Министерство образования и науки Российской Федерации
Вологодский государственный университет

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
III часть

Методическое пособие по выполнению контрольной работы № 3
для студентов заочной формы обучения

Факультет заочного и дистанционного обучения

Направление 38.03.01 – «Экономика»

Вологда
2014

УДК: 629. 113. 004. 5

Математический анализ. III часть: методическое пособие по выполнению контрольной работы № 3 для студентов заочной формы обучения направления «Экономика». – Вологда: ВоГУ, 2014. – 28 с.

Пособие ставит своей целью подготовить студентов заочной формы обучения направления «Экономика» к выполнению контрольной работы № 3 по математическому анализу, содержит необходимый теоретический материал, примеры решения задач и контрольные задания в 10 вариантах.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Составители: Быстроумова А.П., старший преподаватель;
Иванова С.В., канд. техн. наук, доцент;
Микрюкова О.И., канд. физ.-мат. наук, доцент.

Рецензент Панфилова О.А. , канд. техн. наук, заместитель
начальника кафедры информатики и математики
Вологодского института права и экономики

Подписано в печать 30.10.2014. Усл. печ. л. 1,75 Тираж экз.
Печать офсетная. Бумага писчая. Заказ №____.

Отпечатано: РИО ВоГУ, г. Вологда, ул. С. Орлова, 6

Введение

При решении некоторых задач, в том числе экономических, требуется восстановить искомую функцию по известной ее производной. Это возможно сделать с помощью операции интегрирования. Данное методическое пособие является третьей частью из серии методических пособий по курсу математического анализа для студентов дистанционной или заочной формы обучения направления «Экономика» и рассматривает вопросы интегрального исчисления функции одной переменной.

В первом разделе пособия вводятся понятия определенного и неопределенного интегралов.

Второй раздел посвящен технике интегрирования.

В третьем разделе рассмотрена одна из геометрических задач - вычисление площади плоской фигуры, для решения которой используется определенный интеграл.

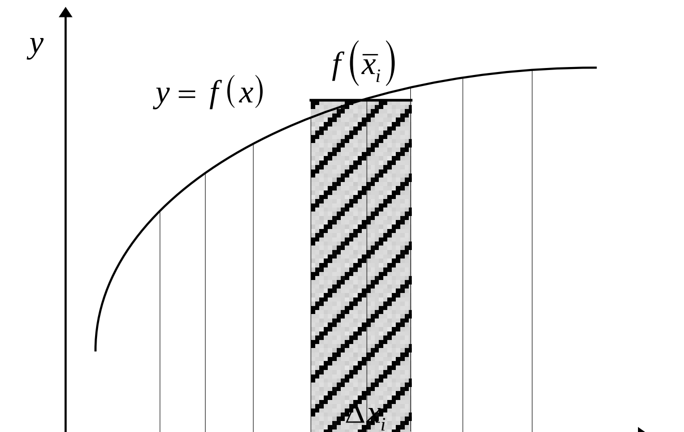
Четвертый раздел знакомит с некоторыми приложениями интегрального исчисления к решению экономических задач.

Последний раздел пособия содержит задания контрольной работы № 3 по математическому анализу в 10 вариантах.

1. Понятия определенного и неопределенного интегралов

1.1. Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть требуется найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a,b]$, и прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ (осью $0x$).



Разобьем отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n элементарных отрезков точками $x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ \dots\ x_i,\ \dots\ x_n=b$ $(x_0<x_1<x_2<\dots<x_n)$. Обозначим за $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ длину $i-$того отрезка $(i=1,2,\dots n)$. Через точки $x_1,x_2,\dots x_{n-1}$ проведем прямые, параллельные оси $0y$ до пересечения с графиком функции $y=f(x)$. В результате криволинейная трапеция разобьется на n элементар-

ных криволинейных трапеций. Тогда площадь исходной криволинейной трапеции можно представить суммой площадей: $S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$, где ΔS_i – площадь $i-$той элементарной криволинейной трапеции.

На каждом элементарном отрезке $\left[x_{i-1};\ x_i\right]$ выберем произвольную точку $\overline{x}_i$. Построим прямоугольник с основанием Δx_i и высотой $f\left(\overline{x}_i\right)$, площадь которого $\overline{\Delta S_i}=f\left(\overline{x}_i\right)\cdot\Delta x_i$. Тогда площадь этого прямоугольника приближенно заменяет площадь элементарной криволинейной трапеции и можно записать:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum_{i=1}^{n}\overline{\Delta S_i}=\sum_{i=1}^{n}f\left(\overline{x}_i\right)\cdot\Delta x_i$$

Написанное соотношение будет выполняться тем точнее, чем меньше Δx_i. Поэтому за площадь S криволинейной трапеции естественно принять:

$$S=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f\left(\overline{x}_i\right)\cdot\Delta x_i. \tag{1}$$

Сумма, которая стоит в правой части формулы (1), называется интегральной суммой для функции $f\left(x\right)$.

Пусть функция $f\left(x\right)$ определена и непрерывна на отрезке $\left[a,b\right]$ и существует конечный предел интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения отрезка $\left[a,b\right]$ и выбора точек $\overline{x}_i$, тогда этот предел называется определенным интегралом от функции $f\left(x\right)$ на отрезке $\left[a,b\right]$ и обозначается символом $\int_a^b f\left(x\right)dx$, т.е.

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f\left(\overline{x}_i\right)\cdot\Delta x_i\ .$$

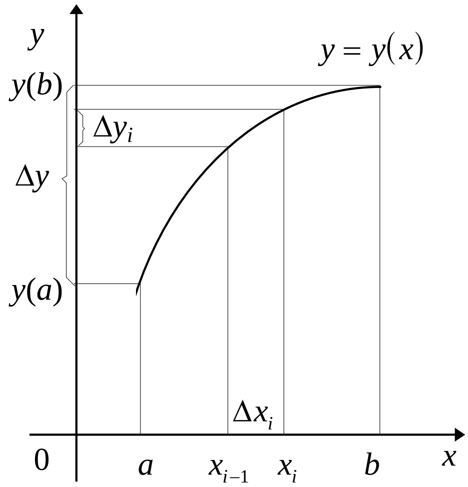
При этом $f\left(x\right)$ называется *подынтегральной функцией*, независимая переменная x – *переменной интегрирования*, числа a и b – *нижним и верхним пределами* интегрирования, $f\left(x\right)dx$ – *подынтегральным выражением*.

Геометрически определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$$y=f\left(x\right),\ \ f\left(x\right)>0,\ \ x=a,\ \ x=b,\ \ y=0:\ \ S=\int_a^b f\left(x\right)dx.$$

1.2. Вычисление определенного интеграла

Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Приращение функции на этом отрезке $\Delta y = y(b) - y(a)$.



Возьмем любую точку x_{i-1} на этом отрезке и придадим ей произвольное достаточно малое приращение Δx_i, тогда функция получит соответствующее приращение Δy_i (см. рис.).
Очевидно, что

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i .$$

Так как $\Delta y_i \approx y'(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i$, то $\Delta y = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta y_i \approx \sum\limits_{i=1}^{n} y'(x_i) \cdot \Delta x_i$.

Точное значение Δy:

$$\Delta y = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} y'(x_i) \Delta x_i = \int_a^b y'(x) dx = y(b) - y(a) \ . \qquad (2)$$

Функция $y(x)$ называется первообразной для $y'(x)$.

Обозначив $y'(x) = f(x)$, а $y(x) = F(x)$ перепишем (2) в виде:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad \text{где} \quad F'(x) = f(x). \qquad (3)$$

Эта формула называется *формулой Ньютона-Лейбница*, она дает способ вычисления определенного интеграла.

1.3. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если во всех его точках выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример. Если $f(x) = x^2$, тогда $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

Кроме указанной функции в качестве первообразной можно взять и другие функции, например, $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2$, $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \sqrt{\pi}$ или вообще любую функцию вида $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$, где C – произвольная постоянная, так как $\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=x^2$.

Следовательно, если для данной функции $f(x)$ найдена какая-нибудь первообразная $F(x)$, то любая другая первообразная для $f(x)$ имеет вид $F(x)+C$, где C – произвольная константа.

Множество $F(x)+C$ всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению:

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \text{ где } F'(x)=f(x). \tag{4}$$

Первообразную находят с помощью таблицы основных неопределенных интегралов, которая составлена на основе таблицы производных. Формулы, полученные другим образом, но также включаемые в таблицу интегралов, легко проверить дифференцированием.

Таблица основных неопределенных интегралов

1) $\int dx=x+C;$

2) $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,(\alpha\neq-1);$ 9) $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctg\,x+C;$

например, $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C;$ 10) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C;$

3) $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C;$ 11) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

4) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C;$ 12) $\int\frac{dx}{1+x^2}=arctg\,x+C;$

5) $\int e^x dx=e^x+C;$ 13) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C;$

6) $\int\cos x dx=\sin x+C;$ 14) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;$

7) $\int\sin x dx=-\cos x+C;$ 15) $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C;$

8) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tg\,x+C;$ 16) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$

Проверим, например, формулу 13). В ней

$$F(x)=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a},\quad f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}.$$

Продифференцируем:

$$\left(\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2+x^2}.$$

Нахождение первообразной для данной функции называется *интегрированием* этой функции. Таким образом, операция интегрирования обратна операции дифференцирования. Для интегрирования функций, не являющихся табличными, необходимо знать свойства неопределенного интеграла, вытекающие из его определения. Перечислим эти свойства.

Свойства неопределенного интеграла

1) Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции или дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)\quad\text{или}\quad d\int f(x)dx=f(x)dx.$$

2) Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

3) Вид первообразной не зависит от обозначения переменной:

$$\text{если}\int f(x)dx=F(x)+C,\quad\text{то}\int f(t)dt=F(t)+C.$$

4) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int k\,f(x)dx=k\int f(x)dx.$$

5) Неопределенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int\left[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\right]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx-\int f_3(x)dx.$$

Примечание. Два последних свойства выполняются с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Свойство 5) распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа функций.

2. Основные методы интегрирования, вычисление определенных интегралов

2.1. Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование состоит в приведении подынтегрального выражения к табличному виду путем преобразования и использования свойств неопределенного интеграла.

Примеры.

$$1)\ \int\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)^2 dx=\int\left(x-2x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}\right)dx=\int xdx-2\int x^{\frac{5}{6}}dx+\int x^{\frac{2}{3}}dx=$$

$$\frac{x^2}{2}-\frac{12}{11}x^{\frac{11}{6}}+x^{\frac{5}{3}}+C=\frac{x^2}{2}-\frac{12}{11}x\sqrt[6]{x^5}+x\sqrt[3]{x^2}+C.$$

(использовали табличный интеграл от степенной функции: $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$)

$$2)\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos xdx=$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}+C.$$

$$3)\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

$$4)\ \int\frac{dx}{x^2+4}=\int\frac{dx}{x^2+2^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

$$5)\ \int\frac{dx}{x^2-3}=\int\frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C.$$

$$6)\ \int\frac{dx}{\sqrt{8-2x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2\left(4-x^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x}{2}+C.$$

$$7)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right|+C.$$

При вычислении неопределенных интегралов полезно иметь в виду следующую формулу:

Если $\int f(x)dx=F(x)+C,$ то $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$ (5)

В частности, некоторые табличные интегралы примут вид:

1) $\int (ax+b)^{\alpha} dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;$

В частности, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{a}\cdot 2\sqrt{ax+b} + C;$

2) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C;$

3) $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C;$

4) $\int a^{kx+b} dx = \frac{1}{k}\frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C;$

5) $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C;$

6) $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C;$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b) + C;$

8) $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}(ax+b) + C.$

Примеры.

1) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}4x + C.$

2) $\int \cos\frac{x}{5} dx = 5\sin\frac{x}{5} + C.$

3) $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C.$

4) $\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C.$

5) $\int \sqrt{3x-1}\, dx = \int (3x-1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3}\frac{(3x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{(3x-1)^3} + C.$

2.2 Замена переменной интегрирования

Этот способ применяется в тех случаях, когда подынтегральное выражение не может быть непосредственно преобразовано к табличному виду.

За новую переменную t принимают такую функцию $t = t(x)$, чтобы выполнялось условие:

$\int f(x)dx = \int u(t)dt$, причем $\int u(t)dt$ – табличный, $dt = t'(x)dx.$

Примеры.

1) Найти $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = \sqrt{x} \\ dt = \left(\sqrt{x}\right)' dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \end{array} \right| = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

2) Найти $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx.$

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = \sin x \\ dt = (\sin x)' dx = \cos x dx \end{array} \right| = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x + C = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + C.$$

3) Найти $\int \frac{xdx}{x^2+4}.$

$$\int \frac{xdx}{x^2+4} = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = x^2 + 4 \\ dt = \left(x^2+4\right)' dx = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + C = \ln\sqrt{x^2+4} + C.$$

4) Найти $\int xe^{x^2}dx$.

$$\int xe^{x^2}dx = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = x^2 \\ dt = \left(x^2\right)' dx = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

5) Найти $\int tgxdx$.

$$\int \mathrm{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = \cos x \\ dt = (\cos x)' dx = -\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -dt \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

6) Найти $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4 x}}{x}dx$.

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4 x}}{x}dx = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = \ln x \\ dt = (\ln x)' dx = \frac{1}{x}dx = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int t^{\frac{4}{3}}dt = \frac{t^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C = \frac{3}{7}(\ln x)^{\frac{7}{3}} + C.$$

7) Найти $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$.

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = arctgx \\ dt = (arctgx)' dx = \frac{dx}{1+x^2} \end{array} \right| = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C.$$

8) Найти $\int \sin^3 xdx$.

$$\int \sin^3 xdx = \int \sin^2 x \sin xdx = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = \cos x \\ dt = (\cos x)' dx = -\sin xdx \Rightarrow \sin xdx = -dt \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| =$$

$$= -\int (1-t^2)dt = -\left(t - \frac{t^3}{3}\right) + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

9) Найти $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \left| \begin{array}{c} \text{выделим в знаменателе полный квадрат двучлена} \\ x^2 + x + 1 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{array} \right| = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = x + \frac{1}{2} \\ dt = \left(x + \frac{1}{2}\right)' dx = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

10) Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}} = \left| \begin{array}{c} \text{выделим в подкоренном выражении} \\ \text{полный квадрат двучлена} \\ x^2+4x+7 = x^2+2x\cdot 2+4+3 = (x+2)^2+3 \end{array} \right| = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+3}} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = x+2 \\ dt = (x+2)' dx = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+3}\right| + C = \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+3}\right| + C =$$

$$\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+7}\right| + C.$$

11) Найти $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x+2}}$.

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x+2}} = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = \sin x+2 \\ dt = (\sin x+2)' dx = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = = 2\sqrt{\sin x+2} + C.$$

12) Найти $\int \frac{3x+4}{2x^2+5} dx$.

$$\int \frac{3x+4}{2x^2+5} dx = \int \frac{3x}{2x^2+5} dx + 4\int \frac{dx}{2x^2+5} = \frac{3}{4}\int \frac{4xdx}{2x^2+5} + \frac{4}{2}\int \frac{dx}{x^2+\frac{5}{2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = 2x^2+5 \\ dt = (2x^2+5)' dx = 4xdx \end{array} \right| = \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t} + 2\int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} = \frac{3}{4}\ln|t| + 2\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{5}{2}}} + C =$$

$$= \frac{3}{4}\ln\left(2x^2+5\right) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}} + C.$$

13) Найти $\int \frac{x-5}{\sqrt{3x^2-2}} dx$.

$$\int \frac{x-5}{\sqrt{3x^2-2}} dx = \int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2-2}} - 5\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{6}\int \frac{6xdx}{\sqrt{3x^2-2}} - \frac{5}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = 3x^2-2 \\ dt = (3x^2-2)' dx = 6xdx \end{array} \right| = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{5}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}\sqrt{t} - \frac{5}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}\right| + C$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-2}-\frac{5}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}\right|+C.$$

2.3. Интегрирование по частям

Пусть $u=u(x)$, $v=v(x)$ и $u'=u'(x)$, $v'=v'(x)$ непрерывные функции. Известно, что $d(uv)=vdu+udv$, откуда $udv=d(uv)-vdu.$ Интегрируя последнее соотношение, получим $\int udv=\int d(uv)-\int vdu$ или

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (6)$$

(произвольная постоянная интегрирования C включена в слагаемое $\int vdu$). Это и есть *формула интегрирования по частям*.

Метод интегрирования по частям применяется в тех случаях, когда невозможно или очень затруднительно найти интеграл с помощью других методов. Выбирать "u" и "dv" целесообразно таким образом, чтобы интеграл в правой части формулы (6) был более простым для вычисления, чем исходный интеграл, или позволяющим найти исходный интеграл.

К числу интегралов, вычисляемых с помощью формулы интегрирования по частям, относятся интегралы вида $\int P(x)f(x)dx$, где $P(x)$ – многочлен от x, в частном случае $P(x)=x^n$, $f(x)$–одна из следующих функций e^{ax}, $\sin ax$, $\cos ax$, $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$. При этом для интегралов вида $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$ за "u" принимается многочлен $P(x)$, а для интегралов вида $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} xdx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$ за "u" принимается $f(x)$.

Примеры.

$$1)\int xe^x\,dx=\left|\begin{array}{c}\text{по частям}\\ u=x \;\Rightarrow\; du=dx\\ dv=e^x\,dx\Rightarrow v=\int e^x\,dx=e^x\end{array}\right|=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C.$$

$$2)\int x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{c} \text{по частям} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

$$3)\int \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{c} \text{по частям} \\ u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right| = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} =.$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

$$4)\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{c} \text{по частям} \\ u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C.$$

Иногда необходимо повторное интегрирование по частям.

$$5)\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{c} \text{по частям} \\ u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - 2\int x \sin dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{по частям} \\ u_1 = x \Rightarrow du_1 = dx \\ dv_1 = \sin x dx \Rightarrow v_1 = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x dx\right) =$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

2.4. Свойства определенного интеграла

1) Определенный интеграл с равными верхним и нижним пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Это легко объяснить с геометрической точки зрения: длина основания криволинейной трапеции равна нулю, следовательно, и ее площадь равна нулю.

2) При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Действительно, по формуле Ньютона-Лейбница имеем: $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -\left(F(b) - F(a)\right) = -\int_a^b f(x)dx.$

3) Определенный интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad \text{где} \quad a < c < b.$$

Это свойство вытекает из определения определенного интеграла как предела интегральной суммы. (Примечание: написанное равенство справедливо и в том случае, когда точка с не является внутренней точкой промежутка $[a;b]$.)

4) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Действительно, по определению:

$$\int_a^b k\, f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\, f(\overline{x}_i)\Delta x_i = k \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx.$$

5) Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx =$$

$$= F_1(x)\Big|_a^b + F_2(x)\Big|_a^b - F_3(x)\Big|_a^b = \left(F_1(x) + F_2(x) - F_3(x)\right)\Big|_a^b$$

Здесь $F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x)$ – соответственно первообразные для $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$.

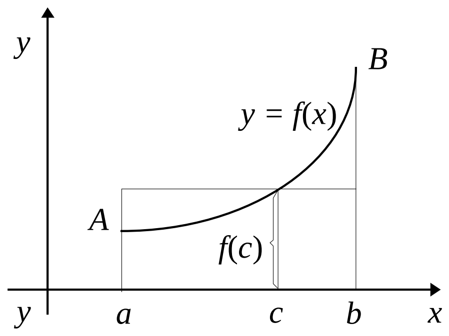
Это свойство доказывается аналогично предыдущему.

6) *Теорема о среднем значении*: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то в интервале (a,b) найдется хотя бы одна такая точка c, что справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c).$$

Если подынтегральная функция положительна на всем промежутке интегрирования, то написанная формула имеет простое геометрическое истолкование: площадь криволинейной трапеции $aABb$ равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной $f(c)$.

Указанную формулу можно использовать и в другом виде: среднее значение $f(c)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ равно:



$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \qquad (7)$$

2.5. Вычисление определенного интеграла в случае использования методов интегрирования

1) Замена переменной в определенном интеграле.

Если при вычислении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ используется замена переменной $t = t(x)$, то определенный интеграл преобразуется таким образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} u(t)dt = U(t_2) - U(t_1), \qquad (8)$$

где $U(t)$ – первообразная для $u(t)$, $t_1 = t(a)$, $t_2 = t(b)$.

2) Интегрирование по частям.

При использовании формулы интегрирования по частям определенный интеграл вычисляют следующим образом:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du, \qquad (9)$$

где символическая запись $uv\Big|_a^b$ означает следующее: $uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

2.6. Примеры вычисления определенного интеграла

1) $\int_1^2 \left(3x^4+2x^2-5\right)dx=\left(\frac{3}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3-5x\right)\Big|_1^2=$

$=\frac{3}{5}2^5+\frac{2}{3}2^3-5\cdot 2-\left(\frac{3}{5}1^5+\frac{2}{3}1^3-5\cdot 1\right)=\frac{274}{15}.$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$

3) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}.$

4) $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}=\frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^2=\frac{1}{2}\left(\ln 3-\ln 1\right)=\ln\sqrt{3}.$

5) Найти среднее значение функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[0;1]$.

$$f(c)=\frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^1=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\Big|_0^1=\frac{3}{4}\sqrt[3]{1^4}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{0^4}=\frac{3}{4}.$$

6) Вычислить определенный интеграл $\int_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

$$\int_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}=\left|\begin{array}{c}\text{замена}\\ t=\ln x\\ dt=\frac{dx}{x}\\ t_1=\ln 1=0\\ t_2=\ln e=1\end{array}\right|=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg} t\Big|_0^1=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}.$$

7) Вычислить определенный интеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ t_1 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right| = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{dt}{t^3} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} t^{-3} dt = \left.\frac{t^{-2}}{-2}\right|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = -\left.\frac{1}{2t^2}\right|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$8)\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{c} \text{по частям} \\ u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right| = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} = \left(x\ln x - x\right)\Big|_1^e =$$

$$= e\cdot \ln e - e - (1\cdot \ln 1 - 1) = 1.$$

$$9)\int_0^{\pi} x\sin x dx = \left| \begin{array}{c} \text{по частям} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = \left(-x\cos x\right)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx =$$

$$= \left(-x\cos x + \sin x\right)\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

$$10)\int_0^1 x\operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{c} \text{по частям} \\ u = arctgx \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1-1)dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{arctg} x\right)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

3. Применение определенного интеграла к вычислению площади плоской фигуры

В пункте 1.1. уже рассматривалась задача о нахождении площади криволинейной трапеции, которая решается с помощью определенного интеграла. При рассмотрении этой задачи было показано, что площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = y(x)$, $\left(y(x) \geq 0\right)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, можно найти по формуле:

$$S = \int_a^b y(x)\, dx.$$

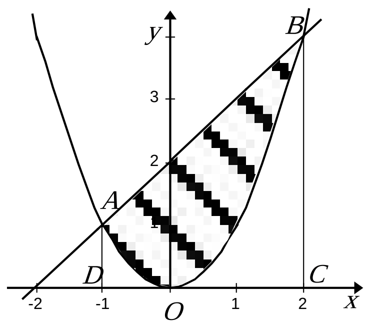
Применим эту формулу для вычисления площади.

Пример. Найти площадь, ограниченную данными линиями:

$$y = x^2; \quad y = x + 2.$$

Фигура, площадь которой нужно найти, изображена на рисунке. Площадь такой плоской фигуры S равна разности площадей двух криволинейных трапеций $ABCD$ и $AOBCD$ и определяется по следующей формуле:

$$S = \int_a^b \left[y_B(x) - y_H(x)\right] dx,$$



где $y_B(x)$ – функция, график которой ограничивает фигуру сверху;

$y_H(x)$ – функция, график которой ограничивает фигуру снизу;

a и b – значения x, при которых графики пересекаются ($a < b$).

Точки пересечения найдем из условия: $x^2 = x + 2$ или $x^2 - x - 2 = 0$.

Решение квадратного уравнения дает: $a = -1$; $b = 2$. Составим и вычислим интеграл:

$$S = \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4{,}5.$$

Примечание. Хотя формула для вычисления площади плоской фигуры выведена в предположении, что фигура расположена выше оси Ox, ею можно пользоваться для вычисления площади при любом расположении фигуры, т.к. площадь последней не зависит от изменения ее положения относительно осей; их всегда можно провести так, чтобы рассматриваемый объект находился не ниже оси OX.

4. Приложения интегрального исчисления в экономике

4.1. Объем выпускаемой продукции, произведенной за время T

Пусть функция *y=f(t)* описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени *t*. Найдем объем продукции *u*, произведенной за промежуток времени *[0,T*], в предположении, что функция *f(t)* – непрерывна на отрезке *[0,T*].

Построим интегральную сумму. Разобьем отрезок *[0,T]* на промежутки времени точками: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$.

Для величины объема продукции Δu_i, произведенной за промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$, имеем:

$$\Delta u_i = f(c_i)\Delta t_i \text{, где } c_i \in [t_{i-1}, t_i],$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta u_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$.

Перейдя к пределу при $\max \Delta t_i \to 0$, найдем объем произведенной продукции

$$u = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i .$$

По определению определенного интеграла

$$\lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i = \int_0^T f(t)dt,$$

таким образом

$$u = \int_0^T f(t)dt .$$

Итак, если *f(t)* – производительность труда в момент *t*, то $\int\limits_0^T f(t)dt$ есть объем выпускаемой продукции за промежуток *[0,T]*.

Пример. Определить объем продукции, произведенной за второй час работы, если производительность труда задана функцией $f\left(t\right) = \dfrac{2}{3t+4} + 3$.

Составим и вычислим интеграл.

$$u = \int_1^2 \left(\frac{2}{3t+4} + 3 \right) dt = \left(\frac{2}{3}\ln\left(3t+4\right) + 3t \right)\Bigg|_1^2 = \frac{2}{3}\ln 10 + 6 - \frac{2}{3}\ln 7 - 3 = \frac{2}{3}\ln\frac{10}{7} + 3.$$

4.2. Применение теоремы о среднем значении

Пусть известна функция *t=t(x)*, описывающая изменение затрат времени *t* на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где *x* – порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий, вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)\,dx.$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий *t=t(x)*, то она определяется экспериментально и имеет вид $t(x) = ax^{-b}$, где $a > 0$ – затраты времени на первое изделие, $0 < b < 1$ - параметр производственного процесса.

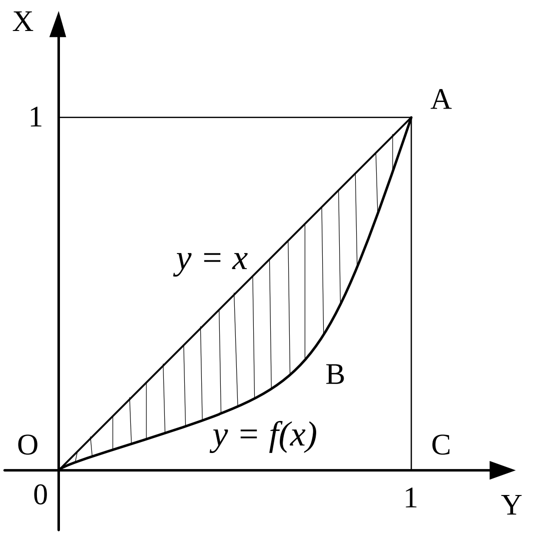
Пример. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$ до $x_2 = 121$ изделий, полагая в формуле $t(x) = ax^{-b}$ $a = 600$ (мин.), $b = 0{,}5$.

Решение:

$$t_{cp} = \frac{1}{121-100}\int_{100}^{121} 600x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{600}{21}2\sqrt{x}\Big|_{100}^{121} = \frac{400}{7} \approx 57{,}2 \text{ (мин.)}.$$

4.3. Коэффициент неравномерности распределения доходов

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где *x* - часть наиболее низко оплачиваемого населения некоторого региона, *y* - доля совокупного дохода, получаемая частью *x*. Очевидно, что $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ и $x \le y$. Если $y(0{,}2) = 0{,}1$, то 0,2 населения (20%) получают 0,1 совокупного дохода (10%). Функция $y = f(x)$ называется функцией Лоренца, а ее график – кривой Лоренца.



Если бы распределение доходов было совершенным, то кривой Лоренца была бы прямая $x = y$, и 1% населения получал бы 1% совокупного дохода, 10% населения – 10% дохода и т.д. Степень неравномерности распределения доходов определяется отношением площади заштрихованной фигуры *OAB* к площади треугольника *OAC* и называется *коэффициентом неравномерности распределения доходов:* $k = \dfrac{S_{OAB}}{S_{OAC}}$.

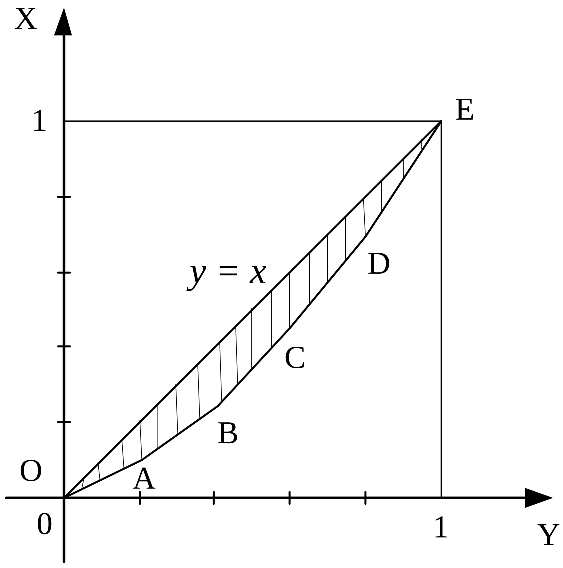
Если учесть, что $S_{OAC} = \dfrac{1}{2}$, то $k = 2\int\limits_0^1 \left(x - f\left(x\right)\right)dx = 1 - 2\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx.$

Отсюда следует, что $0 \le k \le 1$, и при совершенном распределении доходов $k = 0$.

Функция Лоренца строится следующим образом. Население региона разбивается на несколько групп, как правило, равных по численности, но различных по доходам. Начиная с группы с наименьшим доходом, определяется, какую часть совокупного дохода получает каждая группа. Затем на графике наносятся точки, соответствующие полученным частям. Например, население разделено на 5 равных по численности групп (20% в каждой группе) и совокупный доход распределен по группам так: 1-я группа – 10%, 2-я группа – 15%, 3-я группа – 20%, 4-я группа – 25%, 5-я группа – 30%.

При построении графика функции Лоренца учитывают, что 20% наименее обеспеченного населения получают 10% дохода (точка A), для 40% населения приходится 25% дохода (точка B), для 60% населения - 45% дохода (точка C), для 80% населения - 70% дохода (точка D), для 100% населения - 100% дохода (точка E). Это распределение доходов населения в частях запишем в таблице:

Часть населения x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Часть дохода y_i	0	0,1	0,25	0,45	0,7	1



По таблице можно записать функцию Лоренца для этого распределения доходов:

$$f(x)=\begin{cases}0,5x,\ \textit{если}\ 0\le x\le 0,2;\\ 0,75x-0,05,\ \textit{если}\ 0,2\le x\le 0,4;\\ x-0,15,\ \textit{если}\ 0,4\le x\le 0,6;\\ 1,25x-0,3,\ \textit{если}\ 0,6\le x\le 0,8;\\ 1,5x-0,5,\ \textit{если}\ 0,8\le x\le 1.\end{cases}$$

Пример. Распределение доходов задано функцией Лоренца: $f(x)=\frac{9}{10}x^2+\frac{1}{10}x$. Вычислить коэффициент неравномерности распределения доходов.

$$k=1-2\int_0^1\left(\frac{9}{10}x^2+\frac{1}{10}x\right)dx=1-\frac{3}{5}x^3\bigg|_0^1-\frac{1}{10}x^2\bigg|_0^1=0,3.$$

Библиографический список

1. Красс, М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – Санкт-Петербург: Питер, 2007. – 464 с.
2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. для втузов: в 2 т. Т.2 /Н.С. Пискунов. – Изд. стер. – Москва: Интеграл-Пресс, 2009. – 544 с.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. Ч.2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – 7-е изд., испр. – Москва: ОНИКС: Мир и Образование, 2009. – 448 с.

Контрольная работа по математическому анализу № 3

Вариант 1

Задание 1

Найдите неопределенный интеграл.

а) $\int \frac{dx}{2x^2+3}$; б) $\int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}}dx$; в) $\int 2^{3x-5}dx$; г) $\int \frac{\ln^2(4x+1)}{4x+1}dx$.

Задание 2

Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{0,5}^{1}\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}\right)dx$.

Задание 3

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{(x-1)^2}{4}$; $x-2y+11=0$.

Контрольная работа по математическому анализу № 3

Вариант 2

Задание 1

Найдите неопределенный интеграл.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}$; б) $\int \frac{x-3}{9x^2+7}dx$; в) $\int \sin\frac{x}{3}dx$; г) $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Задание 2

Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{0,5}^{1}\left(2-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)dx$.

Задание 3

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{(x-2)^2}{4}$; $x-2y+10=0$.

Контрольная работа по математическому анализу № 3

Вариант 3

Задание 1

Найдите неопределенный интеграл.

а) $\int \frac{dx}{3x^2 - 5}$; б) $\int \frac{x-4}{\sqrt{9-x^2}}dx$; в) $\int \cos\frac{4}{5}x dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{arctg} x}\left(1+x^2\right)}$.

Задание 2

Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{0,5}^{1}\left(5x^4 - \frac{3}{x^4} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Задание 3

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{(x-3)^2}{4}$; $x - 2y + 9 = 0$.

Контрольная работа по математическому анализу № 3

Вариант 4

Задание 1

Найдите неопределенный интеграл.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8}}$; б) $\int \frac{4x-3}{3x^2-4}dx$; в) $\int e^{-x/2}dx$; г) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x - 4}}dx$.

Задание 2

Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{0,5}^{1}\left(3x^2 + \frac{5}{x^6} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$.

Задание 3

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{(x-4)^2}{4}$; $x - 2y + 8 = 0$.

Контрольная работа по математическому анализу № 3

Вариант 5

Задание 1

Найдите неопределенный интеграл.

а) $\int \frac{dx}{5x^2+3}$; б) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$; в) $\int \frac{dx}{4-3x}$; г) $\int \sqrt{\cos x-2}\sin x dx$.

Задание 2

Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{0,5}^{1}\left(4x^3-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$.

Задание 3

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{(x-5)^2}{4}$; $x-2y+7=0$.

Контрольная работа по математическому анализу № 3

Вариант 6

Задание 1

Найдите неопределенный интеграл.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$; б) $\int \frac{3x+2}{2x^2+1}dx$; в) $\int \sqrt[3]{4x-1}dx$; г) $\int \frac{(\operatorname{tg} x+6)^5}{\cos^2 x}dx$.

Задание 2

Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{0,5}^{1}\left(5x^4-\frac{4}{x^5}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$.

Задание 3

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{(x-1)^2}{3}$; $2x-y-2=0$.

Контрольная работа по математическому анализу № 3

Вариант 7

Задание 1

Найдите неопределенный интеграл.

а) $\int \frac{dx}{7x^2-11}$; б) $\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2+3}}dx$; в) $\int 5^{2-3x}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

Задание 2

Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{0,5}^{1}\left(6x^5-\frac{1}{x^2}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$.

Задание 3

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{(x-2)^2}{3}$; $2x-y-4=0$.

Контрольная работа по математическому анализу № 3

Вариант 8

Задание 1

Найдите неопределенный интеграл.

а) $\int \frac{3dx}{\sqrt{x^2+10}}$; б) $\int \frac{1-3x}{4x^2-1}dx$; в) $\int \cos(4x-1)dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x(\operatorname{ctg} x+2)}$.

Задание 2

Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{0,5}^{1}\left(7x^6-\frac{3}{x^4}+3\sqrt{x}\right)dx$.

Задание 3

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{(x-3)^2}{3}$; $2x-y-6=0$.

Контрольная работа по математическому анализу № 3

Вариант 9

Задание 1

Найдите неопределенный интеграл.

а) $\int \frac{dx}{9x^2+4}$; б) $\int \frac{5-4x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{3}\right)}$; г) $\int \sqrt{\sin^3 x}\cos x dx$.

Задание 2

Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{0,5}^{1}\left(8x-\frac{5}{x^6}+7\sqrt[6]{x}\right)dx$.

Задание 3

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{(x-4)^2}{3};\ 2x-y-8=0$.

Контрольная работа по математическому анализу № 3

Вариант 10

Задание 1

Найдите неопределенный интеграл.

а) $\int \frac{3dx}{\sqrt{x^2-5}}$; б) $\int \frac{8-2x}{3x^2+1}dx$; в) $\int e^{4-5x}dx$; г) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5}dx$.

Задание 2

Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{0,5}^{1}\left(4-\frac{1}{x^3}+\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$.

Задание 3

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{(x-5)^2}{3};\ 2x-y-10=0$.