Министерство образования и науки Российской Федерации
Вологодский государственный университет

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

Решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью

Методические указания и контрольные задания для студентов направления 140400.62

Электроэнергетический факультет

Вологда
2014

УДК: 517.3

Математика. Решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью: методические указания и контрольные задания для студентов направления 140400.62. – Вологда: ВоГУ, 2014. – 20 с.

В методических указаниях рассматриваются основные ситуации, возникающие при решении линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффиентами со специальной правой частью. Решения всех основных типов задач представлены с достаточно подробными комментариями. Контрольные задания содержат по 30 вариантов задач для самостоятельного решения.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Составитель А.А. Аваев, канд. техн. наук, доцент

Рецензент Э.М. Мухамадиев, д-р физ.-мат. наук, профессор

ВВЕДЕНИЕ

Основной задачей методических указаний является обучение студентов решению линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью, что при дефиците аудиторных часов, отводимых на изучение курса математики, и, в частности данного раздела, весьма актуально. Методические указания содержат элементы теории решения уравнений данного типа, подробно разобранные примеры, иллюстрирующие большинство ситуаций, которые могут встретиться при решении подобных задач. Приведены контрольные задания для самостоятельного решения – 30 вариантов по 10 задач в каждом варианте.

Элементы теории решения линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью

Общее решение $y(x)$ линейного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{1}$$

где a_1, a_2 – коэффициенты уравнения (1), $f(x)$ – правая часть этого уравнения, может быть представлено в виде [1]

$$y(x) = y_0(x) + \varphi(x), \tag{2}$$

где $y_0(x)$ – общее решение уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{3}$$

соответствующего уравнению (1), $\varphi(x)$ – частное решение уравнения (1).

При постоянных коэффициентах a_1, a_2 общее решение $y_0(x)$ определяется корнями λ_1, λ_2 характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \tag{4}$$

Если $D^* > 0$, где $D^* = a_1^2 - 4a_2$ – дискриминант уравнения (4), то λ_1, λ_2 представляют собой различные действительные числа, при этом общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{5}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Если $D^*=0$, то λ_1,λ_2 – одинаковые действительные числа, при этом

$$y_0(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}. \qquad (6)$$

И, наконец, если $D^*<0$, то $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ – сопряженные комплексные числа где α,β – действительные числа: действительная и мнимая части чисел λ_1,λ_2, соответственно; $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица. В этом случае общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y_0(x)=e^{ax}\left[C_1 cos(\beta x)+C_2 sin(\beta x)\right]. \qquad (7)$$

Если правая часть $f(x)$ уравнения (1) имеет так называемый специальный вид, то частное решение $\varphi(x)$ этого уравнения находится достаточно просто.

Частные случаи специального вида $f(x)$ можно разбить на две группы – I и II.

I. Если $f(x)=e^{ax}P_m(x)$, где $P_m(x)$ – многочлен x степени m (m – натуральное число или 0), то частное решение $\varphi(x)$ уравнения (1) следует искать в виде

$$\varphi(x)=x^k e^{ax}R_m(x), \qquad (8)$$

где k – количество совпадений числа a с корнями λ_1,λ_2 характеристического уравнения (3); $R_m(x)$ – многочлен x степени m **общего вида**, т.е. с неизвестными пока коэффициентами $A,B,C,D,\ldots$

$$m=0\Rightarrow R_m(x)=A;$$
$$m=1\Rightarrow R_m(x)=Ax+B;$$
$$m=2\Rightarrow R_m(x)=Ax^2+Bx+C \text{ и т.д.}$$

Возможные значения $k=0;1;2$. Если дискриминант уравнения (4) отрицателен, то **всегда** $k=0$.

Числовые значения коэффициентов многочлена $R_m(x)$ находят по методу неопределенных коэффициентов.

II. Если $f(x)=e^{ax}\left[P_m(x)cos(bx)+Q_n(x)sin(bx)\right]$, где $Q_n(x)$ – многочлен x степени n (n – натуральное число или 0), причем $b\neq 0$, то частное решение $\varphi(x)$ уравнения (1) следует искать в виде

$$\varphi(x)=x^k e^{ax}\left[R_{N1}(x)cos(bx)+R_{N2}(x)sin(bx)\right], \qquad (9)$$

где k – количество совпадений комплексного числа $a+ib$ с корнями характеристического уравнения (4); $R_{N1}(x),R_{N2}(x)$ – **различные** многочлены

x общего вида **одинаковой** степени N, при этом N – наибольшее из чисел m,n.

Возможные значения $k=0;1$. Если дискриминант уравнения (4) неотрицателен, то **всегда** $k=0$.

Примеры решения линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью

1. Найти общее решение уравнения $y''-6y'+13=-8e^{3x}$.

Решение.

Правая часть данного уравнения относится к группе I, при этом $a=3$, $P_m(x)=-8 \Rightarrow m=0$.

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид $\lambda^2-6\lambda+13=0$, а его корнями являются сопряженные комплексные числа $\lambda_{1,2}=3\pm 2i$, а значит $k=0$. Так как $\alpha=2, \beta=2$, то (7) $y_0(x)=e^{3x}\left[C_1 cos(2x)+C_2 sin(2x)\right]$. Частное решение заданного уравнения следует искать (см.(8)) в виде $\varphi(x)=Ae^{3x}$.

При этом $\varphi'(x)=3Ae^{3x}, \varphi''(x)=9Ae^{3x}$. Подставив правые части выражений для $\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x)$ в заданное уравнение, получим

$$9Ae^{3x}-18Ae^{3x}+13Ae^{3x}=-8e^{3x};$$

$$4Ae^{3x}=-8e^{3x} \Rightarrow 4A=-8 \Rightarrow A=-2.$$

Следовательно $\varphi(x)=-2e^{3x}$, $y(x)=e^{3x}\left[C_1 cos(2x)+C_2 sin(2x)\right]-2e^{3x}$.
Ответ: $y(x)=e^{3x}\left[C_1 cos(2x)+C_2 sin(2x)\right]-2e^{3x}$.

2. Найти общее решение уравнения $y''-3y'+2y=(64-48x)e^{-2x}$.

Решение.

Правая часть данного уравнения относится к группе I, при этом $a=-2$, $P_m(x)=64-48x \Rightarrow m=1$.

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид $\lambda^2-3\lambda+2=0$, его корнями являются действительные числа $\lambda_1=1,\lambda_2=2$, значит $k=0$. При этом (см. (5)) $y_0(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$. Частное решение заданного уравнения следует искать (см. (8)) в виде $\varphi(x)=(Ax+B)e^{-2x}$.

В этом случае $\varphi'(x) = Ae^{-2x} + (-2Ax - 2B)e^{-2x} = (-2Ax + A - 2B)e^{-2x}$, $\varphi''(x) = -2Ae^{-2x} + (4Ax - 2A + 4B)e^{-2x} = (4Ax - 4A + 4B)e^{-2x}$. Подставив правые части выражений для $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)$ в заданное уравнение, получим

$$(4Ax - 4A + 4B)e^{-2x} + (6Ax - 3A + 6B)e^{-2x} + (2Ax + 2B)e^{-2x} = (64 - 48x)e^{-2x};$$

$$12Ax - 7A + 12B = 64 - 48x.$$

Равенство двух многочленов означает равенство коэффициентов при соответствующих степенях x

$$\begin{array}{c|} x^1 \\ x^0 \end{array} \begin{cases} 12A = -48 \\ -7A + 12B = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ 12B = 7A + 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ 12B = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = 3 \end{cases}.$$

Следовательно $\varphi(x) = (-4x + 3)e^{-2x}$.

Ответ: $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + (-4x + 3)e^{-2x}$.

3. Найти общее решение уравнения $y'' + 3y' - 4y = 15e^{-4x}$.

Решение.

Правая часть данного уравнения относится к группе I, при этом $a = -4$, $P_m(x) = 15 \Rightarrow m = 0$.

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид $\lambda^2 + 3\lambda - 4$, его корнями являются действительные числа $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1$, значит $k = 1$. При этом (5) $y_0(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x$. Частное решение заданного уравнения следует искать в виде (8) $\varphi(x) = x^1Ae^{-4x} = (Ax)e^{-4x}$.

В этом случае

$$\varphi'(x) = Ae^{-4x} + (-4Ax)e^{-4x} = (-4Ax + A)e^{-4x},$$

$$\varphi''(x) = -4Ae^{-4x} + (16Ax - 4A)e^{-4x} = (16Ax - 8A)e^{-4x}.$$

Подставив правые части выражений для $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)$ в заданное уравнение, получим

$$(16Ax - 8A)e^{-4x} + (-12Ax + 3A)e^{-4x} + (-4Ax)e^{-4x} = 15e^{-4x};$$

$$-5Ae^{-4x} = 15e^{-4x} \Rightarrow -5A = 15 \Rightarrow A = -3.$$

Таким образом $\varphi(x) = -3xe^{-4x}$.

Ответ: $y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x - 3xe^{-4x}$.

4. Найти общее решение уравнения $y''-5y'+6y=(5-6x)e^{2x}$.

Решение.

Правая часть данного уравнения относится к группе I, при этом $a=2$, $P_m(x)=5-6x \Rightarrow m=1$.

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид $\lambda^2-5\lambda+6=0$, его корнями являются действительные числа $\lambda_1=2, \lambda_2=3$, значит $k=1$. При этом (см. (5)) $y_0(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. Частное решение данного уравнения следует искать в виде (8) $\varphi(x)=x^1e^{2x}(Ax+B)=\left(Ax^2+Bx\right)e^{2x}$.

В этом случае

$$\varphi'(x)=(2Ax+B)e^{2x}+\left(2Ax^2+2Bx\right)e^{2x}=\left(2Ax^2+2Ax+2Bx+B\right)e^{2x};$$

$$\varphi''(x)=(4Ax+2A+2B)e^{2x}+\left(4Ax^2+4Ax+4Bx+2B\right)e^{2x}=$$
$$=\left(4Ax^2+8Ax+4Bx+2A+4B\right)e^{2x}.$$

Подставив правые части выражений для $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)$ в заданное уравнение, получим

$$\left(4Ax^2+8Ax+4Bx+2A+4B\right)e^{2x}+\left(-10Ax^2-10Ax-10Bx-5B\right)e^{2x}+$$
$$+\left(6Ax^2+6Bx\right)e^{2x}=(5-6x)e^{2x};$$
$$(-2Ax+2A-B)e^{2x}=(5-6x)e^{2x};$$
$$-2Ax+2A-B=5-6x.$$

Равенство двух многочленов означает равенство коэффициентов при соответствующих степенях x

$$\begin{array}{c|l} x^1 & \multirow{2}{*}{} \\ x^0 & \end{array} \left\{\begin{array}{l} -2A=-6 \\ 2A-B=5 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=3 \\ B=2A-5 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=3 \\ B=6-5=1 \end{array}\right..$$

Таким образом $\varphi(x)=\left(3x^2+x\right)e^{2x}$.

Ответ: $y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\left(3x^2+x\right)e^{2x}$.

5. Найти общее решение уравнения $y''+4y'+4y=6e^{-2x}$.

Решение.

Правая часть данного уравнения относится к группе I, при этом $a=-2$, $P_m(x)=6 \Rightarrow m=0$.

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид $\lambda^2+4\lambda+4=0$, корни которого представляют собой одинаковые действительные числа $\lambda_1=\lambda_2=-2$, а следовательно $k=2$. При этом (6) $y_0(x)=(C_1+C_2x)e^{-2x}$. Частное решение заданного уравнения следует искать в виде (8)

$$\varphi(x)=x^2Ae^{-2x}=\left(Ax^2\right)e^{-2x}.$$

В этом случае

$$\varphi'(x)=(2Ax)e^{-2x}+\left(-2Ax^2\right)e^{-2x}=\left(-2Ax^2+2Ax\right)e^{-2x};$$

$$\varphi''(x)=(-4Ax+2A)e^{-2x}+\left(4Ax^2-4Ax\right)e^{-2x}=\left(4Ax^2-8Ax+2A\right)e^{-2x}.$$

Подставив правые части выражений для $\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x)$ в заданное уравнение, получим

$$\left(4Ax^2-8Ax+2A\right)e^{-2x}+\left(-8Ax^2+8Ax\right)e^{-2x}+\left(4Ax^2\right)e^{-2x}=6e^{-2x};$$

$$2Ae^{-2x}=6e^{-2x}\Rightarrow A=3.$$

Таким образом $\varphi(x)=3x^2e^{-2x}$.

Ответ: $y(x)=(C_1+C_2x)e^{-2x}+3x^2e^{-2x}$.

6. Найти общее решение уравнения $y''-6y'+9y=(2-12x)e^{3x}$.

Решение.

Правая часть данного уравнения относится к группе I, при этом $a=3$, $P_m(x)=(2-12x)e^{3x}\Rightarrow m=1$.

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид $\lambda^2-6\lambda+9=0$, корни которого представляют собой одинаковые действительные числа $\lambda_1=\lambda_2=3$, а следовательно $k=2$. При этом (6) $y_0(x)=(C_1+C_2x)e^{-2x}$. Частное решение заданного уравнения следует искать в виде (8)

$$\varphi(x)=x^2(Ax+B)e^{3x}=\left(Ax^3+Bx^2\right)e^{3x}.$$

В этом случае

$$\varphi'(x)=\left(3Ax^2+2Bx\right)e^{3x}+\left(3Ax^3+3Bx^2\right)e^{3x}=\left(3Ax^3+3Ax^2+3Bx^2+2Bx\right)e^{3x};$$

$$\varphi''(x)=\left(9Ax^2+6Ax+6Bx+2B\right)e^{3x}+\left(9Ax^3+9Ax^2+9Bx^2+6Bx\right)e^{3x}=$$

$$=\left(9Ax^3+18Ax^2+9Bx^2+6Ax+12Bx+2B\right)e^{3x}.$$

Подставив правые части выражений для $\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x)$ в заданное уравнение, получим

$$\left(9Ax^3+18Ax^2+9Bx^2+6Ax+12Bx+2B\right)e^{3x}+$$

$$+\left(-18Ax^3-18Ax^2-18Bx^2-12Bx\right)e^{3x}+\left(9Ax^3+9Bx^2\right)e^{3x}=(2-12x)e^{3x};$$

$$6Ax+2B=2-12x.$$

Равенство двух многочленов означает равенство коэффициентов при соответствующих степенях x

$$\begin{array}{c|} x^1 \\ x^0 \end{array} \begin{cases} 6A=-12 \\ 2B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=1 \end{cases}.$$

Таким образом $\varphi(x)=\left(-2x^3+x^2\right)e^{3x}$.

Ответ: $y(x)=(C_1+C_2x)e^{3x}+\left(-2x^3+x^2\right)e^{3x}$.

7. Найти общее решение уравнения $y''+2y'-3y=14\cos x-8\sin x$.

Решение.

Правая часть данного уравнения относится к группе II, при этом $a=0$, $b=1$, следовательно $a+bi=i$, $P_m(x)=14\Rightarrow m=0$, $Q_n(x)=-8\Rightarrow n=0$, $N=max\{m;n\}=max\{0;0\}=0$.

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид $\lambda^2+2\lambda-3=0$, корнями которого являются действительные числа $\lambda_1=-3, \lambda_2=1$, а следовательно $k=0$. При этом (5) $y_0(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^x$. Частное решение заданного уравнения следует искать в виде (9) $\varphi(x)=x^0e^{0\cdot x}(A\cos x+$ $+B\sin x)=A\cos x+B\sin x$. В этом случае

$$\varphi'(x)=-A\sin x+B\cos x;\ \varphi''(x)=-A\cos x-B\sin x.$$

Подставив правые части выражений для $\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x)$ в заданное уравнение, получим

$$-A\cos x-B\sin x-2A\sin x+2B\cos x-3A\cos x-3B\sin x=14\cos x-8\sin x;$$
$$(-4A+2B)\cos x+(-2A-4B)\sin x=14\cos x-8\sin x.$$

Последнее равенство справедливо в случае, когда равны коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в его левой и правой частях, т.е.

$$\begin{array}{r|} \cos x \\ \sin x \end{array} \begin{cases} -4A+2B=14 \\ -2A-4B=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A-B=-7\Rightarrow B=2A+7 \\ A+2B=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=2A+7 \\ A+4A+14=4 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} B=2A+7 \\ 5A=-10\Rightarrow A=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=3 \\ A=-2 \end{cases}.$$

Таким образом $\varphi(x)=-2A\cos x+3B\sin x$.

Ответ: $y(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^x-2\cos x+3B\sin x$.

8. Найти общее решение уравнения
$y''+6y'+9y=-12\cos(3x)+(-18x-24)\sin(3x)$.

Решение.

Правая часть данного уравнения относится к группе II, при этом $a=0$, $b=3$, следовательно $a+bi=3i$, $P_m(x)=-12\Rightarrow m=0$, $Q_n(x)=-18x-24\Rightarrow$ $\Rightarrow n=1$, $N=max\{m;n\}=max\{0;1\}=1$.

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид $\lambda^2+6\lambda+9=0$, корнями которого являются действительные числа $\lambda_1=\lambda_2=-3$, а следовательно $k=0$. При этом (6) $y_0(x)=(C_1+C_2x)e^{-3x}$. Частное решение заданного уравнения следует искать в виде (9) $\varphi(x)=(Ax+B)cos(3x)+$ $+(Cx+D)sin(3x)$. В этом случае

$$\varphi'(x)=Acos(3x)+(-3Ax-3B)sin(3x)+C\,sin(3x)+(3Cx+3D)cos(3x)=$$
$$=(3Cx+A+3D)cos(3x)+(-3Ax-3B+C)sin(3x);$$
$$\varphi''(x)=3C\,cos(3x)+(-9Cx-3A-9D)sin(3x)+$$
$$+(-3A)sin(3x)+(-9Ax-9B+3C)cos(3x)=$$
$$=(-9Ax-9B+6C)cos(3x)+(-9Cx-6A-9D)sin(3x).$$

Подставив правые части выражений для $\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x)$ в заданное уравнение, получим

$$(-9Ax-9B+6C)cos(3x)+(-9Cx-6A-9D)sin(3x)+$$
$$+(18Cx+6A+18D)cos(3x)+(-18Ax-18B+6C)sin(3x)+$$
$$+(9Ax+9B)cos(3x)+(9Cx+9D)sin(3x)=-12cos(3x)+(-18x-24);$$
$$(18Cx+6A+6C+18D)cos(3x)+(-18Ax-6A-18B+6C)sin(3x)=$$
$$=-12cos(3x)+(-18x-24)sin(3x).$$

Из последнего равенства следует равенство множителей при $cos(3x)$ и $sin(3x)$ в его левой и правой частях, т.е.

$$18Cx+6A+6C+18D=-12;\ -18Ax-6A-18B+6C=-18x-24.$$

Два равенства многочленов приводят к системе четырех линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A,B,C,D

$$\begin{array}{c|l} x^1 & \\ x^0 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{c} 18C=0\Rightarrow C=0 \\ 6A+6C+18D=-12\Rightarrow A+C+3D=-2 \\ -18A=-18\Rightarrow A=1 \\ -6A-18B+6C=-24\Rightarrow A+3B-C=4 \end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} C=0 \\ A+3D=-2 \\ A=1 \\ 3B=3 \end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} C=0 \\ D=-1 \\ A=1 \\ B=1 \end{array}\right..$$

Таким образом $\varphi(x)=(x+1)cos(3x)-sin(3x)$.

Ответ: $y(x)=(C_1+C_2x)e^{-3x}+(x+1)cos(3x)-sin(3x)$.

9. Найти общее решение уравнения $y''+4y=-12cos(2x)-8sin(2x)$.

Решение.

Правая часть данного уравнения относится к группе II, при этом $a=0$, $b=2$, следовательно $a+bi=2i$, $P_m(x)=-12\Rightarrow m=0$, $Q_n(x)=-8\Rightarrow n=0$, $N=max\{m;n\}=max\{0;0\}=0$.

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид $\lambda^2+4=0$, корнями которого являются сопряженные комплексные числа $\lambda_{1,2}=\pm 2i \Rightarrow \alpha=0$, $\beta=2$, следовательно $k=1$. При этом (7) $y(x)=C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)$.

Частное решение в этом случае следует искать в виде

$$\varphi(x)=x^1[A\cos(2x)+B\sin(2x)]=(Ax)\cos(2x)+(Bx)\sin(2x).$$

Производные 1-го и 2го порядка от частного решения $\varphi(x)$

$$\varphi'(x)=A\cos(2x)+(-2Ax)\sin(2x)+B\sin(2x)+(2Bx)\cos(2x)=$$
$$=(2Bx+A)\cos(2x)+(-2Ax+B)\sin(2x);$$
$$\varphi''(x)=2B\cos(2x)+(-4Bx+2A)\sin(2x)+(-2A)\sin(2x)+(-4Ax+2B)\cos(2x)=$$
$$=(-4Ax+4B)\cos(2x)+(-4Bx-4A)\sin(2x).$$

Подставив правые части выражений для $\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x)$ в заданное уравнение, получим

$$(-4Ax+4B)\cos(2x)+(-4Bx-4A)\sin(2x)+$$
$$+4Ax\cos(2x)+4Bx\sin(2x)=-12\cos(2x)-8\sin(2x);$$
$$4B\cos(2x)-4A\sin(2x)=-12\cos(2x)-8\sin(2x).$$

Из последнего равенства следует

$$\begin{array}{c|l} \cos(2x) & \left\{\begin{array}{l}4B=-12\\ -4A=-8\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}B=-3\\ A=2\end{array}\right. . \\ \sin(2x) & \end{array}$$

Таким образом $\varphi(x)=2x\cos(2x)-3x\sin(2x)$.

Ответ: $y(x)=C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)+2x\cos(2x)-3x\sin(2x)$.

10. Найти общее решение уравнения $y''+9y=(36x-12)\sin(3x)$.

Решение.

Правая часть данного уравнения относится к группе II, при этом $a=0$, $b=3$, следовательно $a+bi=3i$, $P_m(x)=0 \Rightarrow m=0$, $Q_n(x)=36x-12 \Rightarrow n=1$, $N=\max\{m;n\}=\max\{0;1\}=1$.

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид $\lambda^2+9=0$, корнями которого являются сопряженные комплексные числа $\lambda_{1,2}=\pm 3i \Rightarrow \alpha=0$, $\beta=3$, следовательно $k=1$. При этом (7) $y(x)=C_1\cos(3x)+C_2\sin(3x)$.

Частное решение в этом случае следует искать в виде

$$\varphi(x)=x^1[(Ax+B)\cos(3x)+(Cx+D)\sin(3x)]=$$
$$=(Ax^2+Bx)\cos(3x)+(Cx^2+Dx)\sin(3x).$$

Производные 1-го и 2го порядка от частного решения $\varphi(x)$

$$\varphi'(x)=(2Ax+B)cos(3x)+\left(-3Ax^2-3Bx\right)sin(3x)+$$
$$+(2Cx+D)sin(3x)+\left(3Cx^2+3Dx\right)cos(3x)=$$
$$=\left(3Cx^2+2Ax+3Dx+B\right)cos(3x)+\left(-3Ax^2-3Bx+2Cx+D\right)sin(3x);$$
$$\varphi''(x)=(6Cx+2A+3D)cos(3x)+\left(-9Cx^2-6Ax-9Dx-3B\right)sin(3x)+$$
$$+(-6Ax-3B+2C)sin(3x)+\left(-9Ax^2-9Bx+6Cx+3D\right)cos(3x)=$$
$$=\left(-9Ax^2-9Bx+12Cx+2A+6D\right)cos(3x)+$$
$$+\left(-9Cx^2-12Ax-9Dx-6B+2C\right)sin(3x).$$

Подставив правые части выражений для $\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x)$ в заданное уравнение, получим

$$\left(-9Ax^2-9Bx+12Cx+2A+6D\right)cos(3x)+\left(-9Cx^2-12Ax-9Dx-6B+2C\right)sin(3x)+$$
$$+\left(9Ax^2+9Bx\right)cos(3x)+\left(9Cx^2+9Dx\right)sin(3x)=(36x-12)sin(3x);$$
$$(12Cx+2A+6D)cos(3x)+(-12Ax-6B+2C)sin(3x)=(36x-12)sin(3x).$$

Из последнего равенства следует равенство множителей при $cos(3x)$ и $sin(3x)$ в его левой и правой частях, т.е.

$$12Cx+2A+6D=0;\ -12Ax-6B+2C=36x-12.$$

Два равенства многочленов приводят к системе четырех линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A,B,C,D

$$\begin{array}{c|l} x^1 & \\ x^0 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{c} 12C=0\Rightarrow C=0 \\ 2A+6D=0\Rightarrow A+3D=0 \\ -12A=36\Rightarrow A=-3 \\ -6B+2C=-12\Rightarrow 3B-C=6 \end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} C=0 \\ A+3D=0 \\ A=-3 \\ 3B=6 \end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} C=0 \\ D=1 \\ A=-3 \\ B=2 \end{array}\right..$$

Таким образом $\varphi(x)=\left(-3x^2+2x\right)cos(3x)+x\,sin(3x)$.

Ответ: $y(x)=C_1\,cos(3x)+C_2\,sin(3x)+\left(-3x^2+2x\right)cos(3x)+x\,sin(3x)$.

Примеры для самостоятельного решения

Для всех заданных уравнений нужно найти общие решения.

Задача 1.

1.1. $y'' - 2y' - 3y = 12e^{-3x}$.

1.2. $y'' + 4y' + 4y = -16e^{2x}$.

1.3. $y'' - 2y' + 2y = -10e^{-x}$.

1.4. $y'' - y' - 2y = -6e^{x}$.

1.5. $y'' - 4y' + 4y = 32e^{-2x}$.

1.6. $y'' + 2y' + 5y = -4e^{-x}$.

1.7. $y'' + 3y' - 4y = -18e^{-x}$.

1.8. $y'' - 4y' + 4y = 48e^{-2x}$.

14

1.9. $y'' + 6y' + 10y = -e^{-3x}$.

1.10. $y'' - 7y' + 12y = -56e^{-4x}$.

1.11. $y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}$.

1.12. $y'' - 2y' + 2y = -5e^{x}$.

1.13. $y'' - 3y' + 2y = -8e^{3x}$.

1.14. $y'' + 2y' + y = 16e^{x}$.

1.15. $y'' + 6y' + 13y = 15e^{-2x}$.

1.16. $y'' + 9y' + 20y = -72e^{4x}$.

1.17. $y'' + 8y' + 16y = -64e^{4x}$.

1.18. $y'' + 8y' + 17y = e^{-4x}$.

1.19. $y'' - y' - 12y = 12e^{3x}$.

1.20. $y'' - 2y' + y = 20e^{-x}$.

1.21. $y'' + y = -8e^{-x}$.

1.22. $y'' + 6y' + 5y = 24e^{x}$.

1.23. $y'' + 8y' + 16y = 64e^{4x}$.

1.24. $y'' + 10y' + 26y = e^{-5x}$.

1.25. $y'' - 3y' + 2y = -24e^{-x}$.

1.26. $y'' - 2y' + y = 28e^{-x}$.

1.27. $y'' - 2y' + 10y = -9e^{x}$.

1.28. $y'' - 6y' + 8y = 2e^{3x}$.

1.29. $y'' + 2y' + y = -28e^{x}$.

1.30. $y'' - 8y' + 17y = -e^{4x}$.

Задача 2.

2.1. $y'' + 2y' + y = (8x + 4)e^{x}$.

2.2. $y'' + 2y' + 2y = (x + 2)e^{-x}$.

2.3. $y'' - 5y' + 6y = (20x - 29)e^{-2x}$.

2.4. $y'' + 4y' + 4y = (16x + 40)e^{2x}$.

2.5. $y'' - 4y' + 5y = (3x + 1)e^{2x}$.

2.6. $y'' - y' - 6y = (6x - 7)e^{-3x}$.

2.7. $y'' - 4y' + 4y = (80x - 8)e^{-2x}$.

2.8. $y'' - 8y' + 17y = (36 - 10x)e^{x}$.

2.9. $y'' + 3y' + 2y = (24x + 38)e^{x}$.

2.10. $y'' - 4y' + 4y = (88 - 80x)e^{-2x}$.

2.11. $y'' - 4y' + 5y = (42 - 20x)e^{-x}$.

2.12. $y'' - y' - 2y = (-8x - 6)e^{x}$.

2.13. $y'' - 4y' + 4y = (8 - 16x)e^{-2x}$.

2.14. $y'' + y = (10 - 4x)e^{-x}$.

2.15. $y'' - 4y' + 3y = (8x - 6)e^{-x}$.

2.16. $y'' + 2y' + y = (8x - 20)e^{x}$.

2.17. $y'' - 6y' + 10y = (x - 2)e^{3x}$.

2.18. $y'' + 3y' + 2y = (84x + 25)e^{2x}$.

2.19. $y'' + 5y' + 6y = (15 - 100x)e^{2x}$.

2.20. $y'' - 2y' + y = (12 - 4x)e^{-x}$.

2.21. $y'' - 6y' + 10y = (59 - 17x)e^{-x}$. 2.22. $y'' + 4y' + 3y = (56x + 90)e^{x}$.
2.23. $y'' + 4y' + 4y = (80x - 24)e^{2x}$. 2.24. $y'' + 4y = (8x - 4)e^{-2x}$.
2.25. $y'' + y' - 2y = (-8x - 14)e^{-x}$. 2.26. $y'' + 6y' + 9y = (24 - 36x)e^{3x}$.
2.27. $y'' + 4y' + 5y = (1 - 2x)e^{-2x}$. 2.28. $y'' + y' - 2y = (7 - 4x)e^{2x}$.
2.29. $y'' + 4y' + 8y = (4 - 8x)e^{-2x}$. 2.30. $y'' - y' - 6y = (4x - 3)e^{2x}$.

Задача 3.

3.1. $y'' + 2y' - 3y = -8e^{-3x}$. 3.2. $y'' - 4y = -12e^{-2x}$.
3.3. $y'' - 5y' + 6y = -e^{2x}$. 3.4. $y'' - 7y' + 12y = e^{3x}$.
3.5. $y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$. 3.6. $y'' + 7y' + 12y = -2e^{-3x}$.
3.7. $y'' - 3y' - 4y = 20e^{-x}$. 3.8. $y'' - 4y' + 3y = 10e^{x}$.
3.9. $y'' - 7y' + 10y = 3e^{2x}$. 3.10. $y'' + 2y' - 8y = 18e^{2x}$.
3.11. $y'' - 6y' + 5y = -12e^{5x}$. 3.12. $y'' + 7y' + 10y = -9e^{-2x}$.
3.13. $y'' - 7y' + 6y = -5e^{6x}$. 3.14. $y'' + 6y' + 8y = 6e^{-2x}$.
3.15. $y'' + 5y' + 6y = e^{-3x}$. 3.16. $y'' + 4y' - 5y = -12e^{-5x}$.
3.17. $y'' - 9y = 18e^{-3x}$. 3.18. $y'' - 3y' - 4y = -25e^{4x}$.
3.19. $y'' + 9y' + 20y = 2e^{-4x}$. 3.20. $y'' - 7y' + 12y = -2e^{4x}$.
3.21. $y'' + 5y' + 6y = 4e^{-3x}$. 3.22. $y'' + 13y' + 42y = e^{-6x}$.
3.23. $y'' - 7y' + 6y = 10e^{6x}$. 3.24. $y'' + 3y' - 18y = -27e^{3x}$.
3.25. $y'' - 16y = 24e^{-4x}$. 3.26. $y'' - 10y' + 21y = 20e^{3x}$.
3.27. $y'' + 15y' + 56y = -e^{-7x}$. 3.28. $y'' - 10y' + 21y = 12e^{3x}$.
3.29. $y'' - 7y' - 8y = 54e^{-x}$. 3.30. $y'' - 13y' + 42y = -4e^{7x}$.

Задача 4.

4.1. $y'' - y' - 6y = (1 - 30x)e^{-2x}$. 4.2. $y'' - 7y' + 12y = (4x + 1)e^{4x}$.
4.3. $y'' - 3y' - 4y = (11 - 20x)e^{4x}$. 4.4. $y'' - 6y' + 5y = (-24x - 22)e^{x}$.
4.5. $y'' + 3y' - 10y = (56x + 29)e^{2x}$. 4.6. $y'' - 3y' - 4y = (10x + 2)e^{4x}$.
4.7. $y'' + 3y' - 10y = (28x - 11)e^{-5x}$. 4.8. $y'' - y' - 6y = (-20x - 31)e^{-2x}$.
4.9. $y'' - 9y = (-48x - 10)e^{-3x}$. 4.10. $y'' - 10y' + 21y = (24x - 10)e^{3x}$.
4.11. $y'' - 11y' + 30y = (8x + 5)e^{6x}$. 4.12. $y'' + 6y' + 5y = (24x - 6)e^{-5x}$.
4.13. $y'' - 9y' + 14y = (50x - 50)e^{2x}$. 4.14. $y'' - 5y' - 6y = (11 - 70x)e^{6x}$.
4.15. $y'' - 9y' + 8y = (-42x - 43)e^{x}$. 4.16. $y'' + 11y' + 24y = (10x + 7)e^{-3x}$.

4.17. $y'' - 4y = (22 - 24x)e^{-2x}$.

4.18. $y'' - 10y' + 24y = (-20x - 8)e^{6x}$.

4.19. $y'' + 15y' + 56y = (2x + 2)e^{-7x}$.

4.20. $y'' - 11y' + 24y = (37 - 60x)e^{3x}$.

4.21. $y'' - 6y' - 27y = (40 - 48x)e^{-3x}$.

4.22. $y'' - 10y' + 21y = (40x - 14)e^{3x}$.

4.23. $y'' - 4y' - 12y = -64xe^{-2x}$.

4.24. $y'' - y = (24 - 28x)e^{-x}$.

4.25. $y'' - y' - 20y = (10 - 90x)e^{-4x}$.

4.26. $y'' + 11y' + 18y = (98x + 28)e^{-2x}$.

4.27. $y'' - 16y = (-80x - 10)e^{4x}$.

4.28. $y'' - y' - 2y = (18x - 24)e^{2x}$.

4.29. $y'' - 9y = (48x - 8)e^{-3x}$.

4.30. $y'' + 8y' + 12y = (-24x - 34)e^{-6x}$.

Задача 5.

5.1. $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}$.

5.2. $y'' - 8y' + 16y = -6e^{4x}$.

5.3. $y'' - 4y' + 4y = -6e^{2x}$.

5.4. $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$.

5.5. $y'' - 10y' + 25y = -2e^{5x}$.

5.6. $y'' - 6y' + 9y = 10e^{3x}$.

5.7. $y'' - 12y' + 36y = -8e^{6x}$.

5.8. $y'' + 8y' + 16y = 14e^{-4x}$.

5.9. $y'' + 12y' + 36y = 4e^{-6x}$.

5.10. $y'' - 8y' + 16y = 4e^{4x}$.

5.11. $y'' - 4y' + 4y = -12e^{2x}$.

5.12. $y'' - 2y' + y = 16e^{x}$.

5.13. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

5.14. $y'' - 10y' + 25y = 4e^{5x}$.

5.15. $y'' - 12y' + 36y = -10e^{6x}$.

5.16. $y'' + 12y' + 36y = 6e^{-6x}$.

5.17. $y'' + 16y' + 64y = 2e^{-8x}$.

5.18. $y'' - 16y' + 64y = -2e^{8x}$.

5.19. $y'' + 2y' + y = 16e^{-x}$.

5.20. $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$.

5.21. $y'' + 6y' + 9y = 16e^{-3x}$.

5.22. $y'' + 14y' + 49y = -14e^{-7x}$.

5.23. $y'' - 18y' + 81y = -2e^{9x}$.

5.24. $y'' + 18y' + 81y = 4e^{-9x}$.

5.25. $y'' + 10y' + 25y = -10e^{-5x}$.

5.26. $y'' - 10y' + 25y = 18e^{5x}$.

5.27. $y'' + 2y' + y = 20e^{-x}$.

5.28. $y'' - 6y' + 9y = 14e^{3x}$.

5.29. $y'' + 20y' + 100y = -2e^{-10x}$.

5.30. $y'' - 20y' + 100y = -10e^{10x}$.

Задача 6.

6.1. $y'' + 4y' + 4y = (12x + 2)e^{-2x}$.

6.2. $y'' - 6y' + 9y = (6 - 12x)e^{3x}$.

6.3. $y'' + 8y' + 16y = (4 - 30x)e^{-4x}$.

6.4. $y'' - 8y' + 16y = (30x - 2)e^{4x}$.

6.5. $y'' + 2y' + y = (42x + 6)e^{-x}$.

6.6. $y'' - 4y' + 4y = (16 - 18x)e^{2x}$.

6.7. $y'' - 10y' + 25y = (30x - 4)e^{5x}$.

6.8. $y'' + 10y' + 25y = (12x + 10)e^{-5x}$.

6.9. $y'' - 4y' + 4y = (6 - 42x)e^{2x}$.

6.10. $y'' - 14y' + 49y = (24x + 2)e^{7x}$.

6.11. $y'' + 14y' + 49y = (30x + 12)e^{-7x}$.

6.12. $y'' - 10y' + 25y = (2 - 30x)e^{5x}$.

6.13. $y'' + 16y' + 64y = (18x + 18)e^{-8x}$.

6.14. $y'' + 10y' + 25y = (24x + 14)e^{-5x}$.

6.15. $y'' - 6y' + 9y = -18xe^{3x}$.

6.16. $y'' - 4y' + 4y = (12x + 10)e^{2x}$.

6.17. $y'' - 14y' + 49y = (2 - 42x)e^{7x}$.

6.18. $y'' + 2y' + y = (36x - 14)e^{-x}$.

6.19. $y'' + 6y' + 9y = (4 - 18x)e^{-3x}$.

6.20. $y'' - 18y' + 81y = 12xe^{9x}$.

6.21. $y'' - 8y' + 16y = (42x - 16)e^{4x}$.

6.22. $y'' + 14y' + 49y = (18x - 18)e^{-7x}$.

6.23. $y'' - 10y' + 25y = (2 - 18x)e^{5x}$.

6.24. $y'' + 16y' + 64y = (24x - 18)e^{-8x}$.

6.25. $y'' - 6y' + 9y = (6 - 6x)e^{3x}$.

6.26. $y'' + 10y' + 25y = (6 - 30x)e^{-5x}$.

6.27. $y'' + 8y' + 16y = -6xe^{-4x}$.

6.28. $y'' + 2y' + y = (2 - 6x)e^{-x}$.

6.29. $y'' - 10y' + 25y = (30x + 2)e^{5x}$.

6.30. $y'' + 12y' + 36y = (36x - 2)e^{-6x}$.

Задача 7.

7.1. $y'' - y' - 6y = -45\cos(3x) - 69\sin(3x)$.

7.2. $y'' + 2y' + y = -2\cos x - 6\sin x$.

7.3. $y'' - 4y' + 5y = -33\cos(2x) - 4\sin(2x)$.

7.4. $y'' - y = -4\cos x - 6\sin x$.

7.5. $y'' - 6y' + 9y = 18\cos(3x) + 90\sin(x)$.

7.6. $y'' - 6y' + 13y = 39\cos(2x) + 27\sin(2x)$.

7.7. $y'' - 7y' + 12y = -45\cos(3x) - 15\sin(3x)$.

7.8. $y'' - 6y' + 9y = -90\cos(3x) + 72\sin(3x)$.

7.9. $y'' + 2y' + 2y = -3\cos x - 9\sin x$.

7.10. $y'' - 5y' + 6y = 4\cos(2x) + 72\sin(2x)$.

7.11. $y'' - 2y' + y = -14\cos x - 6\sin x$.

7.12. $y'' + 2y' + y = 8\cos x - 10\sin x$.

7.13. $y'' - 6y' + 10y = -31\cos(3x) + 92\sin(3x)$.

7.14. $y'' - 6y' + 5y = 12\cos x - 34\sin x$.

7.15. $y'' + 4y' + 4y = 8\cos(2x) - 56\sin(2x)$.

7.16. $y'' - 2y' + 2y = -\cos x - 2\sin x$.

7.17. $y'' + 2y' - 8y = -20\cos(2x) + 20\sin(2x)$.

7.18. $y'' + 2y' + y = -10\cos x$.

7.19. $y'' - 4y' + 5y = 3\cos(2x) + 24\sin(2x)$.

7.20. $y'' - 5y' + 6y = 12\cos(3x) + 18\sin(3x)$.

7.21. $y'' - 4y' + 4y = -8\cos(2x)$.

7.22. $y'' - 6y' + 13y = 66\cos(3x) + 42\sin(3x)$.

7.23. $y'' - y = -4\sin x$.

7.24. $y'' + 6y' + 9y = -18\sin(3x)$.

7.25. $y'' + 8y' + 17y = 64cos(4x) + 2sin(4x)$.
7.26. $y'' - 3y' + 2y = 6cos(2x) + 22sin(2x)$.
7.27. $y'' - 6y' + 9y = 54cos(3x)$.
7.28. $y'' + 10y' + 26y = 55cos\,x + 65sin\,x$.
7.29. $y'' + 2y' - 15y = -36cos(3x) + 42sin(3x)$.
7.30. $y'' + 8y' + 16y = -32sin(4x)$.

Задача 8.

8.1. $y'' + 4y' + 4y = (40x + 16)cos(2x) + (16 - 8x)sin(2x)$.
8.2. $y'' - 4y' + 5y = (3x - 27)cos(2x) + (24x - 2)sin(2x)$.
8.3. $y'' - 4y' + 3y = (6x - 26)cos(3x) + (6 - 12x)sin(3x)$.
8.4. $y'' - 2y' + y = (10x - 26)cos\,x + (10x - 14)sin\,x$.
8.5. $y'' - 6y' + 10y = (66 - 36x)cos(3x) + (2x - 15)sin(3x)$.
8.6. $y'' + y' - 12y = (2 - 42x)cos(3x) + (-6x - 12)sin(3x)$.
8.7. $y'' + 2y' + y = -4x\,cos\,x + (2x - 6)sin\,x$.
8.8. $y'' + 6y' + 10y = (4x + 25)cos(3x) + (-72x - 42)sin(3x)$.
8.9. $y'' + 6y' + 8y = (38 - 20x)cos(2x) + (-20x - 16)sin(2x)$.
8.10. $y'' + 6y' + 9y = 6cos(3x) + (-18x - 6)sin(3x)$.
8.11. $y'' - 2y' + 2y = (5 - x)cos\,x + (13 - 2x)sin\,x$.
8.12. $y'' - 5y' + 6y = (2 - 42x)cos(3x) + (18 - 24x)sin(3x)$.
8.13. $y'' - 6y' + 9y = (42 - 18x)cos(3x) - 6sin(3x)$.
8.14. $y'' - 8y' + 25y = (-32x - 24)cos(4x) + (9x + 1)sin(4x)$.
8.15. $y'' + 4y' - 5y = (20 - 18x)cos\,x + (-12x - 18)sin\,x$.
8.16. $y'' - 8y' + 16y = (8 - 32x)cos(4x) - 8sin(4x)$.
8.17. $y'' + 4y' + 13y = (2 - 12x)cos(3x) + (-4x - 28)sin(3x)$.
8.18. $y'' - y = (10x - 6)cos\,x + 10sin\,x$.
8.19. $y'' + 2y' + y = 4cos(x) + (-6x - 10)sin(x)$.
8.20. $y'' + 6y' + 10y = (54x + 1)cos(3x) + (3x - 1)sin(3x)$.
8.21. $y'' + 3y' - 10y = (6x - 38)cos(2x) + (-14x - 15)sin(2x)$.
8.22. $y'' - 4y = (8 - 8x)cos(2x) + (4 - 16x)sin(2x)$.
8.23. $y'' + 4y' + 4y = 24x\,cos(2x) + (40x + 16)sin(2x)$.
8.24. $y'' - 8y' + 25y = (18x - 25)cos(4x) + (64x - 48)sin(4x)$.
8.25. $y'' - 9y = (6 - 18x)cos(3x) + (48 - 18x)sin(3x)$.
8.26. $y'' + 8y' + 16y = (32x + 8)cos(4x) - 24sin(4x)$.
8.27. $y'' - 2y' + 5y = (12x - 14)cos\,x + (6x + 10)sin\,x$.
8.28. $y'' - 5y' + 6y = (45x - 36)cos(3x) + (9x + 27)sin(3x)$.
8.29. $y'' + 2y' + y = (2 - 4x)cos\,x + (-4x - 6)sin\,x$.
8.30. $y'' - 2y' + 10y = (12x + 38)cos(2x) + (8x + 20)sin(2x)$.

Задача 9.

9.1. $y'' + y = 10\cos x - 4\sin x$.

9.2. $y'' + 4y = 12\cos(2x) + 4\sin(2x)$.

9.3. $y'' + 9y = -18\sin(3x)$.

9.4. $y'' + 16y = -8\cos(4x) - 8\sin(4x)$.

9.5. $y'' + 25y = -20\cos(5x)$.

9.6. $y'' + 36y = -12\cos(6x) - 24\sin(6x)$.

9.7. $y'' + 49y = -28\cos(7x)$.

9.8. $y'' + y = 8\cos x - 6\sin x$.

9.9. $y'' + 4y = 20\sin(2x)$.

9.10. $y'' + 4y = 4\cos(2x) - 12\sin(2x)$.

9.11. $y'' + 9y = 6\cos(3x) + 24\sin(3x)$.

9.12. $y'' + 16y = -16\sin(4x)$.

9.13. $y'' + 16y = 8\cos(4x)$.

9.14. $y'' + 25y = 30\cos(5x) + 10\sin(5x)$.

9.15. $y'' + 36y = -24\cos(6x) - 36\sin(6x)$.

9.16. $y'' + 49y = -28\cos(7x) + 42\sin(7x)$.

9.17. $y'' + y = -12\cos x - 10\sin x$.

9.18. $y'' + 4y = -8\cos(2x) - 28\sin(2x)$.

9.19. $y'' + 9y = 18\cos(3x)$.

9.20. $y'' + 16y = -16\cos(4x) - 24\sin(4x)$.

9.21. $y'' + 25y = -20\sin(5x)$.

9.22. $y'' + 36y = 36\cos(6x)$.

9.23. $y'' + 49y = -28\cos(7x) - 42\sin(7x)$.

9.24. $y'' + y = 2\cos x - 2\sin x$.

9.25. $y'' + 4y = 4\cos(2x)$.

9.26. $y'' + 9y = 30\cos(3x) + 6\sin(3x)$.

9.27. $y'' + 16y = -8\cos(4x) - 16\sin(4x)$.

9.28. $y'' + 25y = -30\cos(5x)$.

9.29. $y'' + 36y = 12\cos(6x) - 12\sin(6x)$.

9.30. $y'' + 49y = 56\cos(7x) + 14\sin(7x)$.

Задача 10.

10.1. $y'' + 49y = (84x + 30)\cos(7x) + (6 - 28x)\sin(7x)$.

10.2. $y'' + 36y = (24x + 16)\cos(6x) + (38 - 48x)\sin(6x)$.

10.3. $y'' + 25y = (30 - 20x)\cos(5x) - 22\sin(5x)$.

10.4. $y'' + 16y = 14\cos(4x) + (-48x - 40)\sin(4x)$.

10.5. $y'' + 9y = (36x - 10)\cos(3x) + (24 - 12x)\sin(3x)$.

10.6. $y'' + 4y = (8x - 6)\cos(2x) + (24x - 2)\sin(2x)$.

10.7. $y'' + y = (4x + 4)\cos x + (4x - 2)\sin x$.

10.8. $y'' + 4y = (8x - 4)\cos(2x) - 10\sin(2x)$.

10.9. $y'' + 9y = 10\cos(3x) + (30 - 24x)\sin(3x)$.

10.10. $y'' + 16y = (10 - 16x)\cos(4x) + (-16x - 10)\sin(4x)$.

10.11. $y'' + 25y = -2\cos(5x) + (30 - 80x)\sin(5x)$.

10.12. $y'' + 36y = (24x - 64)\cos(6x) + (48x - 10)\sin(6x)$.

10.13. $y'' + 49y = (28x + 20)\cos(7x) + (30 - 84x)\sin(7x)$.

10.14. $y'' + 36y = (36 - 24x)\cos(6x) - 26\sin(6x)$.

10.15. $y'' + 49y = (28x - 54)\cos(7x) + (2 - 28x)\sin(7x)$.

10.16. $y'' + 36y = 32\cos(6x) + (48x - 12)\sin(6x)$.

10.17. $y'' + 25y = (60x - 20)\cos(5x) + 16\sin(5x)$.

10.18. $y'' + 16y = (40 - 16x)\cos(4x) - 10\sin(4x)$.

10.19. $y'' + 9y = (12x + 16)cos(3x) + (-24x - 34)sin(3x)$.
10.20. $y'' + 4y = (24x + 6)cos(2x) + (8x - 10)sin(2x)$.
10.21. $y'' + y = (16x - 14)cos\,x - 2\,sin\,x$.
10.22. $y'' + 4y = (40x + 8)cos(2x) + 14\,sin(2x)$.
10.23. $y'' + 9y = (4 - 12x)cos(3x) + (-24x - 26)sin(3x)$.
10.24. $y'' + 16y = (16x + 8)cos(4x) - 22\,sin(4x)$.
10.25. $y'' + 25y = (60x + 18)cos(5x) + (20x + 6)sin(5x)$.
10.26. $y'' + 36y = (24x - 12)cos(6x) - 10\,sin(6x)$.
10.27. $y'' + 49y = (2 - 28x)cos(7x) + (-28x - 2)sin(7x)$.
10.28. $y'' + 36y = -8cos(6x) + (60 - 48x)sin(6x)$.
10.29. $y'' + 25y = (20x - 8)cos(5x) + (-20x - 18)sin(5x)$.
10.30. $y'' + 16y = -6cos(4x) + (32 - 16x)sin(4x)$.

Содержание

Введение..3
Элементы теории решения линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью...3
Примеры решения линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью...5
Примеры для самостоятельного решения..13

Подписано в печать 25.12.2013. Усл. печ. л. 1,25. Тираж 20 экз.
Печать офсетная. Бумага офисная. Заказ № 9.

Отпечатано: РИО ВоГУ, г. Вологда, ул. Ленина, 15