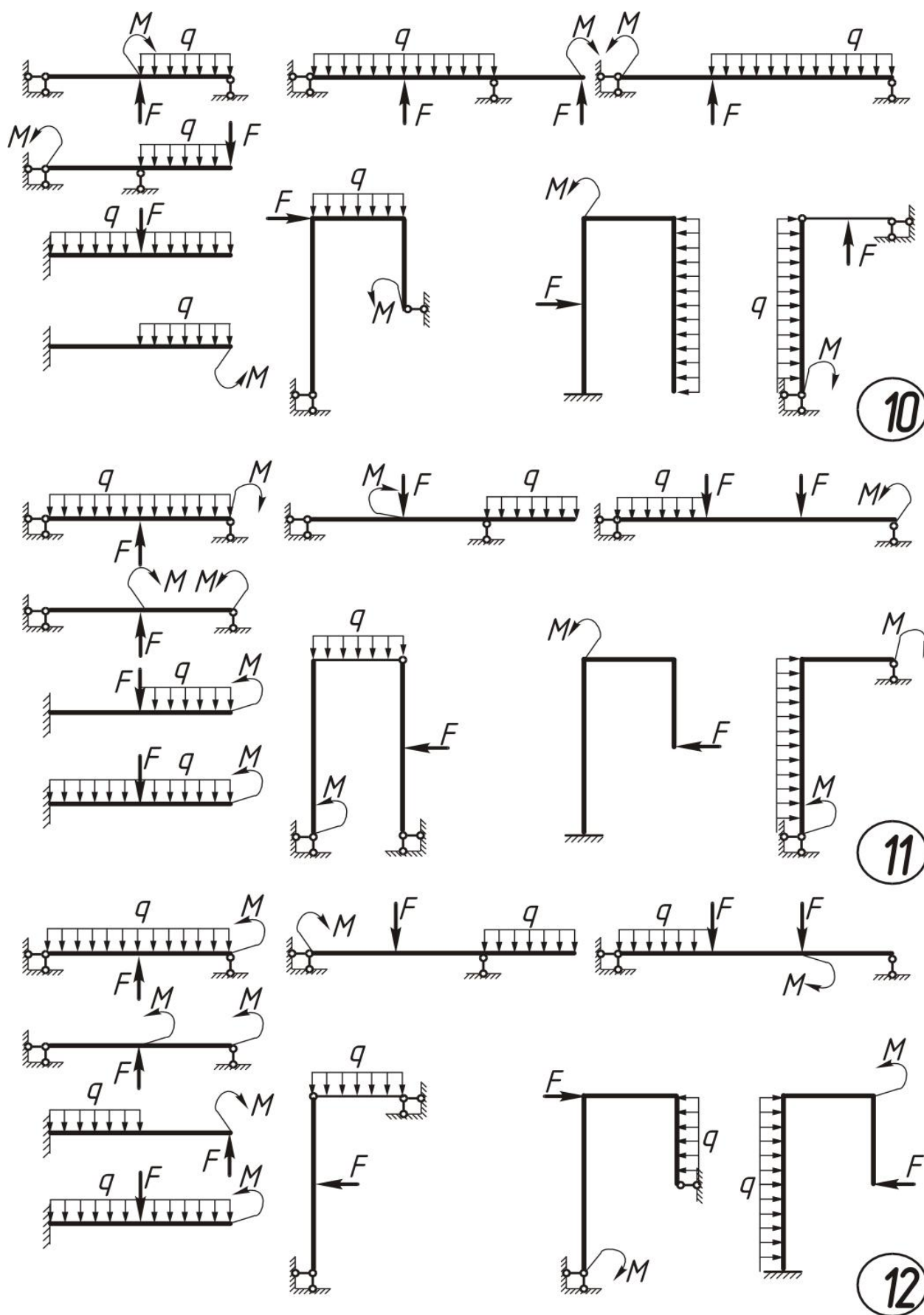


Рис. 3.1

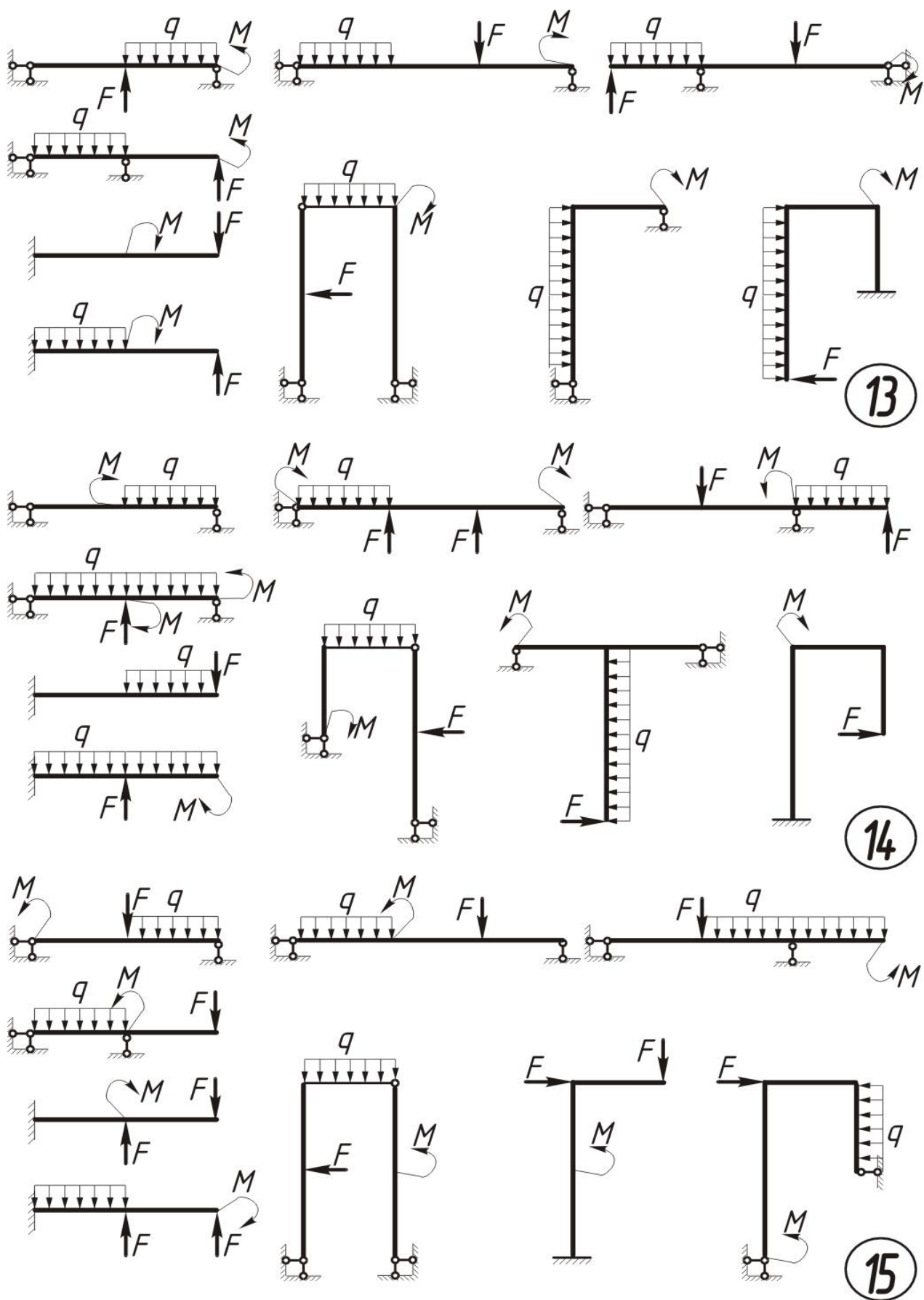


Рис. 3.1

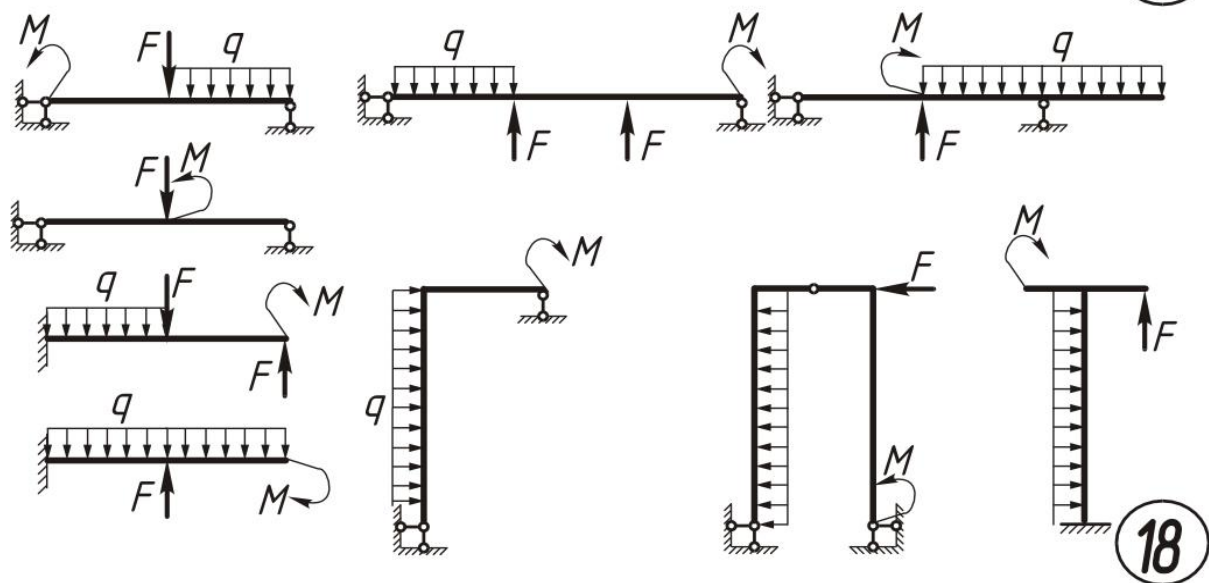
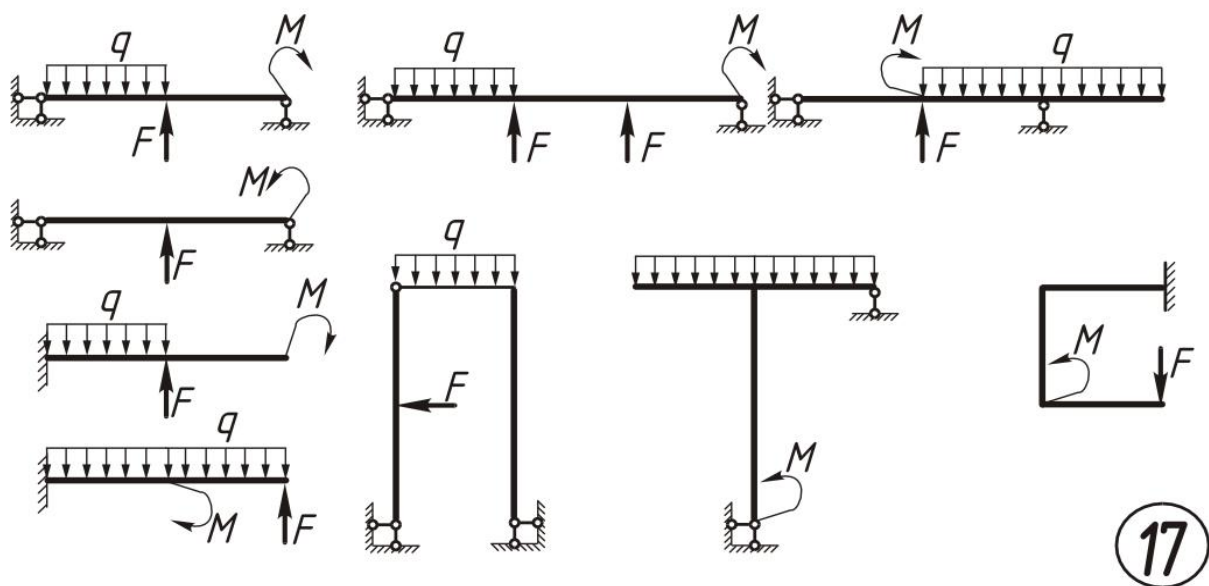
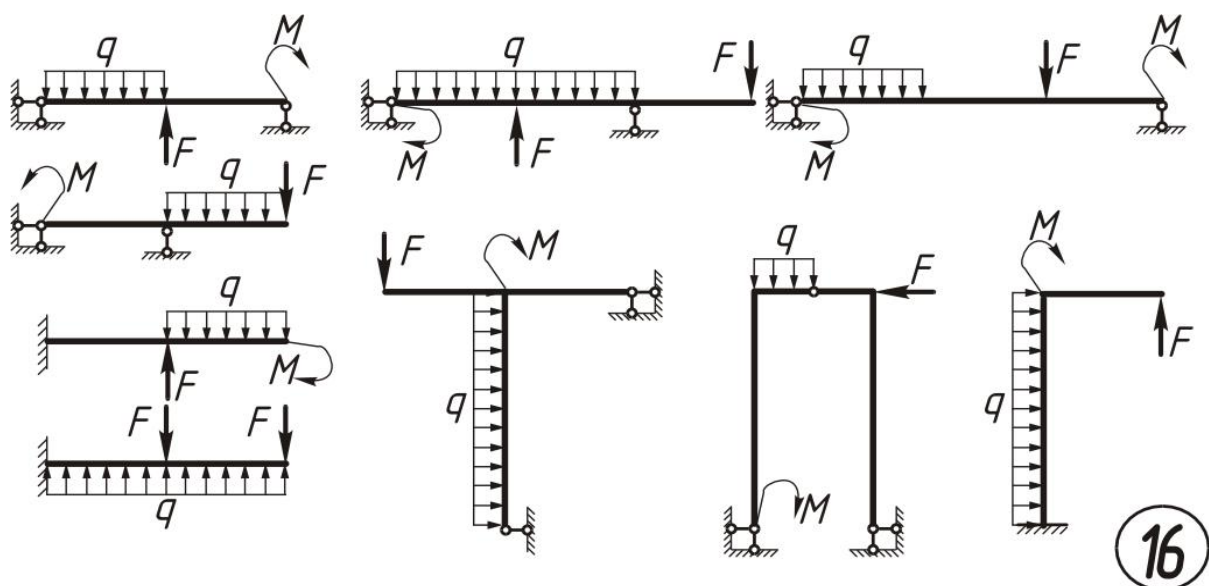


Рис. 3.1

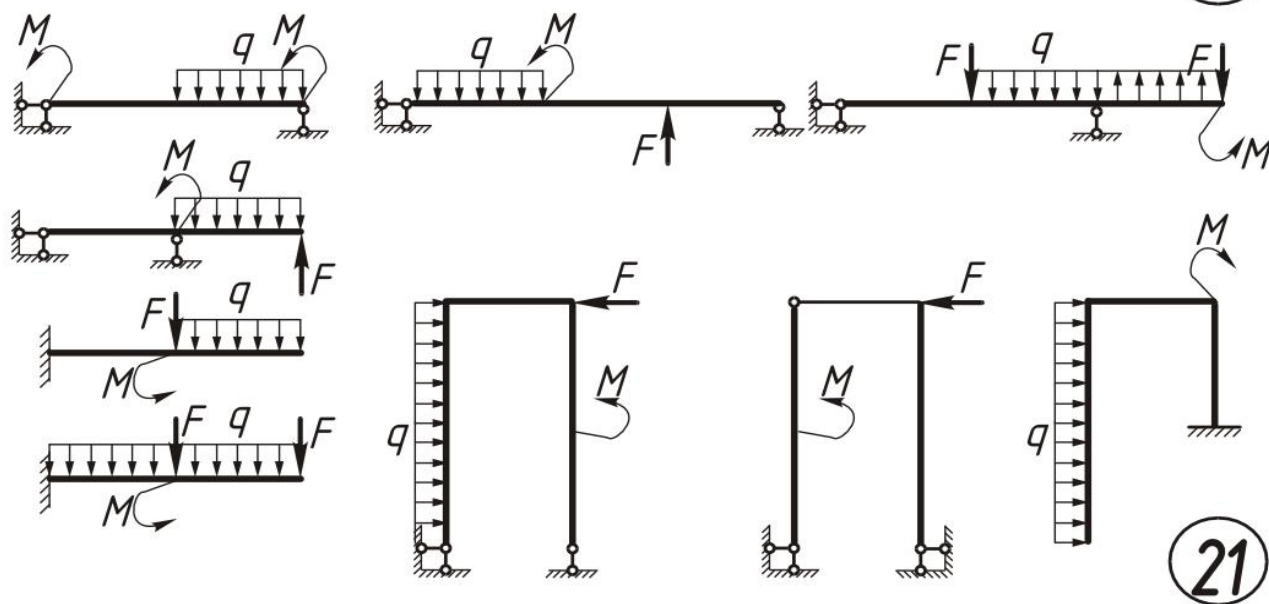
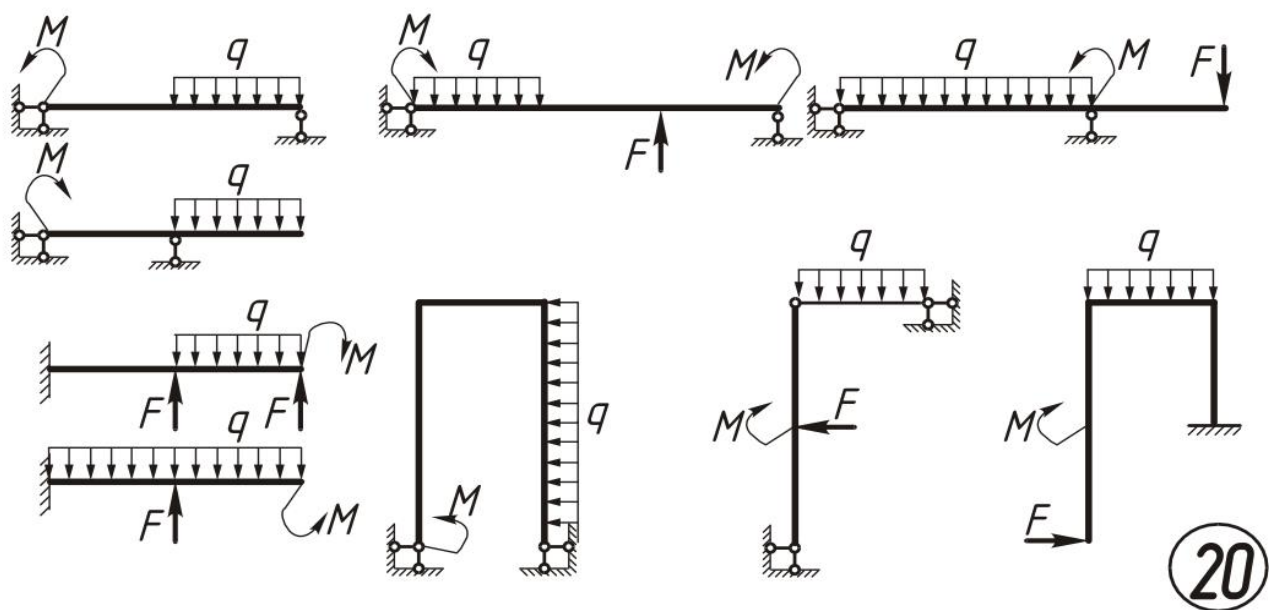
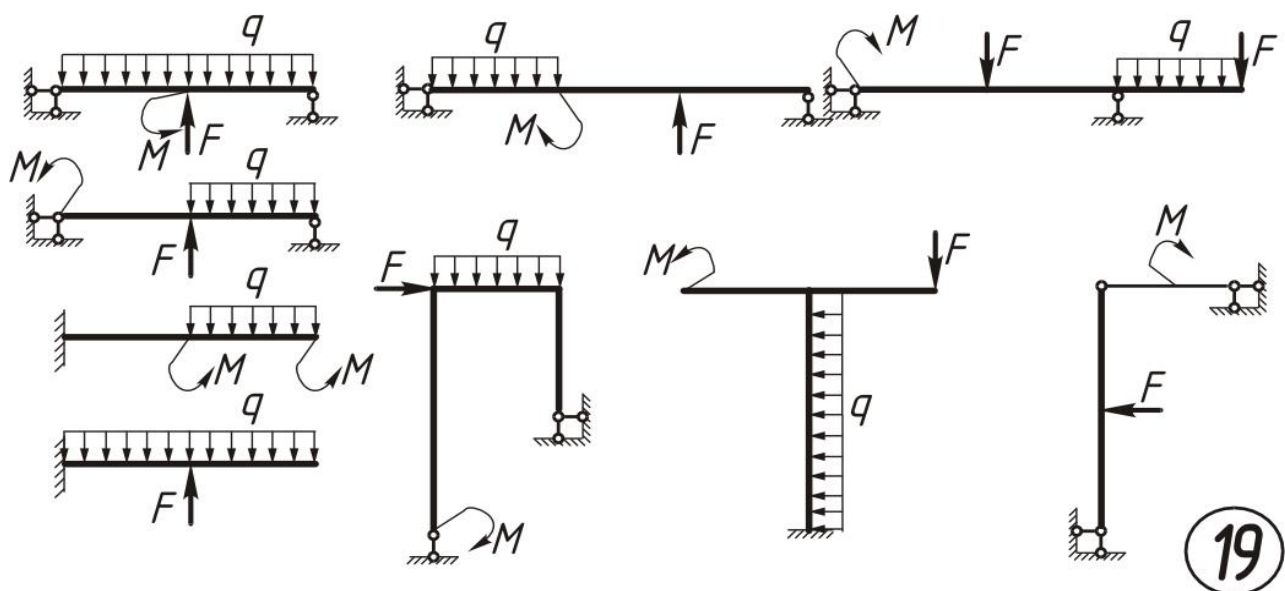
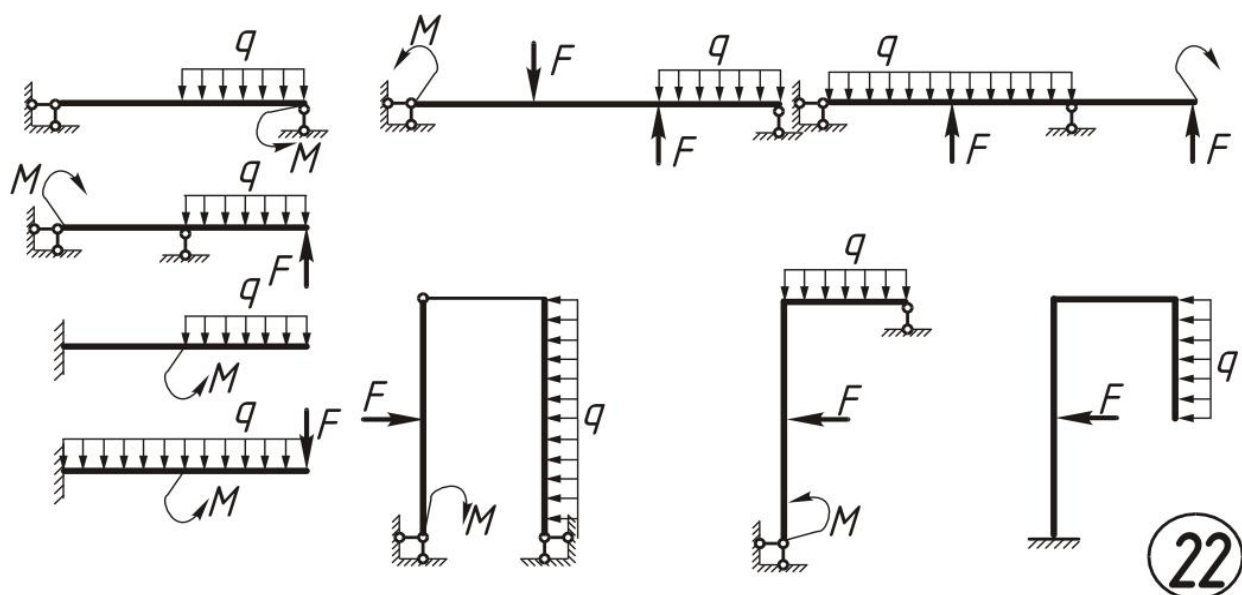
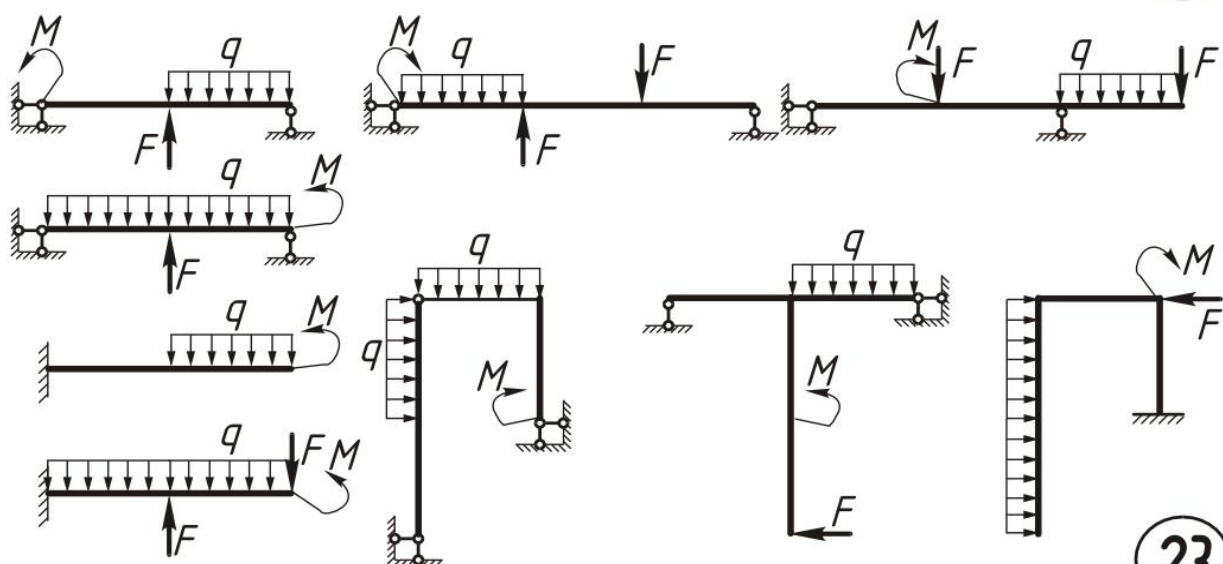


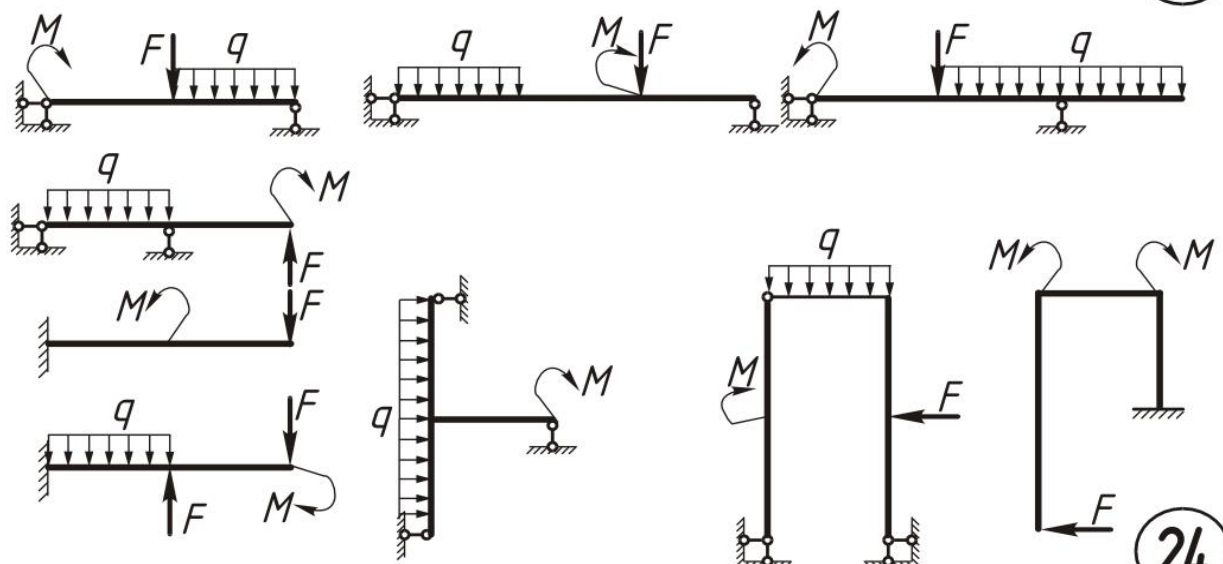
Рис. 3.1



22

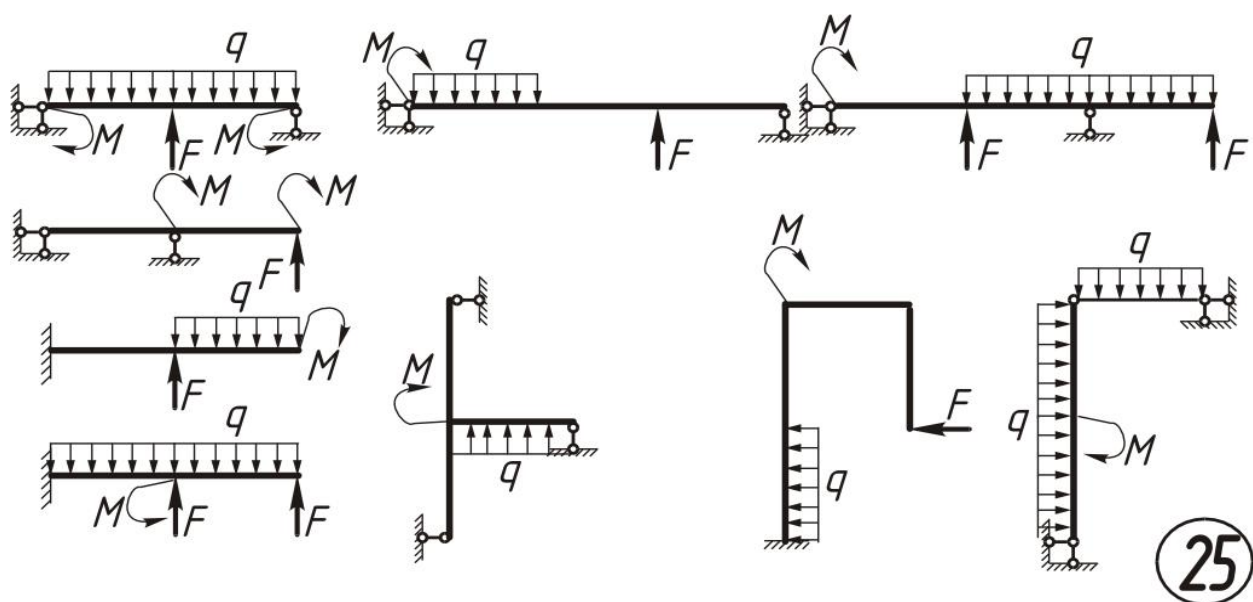


23

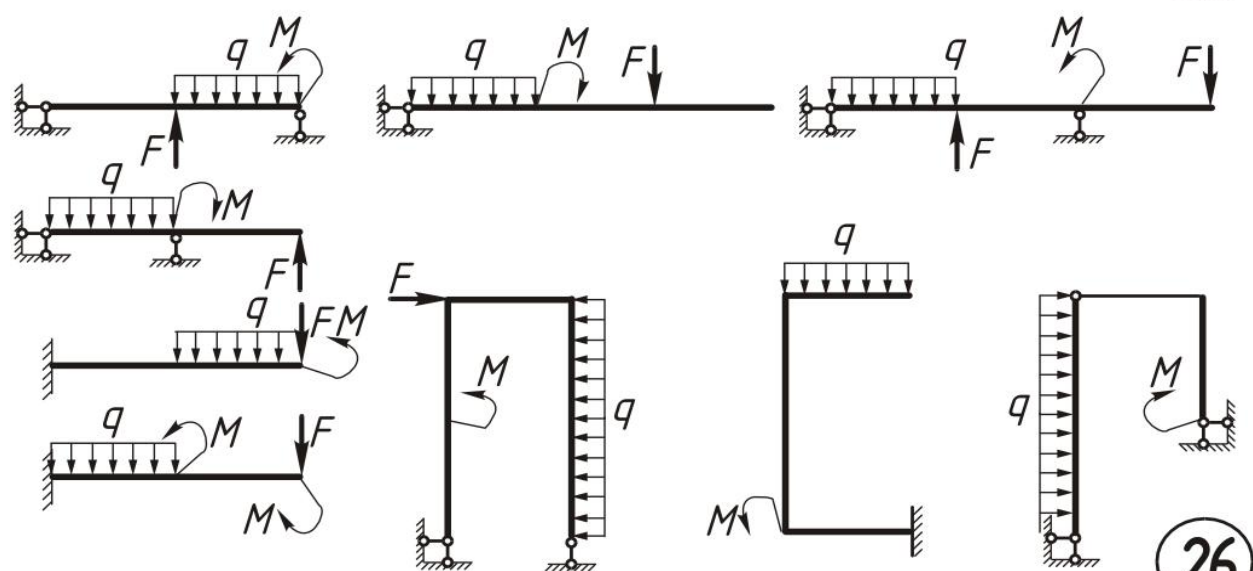


24

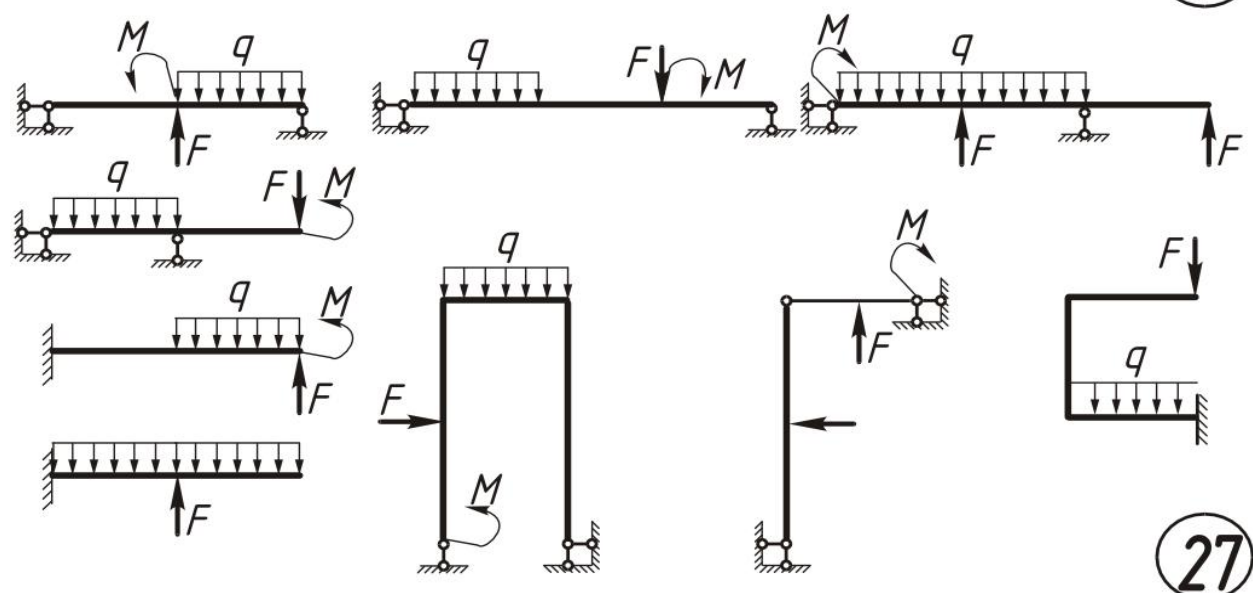
Рис. 3.1



25



26



27

Рис. 3.1

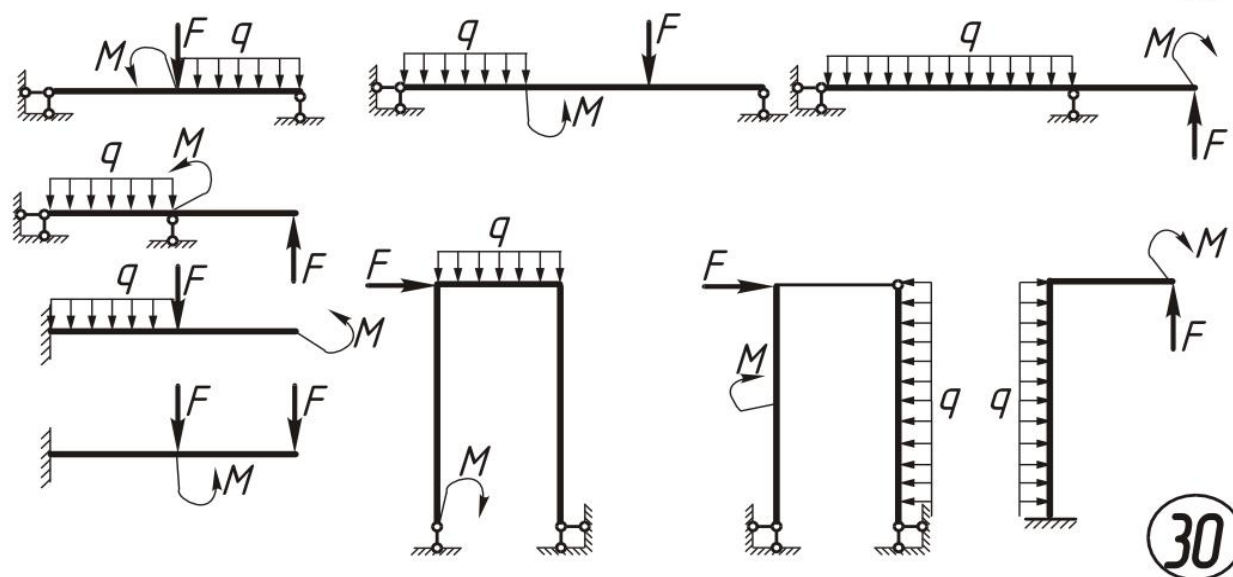
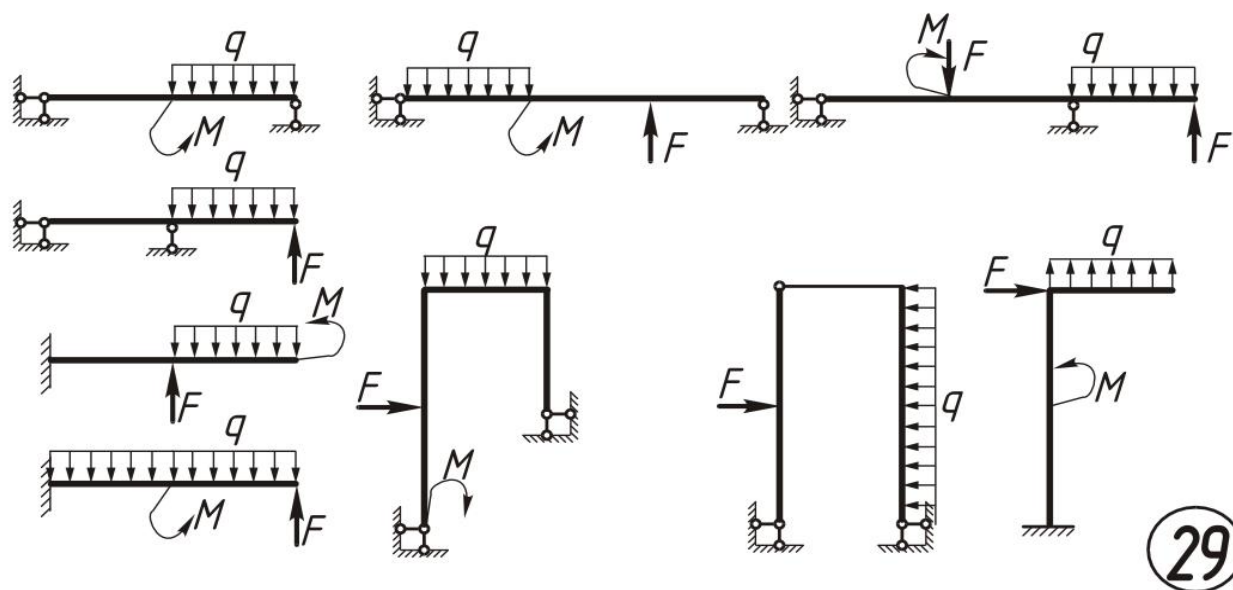
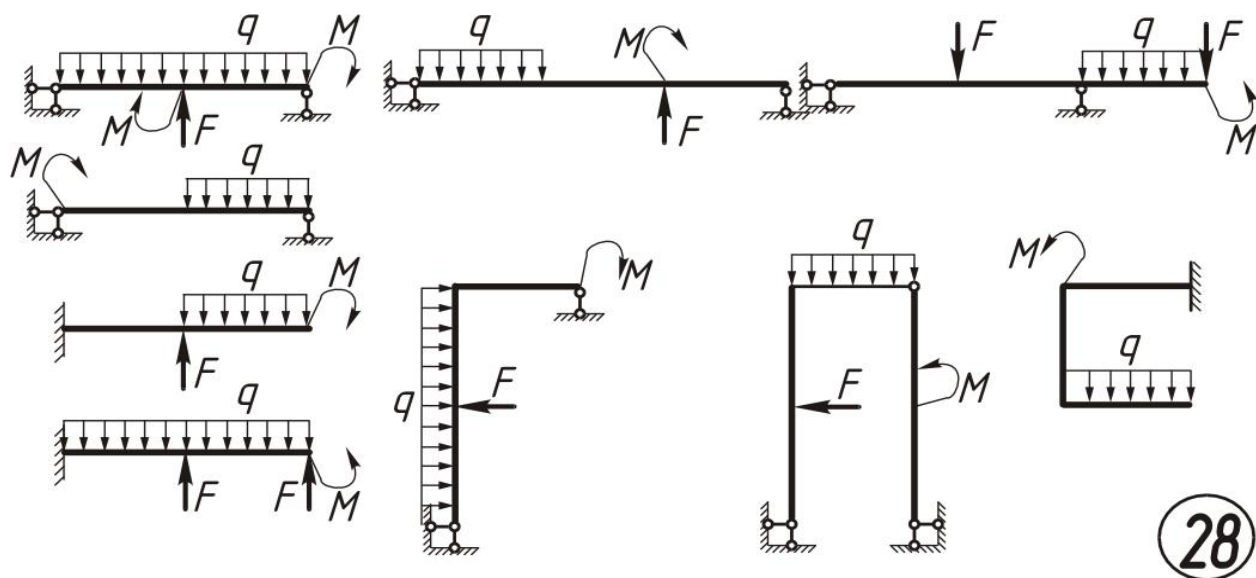


Рис. 3.1

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЩИТЕ ЗАДАЧ 3 РАБОТЫ

1. Виды балок. Типы опор и возникающие в них реакции.
2. Что такое изгибающий момент в сечении? Правило его знаков.
3. Что такое поперечная сила в сечении? Правило её знаков.
4. Теоремы Д.И.Журавского и следствия из них.
5. Где возможны скачки в эпюрах M и Q ?
6. Формула нормальных напряжений. Смысл всех входящих в неё параметров. Эпюра σ в сечениях различной формы.
7. Формула касательных напряжений. Смысл всех входящих в неё параметров. Эпюра τ в сечениях различной формы.
8. Условие прочности балок по нормальным напряжениям и задачи, решаемые на его основе.
9. Условие прочности балок по касательным напряжениям и его роль в расчёте балок.
10. Что такое рамная конструкция?
11. Как определяются знаки Q , M и N при расчёте рам?
12. Как проверить правильность построения эпюры Q , M и N для статически определимых рам?

Примечание: При защите задач следует демонстрировать умение строить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в общем виде для простейших балок – рис 3.2.

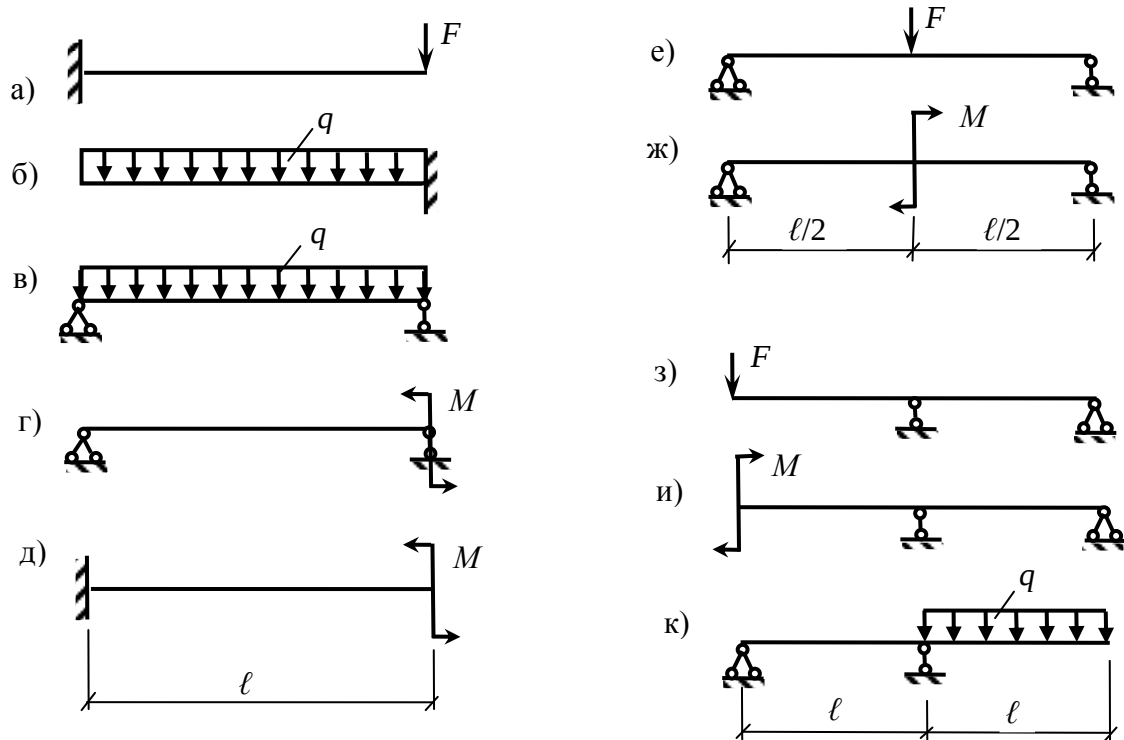


Рис. 3.2

ЗАДАЧИ ПО ТЕМАМ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ

Задача 1. Подобрать сечения стальных стержней, поддерживающих абсолютно жёсткую балку, если $[\sigma]=160\text{МПа}$, $\alpha=45^\circ$, при заданном соотношении $\frac{A_2}{A_1} = 2$.

В шарнирно-неподвижной опоре A возможно возникновение двух реакций R и

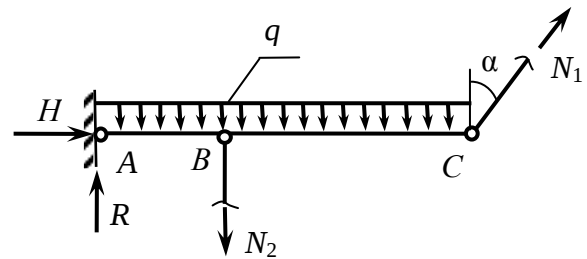
H , а в двух других опорах – по одной вдоль стержней (R_1 и R_2).

Но, как это принято, начнем сразу с метода сечений. Для этого замкнутым разрезом выделяем среднюю часть системы и рассматриваем её равновесие:

$$\sum x = H + N_1 \cdot \sin \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum y = R - q \cdot 3 - N_2 + N_1 \cdot \cos \alpha = 0, \quad (2)$$

$$\sum M(A) = -N_2 \cdot 1 + N_2 \cdot \cos \alpha \cdot 3 - (q \cdot 3) \cdot 1,5 = 0. \quad (3)$$



Количество неизвестных на 1 больше числа уравнений статики. Значит, система статически неопределима. Для получения дополнительного (геометрического) уравнения рассмотрим возможную картину деформации системы:

Из подобия треугольников

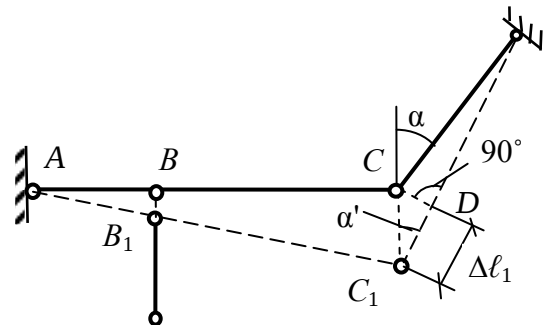
$$ACC_1 \text{ и } ABB_1: \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{3}{1}.$$

Но: $BB_1 = \Delta \ell_2$ (укороченные), а CC_1 связано с $\Delta \ell_1$ как гипотенуза и катет треугольника CC_1D :

$$CC_1 = \frac{\Delta \ell_1}{\cos \alpha'}.$$

По малости изучаемых перемещений следует считать, что угол $\alpha' = \alpha$ и тогда $CC_1 = \frac{\Delta \ell_1}{\cos \alpha}$.

Подставляя BB_1 и CC_1 в пропорцию $\frac{CC_1}{BB_1} = 3$, имеем:



$$\frac{\Delta \ell_1}{\cos \alpha \cdot \Delta \ell_2} = 3, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta \ell_1}{\Delta \ell_2} = 3 \cdot \cos \alpha.$$

В рассмотренной нами картине деформаций $\Delta \ell_1$ является удлинением (поэтому $\Delta \ell_1 = +\frac{N_1 \ell_1}{EA_1}$), а $\Delta \ell_2$ – укорочением (и поэтому $\Delta \ell_2 = -\frac{N_2 \ell_2}{EA_2}$).

Тогда уравнение деформаций будет:

$$-\frac{N_1 \ell_1}{EA_1} \cdot \frac{EA_2}{N_2 \ell_2} = 3 \cdot \cos \alpha, \quad (4)$$

или: $-\frac{N_1 \cdot 2}{N_2 \cdot 1} \cdot \frac{A_2}{A_1} = 3 \cdot \cos \alpha.$

При $\alpha=45^\circ$ и заданном соотношении площадей поперечных сечений стержней $\frac{A_2}{A_1} = 2$ уравнение примет вид: $-\frac{N_1 \cdot 2}{N_2 \cdot 1} \cdot 2 = 3 \cdot 0,707,$

откуда: $-4N_1 = 2,12N_2$, или $N_1 = -0,53N_2.$ (4)

Подставляя (4) в (3):

$$-N_2 + (-0,53N_2) \cdot 0,707 \cdot 3 - 30 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0,$$

откуда найдем $N_2 = -63,54 \text{ кН}$ (сжатие) и тогда $N_1 = -0,53(-63,54) = 33,68 \text{ кН}$ (растяжение).

Далее осуществляем подбор сечений стержней. При этом мы обязаны выполнить условие $\frac{A_2}{A_1} = 2$, при котором были найдены значения усилий. Поэтому: сечение одного из стержней следует подобрать из условия прочности, а сечение другого назначить по заданному соотношению A_2/A_1 , но после этого обязательно проверить, удовлетворяет ли назначенное таким образом сечение условию прочности.

Итак, начнем с первого стержня. Его условие прочности:

$$\sigma_I = \frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma],$$

откуда $A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{33,68 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,21 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$

Площадь сечения второго стержня назначаем:

$$A_2 = 2 \cdot A_1 = 2 \cdot 0,21 \cdot 10^{-3} = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

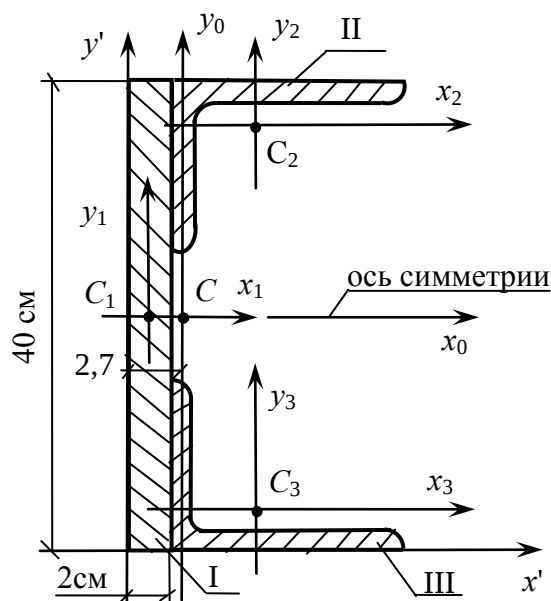
Проверяем, достаточна ли эта величина для второго стержня, т.е. выполняем проверку прочности второго стержня при $A_2 = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$:

$$|\sigma_{II}| = \frac{N_2}{A_2} = \frac{63,54 \cdot 10^3}{0,42 \cdot 10^{-3}} = 151,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 151,3 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа} - \text{условие прочности выполняется.}$$

Но если бы оно не выполнялось, следовало начать с подбора сечения второго стержня, а сечение первого пришлось бы назначить как $A_1 = \frac{1}{2} N_2$.

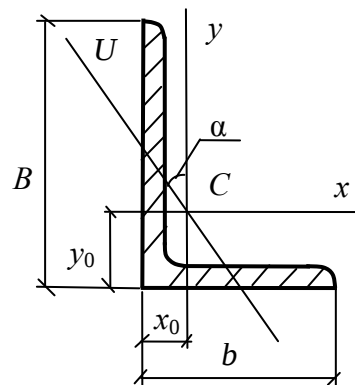
Задача 2.

Найти главные центральные моменты инерции сечения, состоящего из листа 40х2см и двух уголков №14/9.



Исходные данные из сортамента для неравнобокого уголка №14/9.

$B=14\text{ см}, b=12\text{ см},$
 $A=18\text{ см}^2,$
 $x_0=2,03\text{ см}, y_0=4,49\text{ см},$
 $I_x=364\text{ см}^4, I_y=120\text{ см}^4,$
 $I_U=70,3\text{ см}^4 = I_{\min}$
 $\text{tg}\alpha=0,411$



Сечение имеет одну ось симметрии. Она – одна из главных центральных. Обозначаем её x_0 . Чтобы показать вторую главную центральную ось, надо найти положение центра тяжести на оси симметрии:

$$x_c = \frac{S_{y'}}{A}.$$

Выбираем вспомогательную ось y' , перпендикулярную к оси симметрии и вычисляем статический момент сложного сечения относительно этой оси:

$$\begin{aligned} S_{y'} &= A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 = \\ &= (2 \cdot 40)1 + 18(2+4,49) + 18(2+4,49) = 80 + 116,82 + 116,82 = 313,64\text{ см}^3, \\ A &= A_1 + A_2 + A_3 = 80 + 18 + 18 = 116\text{ см}^2, \end{aligned}$$

$$x_c = \frac{313,64}{116} = 2,7 \text{ см.}$$

Проводим главную центральную ось y_0 через найденный центр тяжести.

Вычисляем непосредственно главные центральные моменты инерции:

$$I_{x_0} = I_{x_0}^I + I_{x_0}^{II} + I_{x_0}^{III},$$

$$a_1=0, a_2=\frac{40}{2}-2,03=17,97 \text{ см, } a_3=17,97 \text{ см.}$$

$$I_{x_0}^I = I_{x_1}^I = \left(\frac{BH^3}{12} \right) = \frac{2 \cdot 40^3}{12} = 10666,6 \text{ см}^4,$$

$$I_{x_0}^{II} = I_{x_2}^{II} + a_2^2 \cdot A_2 = I_y^{copm} + a_2^2 \cdot A_2 = 120 + 17,97^2 \cdot 18 = 5932,6 \text{ см}^4,$$

$$I_{x_0}^{III} = I_{x_0}^{II} = 5932,6 \text{ см}^4,$$

$$I_{x_0} = 22538 \text{ см}^4.$$

$$I_{y_0} = I_{y_0}^I + I_{y_0}^{II} + I_{y_0}^{III},$$

$$b_1 = -\left(2,7 - \frac{2}{2} \right) = -1,7 \text{ см,}$$

$$b_2 = b_3 = 4,49 + 2 - 2,7 = 3,79 \text{ см.}$$

$$I_{y_0}^I = I_{y_1}^I + b_1^2 A_1 = \left(\frac{HB^3}{12} \right) + b_1^2 A_1 = \frac{40 \cdot 2^3}{12} + (-1,7)^2 \cdot 80 = 257,86 \text{ см}^4$$

$$I_{y_0}^{II} = I_{y_2}^{II} + b_2^2 \cdot A_2 = I_x^{copm} + b_2^2 \cdot A_2 = 364 + 3,79^2 \cdot 18 = 621,2 \text{ см}^4.$$

$$I_{y_0}^{III} = I_{y_2}^{II} = 621,2 \text{ см}^4.$$

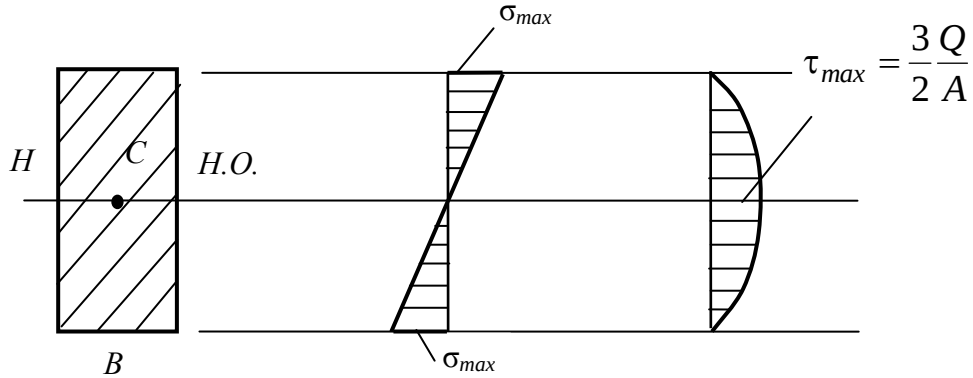
$$I_{y_0} = 1500,3 \text{ см}^4.$$

$$\text{Таким образом, } I_{max} = I_{x_0} = 22538 \text{ см}^4$$

$$I_{min} = I_{y_0} = 1500,3 \text{ см}^4.$$

Задача 3. Подобрать сечение балки, рассмотрев шесть вариантов форм и три вида материалов (древесина, чугун, сталь) для опасного сечения $|_{max}M|=131,25 \text{ кНм, } |_{max}Q|=130 \text{ кН.}$

Вариант 1. Деревянное прямоугольное ($[\sigma]=15\text{МПа}$, $[\tau]=3\text{МПа}$)



$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_{H.O.}} \leq [\sigma] \Rightarrow W_{H.O.} \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{131,25 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^6} = 8,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

$$W_{H.O.} = \frac{BH^2}{6} \geq 8,75 \cdot 10^{-3}.$$

$$\text{При } \frac{H}{B} = 2: W_{H.O.} = \frac{B(2B)^2}{6} = \frac{2}{3} B^3,$$

$$\frac{2}{3} B^3 \geq 8,75 \cdot 10^{-3} \Rightarrow B \geq \sqrt[3]{\frac{8,75 \cdot 10^{-3} \cdot 3}{2}} = 0,235 \text{ м.}$$

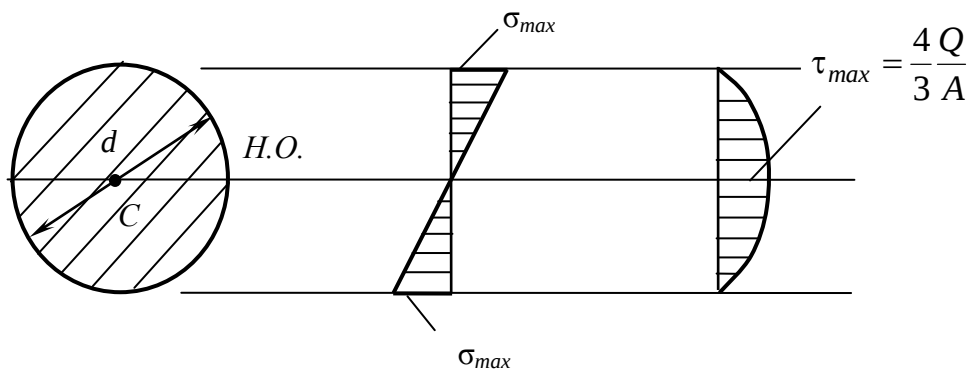
Принимаем: $B=0,24\text{м}$,

$H=0,48\text{м}$.

Проверяем по τ :

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|Q|}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{130 \cdot 10^3}{0,24 \cdot 0,48} = 1,7 \text{ МПа} < [\tau] = 3 \text{ МПа (!)}$$

Вариант 2. Деревянное круглое



$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_{H.O.}} \leq [\sigma] \Rightarrow W_{H.O.} \geq 8,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

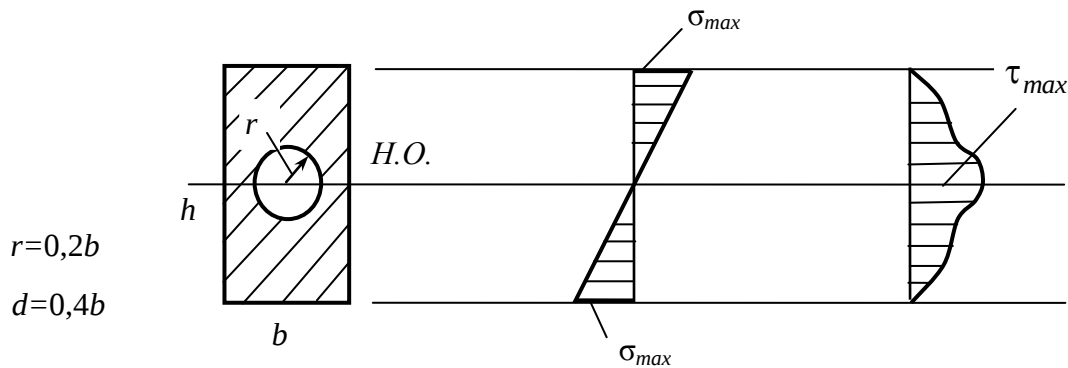
$$W_{H.O.} = \frac{\pi d^3}{32} \geq 8,75 \cdot 10^{-3} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 8,75 \cdot 10^{-3}}{3,14}} = 0,448 \text{ м.}$$

Принимаем $d=0,45 \text{ м}$, $A = \frac{\pi d^2}{4} = 0,159 \text{ м}^2$.

Проверяем по τ :

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{130 \cdot 10^3}{0,159} = 1,09 \text{ МПа} < [\tau] = 3 \text{ МПа} (!)$$

Вариант 3. Чугун : ($[\sigma_p]=30 \text{ МПа}$, $[\sigma_c]=120 \text{ МПа}$, $[\tau]=15 \text{ МПа}$)



$$I_{H.O.} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi(0,4b)^4}{64} = \frac{bh^3}{12} - 0,001256b^4.$$

При $\frac{h}{b} = 2$: $I_{H.O.} = \frac{b(2b)^3}{12} - 0,001256b^4 = \frac{8}{12}b^4 - 0,001256b^4 = 0,6654b^4.$

$$W_{H.O.} = \frac{I_{H.O.}}{h/2} = \frac{I_{H.O.}}{2b/2} = \frac{I_{H.O.}}{b} = 0,6654b^3,$$

$$W_{H.O.} \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]_p} = \frac{131,25 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6} = 4,375 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

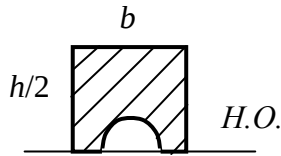
$$0,6654b^3 \geq 4,375 \cdot 10^{-3} \Rightarrow b \geq \sqrt[3]{\frac{4,375 \cdot 10^{-3}}{0,6654}} = 0,187 \text{ м.}$$

Принимаем $b=0,19 \text{ м}$, тогда $h=0,38 \text{ м}$, $d=0,076 \text{ м}$.

Проверка по τ :

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_{\max}| \cdot S_{H.O.}^{omc}}{I_{H.O.} \cdot b(y)} \leq [\tau].$$

$$b(y) = b - d = 0,19 - 0,076 = 0,114 \text{ м}$$



$$S_{H.O.}^{omc.} = b \cdot \frac{h}{2} - \frac{h}{4} - \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{2d}{3\pi} = \frac{0,19 \cdot 0,38^2}{8} - \frac{3,14 \cdot 0,076^2}{8} \cdot \frac{2 \cdot 0,076}{3 \cdot 3,14} =$$

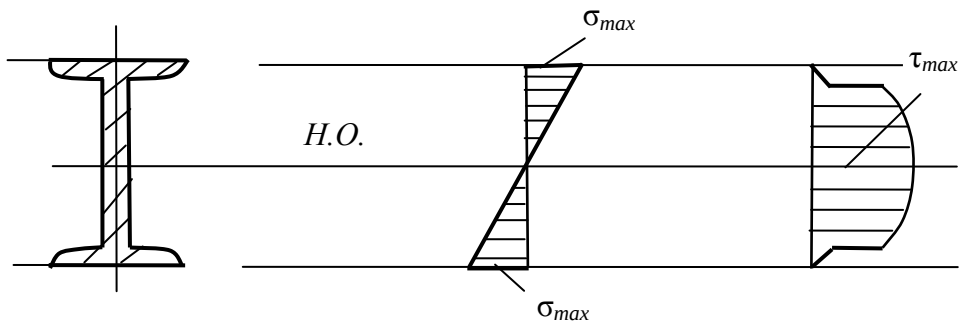
$$= 0,0034295 - 0,00003658 = 0,003393 \text{ м}^3,$$

$$I_{H.O.} = \frac{bh}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{0,19 \cdot 0,38^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 0,076^4}{64} = 0,0008688 - 0,000001636 =$$

$$= 0,0008672 \text{ м}^4,$$

$$\tau_{max} = \frac{130 \cdot 10^3 \cdot 0,003393}{0,0008672 \cdot 0,114} = 4,46 \text{ МПа} < [\tau] = 15 \text{ МПа (!)}$$

Вариант 4. Сталь, двутавр : ($[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\tau] = 80 \text{ МПа}$).



$$W_{H.O.} \geq \frac{|M_{max}|}{[\sigma]} = \frac{131,25 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,8203 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 820,3 \text{ см}^3 \Rightarrow \text{по сортаменту}$$

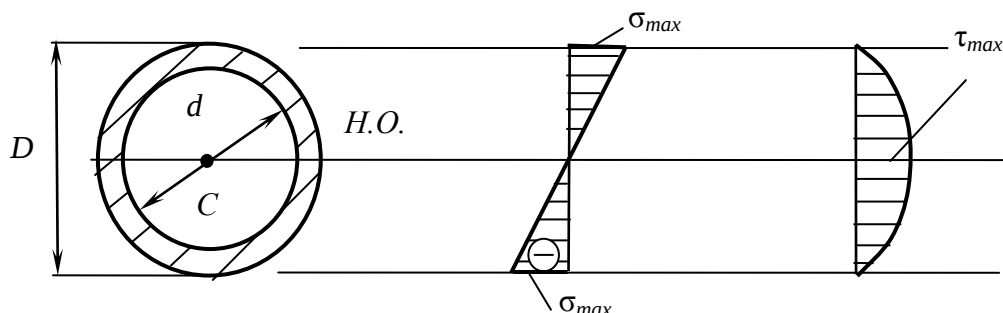
$W_x = 953 \text{ см}^3$. Это №40: $I_x = 19062 \text{ см}^4$, $S_x = 545 \text{ см}^3$, $d = 0,83 \text{ см}$.

Проверка по τ :

$$\tau_{max} = \frac{|Q_{max}| \cdot S_{H.O.}^{omc.}}{I_{H.O.} \cdot b(y)} = \frac{130 \cdot 10^3 \cdot 545 \cdot 10^{-6}}{19062 \cdot 10^{-8} \cdot 0,83 \cdot 10^{-2}} = 4,478 \cdot 10^7 = 44,78 \cdot 10^6 \text{ Па} =$$

$$= 44,78 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа (!)}$$

Вариант 5. Сталь, круглая труба ($k = \frac{d}{D} = 0,6$).



$$W_{H.O.} = \frac{I_{H.O.}}{D/2}, \quad I_{H.O.} = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right],$$

$$W_{H.O.} = \frac{\pi D^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right],$$

при $\frac{d}{D} = 0,6$: $1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 = 1 - 0,1296 = 0,8704$,

$$W_{H.O.} \geq \frac{|M_{max}|}{[\sigma]} = 0,8203 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

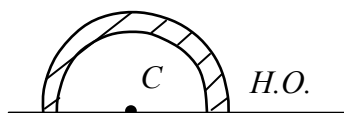
$$W_{H.O.} = \frac{\pi D^3}{32} 0,8704 \geq 0,8203 \cdot 10^{-3} \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,8203 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,8704}} = 0,213 \text{ м}.$$

Принимаем $D = 0,22 \text{ м} \rightarrow d = 0,6 \cdot D = 0,132 \text{ м}$.

Проверка по τ :

$$\tau_{max} = \frac{|Q_{max}| \cdot S_{H.O.}^{omc}}{I_{H.O.} \cdot b(y)}$$

$$b(y) = D - d = 0,22 - 0,132 = 0,088 \text{ м},$$



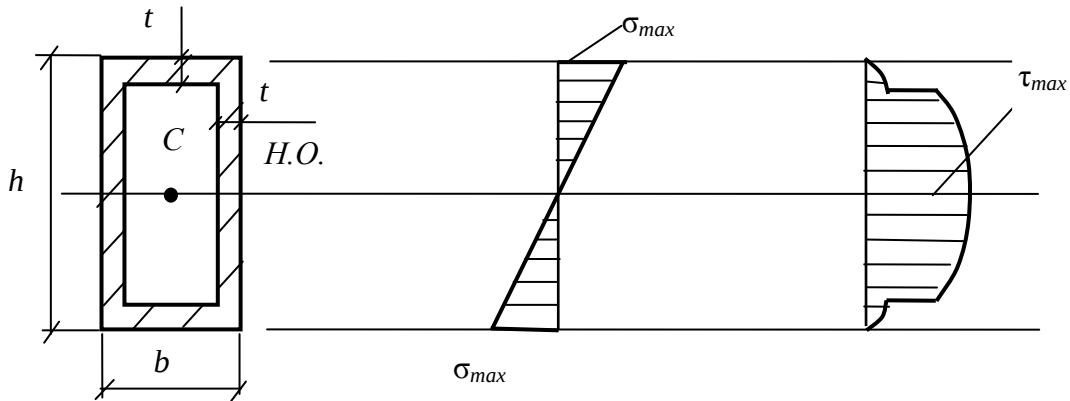
$$S_{H.O.}^{omc} = \frac{\pi D^2}{8} \cdot \frac{2D}{3\pi} - \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{2d}{3\pi} = \frac{D^3}{12} - \frac{d^3}{12} = \frac{D^3}{12} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^3 \right] =$$

$$= \frac{0,22^3}{12} [1 - 0,6^3] = 0,0006957 \text{ м}^3,$$

$$I_{H.O.} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - k^4) = \frac{3,14 \cdot 0,22^4}{64} \cdot 0,8704 = 0,0001 \text{ м}^4,$$

$$\tau_{max} = \frac{130 \cdot 10^3 \cdot 0,0006957}{0,0001 \cdot 0,088} = 10,277 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа (!)}$$

Вариант 6. Сталь, прямоугольная труба ($\frac{t}{b} = 0,1, \frac{h}{b} = 2$).



$$t/b=0,1 \rightarrow t=0,1b$$

$$I_{H.O.} = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12} = \frac{bh^3}{12} \left[1 - \frac{b_1}{b} \cdot \left(\frac{h_1}{h} \right)^3 \right] = \frac{bh^3}{12} - [1 - 0,8 \cdot 0,8^3] =$$

$$= \frac{bh^3}{12} (1 - 0,8^4) = 0,5904 \frac{bh^3}{12},$$

$$b_1 = b - 2t = b - 2 \cdot 0,1b = 0,8b,$$

$$h_1 = h - 2t = 0,8h,$$

$$W_{H.O.} = \frac{I_{H.O.}}{h/2} = 0,5904 \frac{bh^2}{6}.$$

$$\text{Если } \frac{h}{b} = 2, \text{ то } W_{H.O.} = 0,5904 \frac{b(2b)^2}{6} = 0,5904 \cdot \frac{2}{3} b^3 = 0,3936b^3.$$

$$W_{H.O.} = 0,3936b^3 \geq 0,8203 \cdot 10^{-3},$$

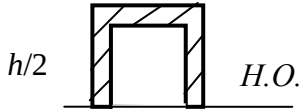
$$b \geq \sqrt[3]{\frac{0,8203 \cdot 10^{-3}}{0,3936}} = 0,128 \text{ м.}$$

Принимаем $b=0,13 \text{ м}, h=0,26 \text{ м}$.

Проверка по τ :

$$\tau_{max} = \frac{|Q_{max}| \cdot S_{H.O.}^{omc}}{I_{H.O.} \cdot b(y)}$$

$$b(y) = 2t = 2 \cdot 0,1b = 0,2b = 0,2 \cdot 0,13 = 0,026 \text{ м.}$$



$$S_{H.O.}^{omc.} = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} - \frac{b_1 h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{4} = \frac{bh^2}{8} - \frac{b_1 h_1^2}{8} = \frac{bh^2}{8} \left[1 - \frac{b_1}{b} \cdot \left(\frac{h_1}{h} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{bh^2}{8} (1 - 0,8 \cdot 0,8^2) = \frac{bh^2}{8} (1 - 0,8^3) = 0,488 \frac{bh^2}{8}.$$

$$\text{При } h = 2b: S_{H.O.}^{omc.} = 0,488 \frac{b(2b)^2}{8} = 0,488 \frac{b^3}{2} = 0,244b^3.$$

$$\text{При } \frac{h}{b} = 2: I_{H.O.} = 0,5904 \frac{b(2b)^3}{12} = 0,5904 \frac{b \cdot 8b^3}{12} = 0,3936b^4.$$

$$\tau_{max} = \frac{130 \cdot 10^3 \cdot 0,244b^3}{0,3936 \cdot b^4 \cdot 0,026} = 23,84 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа (!)}$$

Кстати: какое из сечений стальной балки выгодней по расходу материала?

Двутавр - $A = 72,6 \text{ см}^2 = 72,6 \cdot 10^{-4} = 0,00726 \text{ м}^2$,

круглая труба –

$$A = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = \frac{3,14 \cdot 0,22^2}{4} (1 - 0,36) = 0,0243 \text{ м}^2,$$

прямоугольная труба -

$$A = bh - b_1 h_1 = bh \left(1 - \frac{b_1}{b} \cdot \frac{h_1}{h} \right) = bh(1 - 0,64) = 0,13 \cdot 0,26 \cdot 0,36 = 0,0212 \text{ м}^2.$$

Самый лёгкий: двутавр → самый выгодный с точки зрения изгиба!

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М.: Наука, 1981. – 607 с.
2. Комиссарова, И.И. Расчет элементов конструкций на прочность в задачах сопротивления материалов: учебно-методическое пособие/ И.И. Комиссарова, В.А. Шапкина. – Вологда: ВоГТУ, 2012. -75с.
3. Соколов, О.Л. Сопротивление материалов в примерах и задачах: учебное пособие / О.Л. Соколов, В.А. Шапкина. – Вологда: ВоГТУ, 2011. – 148 с.
4. Тритенко, А. Н. Сопротивление материалов: расчетно-проектировочные работы: учеб. пособие / А. Н. Тритенко. – Вологда: ВоГТУ, 2008. – 180 с.

Подписано в печать 15.05.2014. Усл. печ. л. . Тираж .
Печать офсетная. Бумага офисная. Заказ № _____

Отпечатано: РИО ВоГУ, г. Вологда, ул. Ленина, 15.