МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛОГОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания для самостоятельной работы студентов

Факультет электроэнергетический
Направление подготовки 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника
Профиль подготовки «Электрооборудование и электрохозяйство предприятий, организаций и учреждений»

ВОЛОГДА
2016

УДК 629.113.004.5

Математика: кратные интегралы: методические указания для самостоятельной работы студентов. – Вологда: ВоГУ, 2016. – 16 с.

В методических указаниях рассмотрен такой раздел высшей математики как кратные интегралы на примере двойных интегралов. Этот раздел является темой контрольной работы № 12 по высшей математике для студентов заочной формы обучения направления «Электроэнергетика и электротехника», профиль «Электрооборудование и электрохозяйство предприятий, организаций и учреждений».

В данной работе представлен необходимый теоретический материал, рассмотрен ряд важных геометрических и физических задач (например: вычисление объема тела, массы плоской пластинки), приводящих к интегрированию функций нескольких переменных, приведены примеры решения задач соответствующей контрольной работы и задания для самостоятельного выполнения студентами. Пособие снабжено многочисленными иллюстрациями к решению задач.

Методические указания составлены преподавателями кафедры высшей математики ВоГУ.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Составители: А.П. Быстроумова, ст. преподаватель,
О.И. Микрюкова, канд. физ.-мат. наук, доцент.
О.А. Панфилова, канд. техн. наук, нач. кафедры информатики и математики ВИПЭ,
Л.Г. Соколова, ст. преподаватель пединститута ВоГУ

Рецензент: А.Р. Кашенков, канд. техн. наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики Педагогического института ВоГУ

Введение

Решение ряда важных физических, геометрических и технических задач, например, вычисление объемов и массы тел, центров тяжести и моментов инерции, приводит к интегрированию функций нескольких переменных. Возникающие при этом интегралы называются кратными.

Кратность интегралов зависит от количества переменных в интегрируемой функции. В данной работе рассмотрены двойные интегралы, применение которых позволяет решить многие задачи, возникающие в практической деятельности.

В пособии приведены необходимые теоретические сведения с примерами решения задач. Теоретический материал проиллюстрирован многочисленными рисунками.

В первую очередь, данная работа предназначена для студентов, обучающихся на факультете заочного и дистанционного обучения по направлению «Электроэнергетика и электротехника» и профилю «Электрооборудование и электрохозяйство предприятий, организаций и учреждений». Оно поможет им в выполнении контрольной работы № 12 «Кратные интегралы» дисциплины «Высшая математика». В пособии содержится пример решения данной контрольной работы и задания для самостоятельной работы студентов в десяти вариантах.

1. Определение и свойства двойного интеграла

Рассмотрим одну из геометрических задач, которая приводит к понятию двойного интеграла.

Пусть непрерывная функция $z = f(x, y)$ определена в конечной замкнутой области D плоскости Oxy. Найдем объем V тела, основанием которого служит область D на плоскости $z = 0$, боковая поверхность цилиндрическая, образующие которой параллельны оси Oz, а сверху тело ограничено поверхностью $z = f(x, y)$ $(f(x, y) > 0)$.

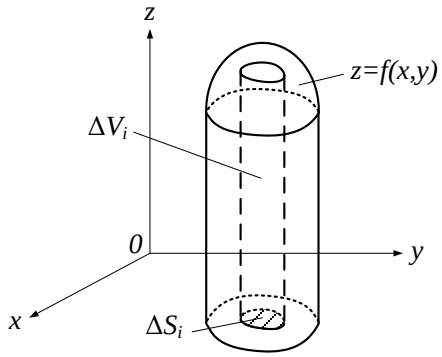

Рис. 1.

Разобьем область D произвольным образом на конечное число n элементарных областей D_i площадью ΔS_i, на каждой из которых построим элементарное цилиндрическое тело, высоту которого можно принять равной значению функции в произвольной точке $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, принадлежащей D_i (см. рис. 1). Объем такого элементарного цилиндра, очевидно, равен

$$\Delta V_i \approx f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta S_i .$$

Тогда искомый объем V будет равен сумме элементарных объемов ΔV_i:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta S_i .$$

Полученная сумма называется ***интегральной суммой***, соответствующей данному разбиению и фиксированному выбору точек $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$.

Объем V данного цилиндрического тела может быть найден тем точнее, чем меньше размер области D_i, который можно оценить наибольшим диаметром d_i (наибольшее расстояние между точками этой части). Тогда

$$V = \lim_{d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta S_i .$$

Двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области D называется предел интегральной суммы при стремлении наибольшего диаметра части разбиения D_i к нулю, если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения D на части D_i и от выбора в них точек $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ и обозначается $\iint\limits_D f(x, y) dS$, т.е.

$$\iint\limits_D f(x, y) dS = \lim_{\substack{n \to \infty \\ d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \lim_{\substack{n \to \infty \\ d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta S_i ,$$

где D – область интегрирования;

$z = f(x, y)$ – подынтегральная функция;

dS – элемент площади, который в декартовой системе координат вычисляется по формуле: $dS = dx \cdot dy$.

Из определения двойного интеграла следует, что если $z = f(x, y) \equiv 1$, $(x, y) \in D$, то двойной интеграл равен площади S области интегрирования (фигуры) D, т.е.

$$S = \iint\limits_D dS = \iint\limits_D dx dy ,$$

а если $z = f(x, y) > 0$, то двойной интеграл

$$V = \iint\limits_D f(x, y) dS = \iint\limits_D f(x, y) dx dy = \iint\limits_D z \, dx dy$$

выражает объем цилиндрического тела, «крыша» которого – поверхность $z = f(x, y)$, а основание – область D, на которую проецируется поверхность $z = f(x, y)$.

Определение двойного интеграла конструктивно аналогично определению определенного интеграла, поэтому двойной интеграл обладает теми же ***свойствами***, что и определенный интеграл.

1. $\iint\limits_D \left(f_1(x,y)+ f_2(x,y)\right)dS = \iint\limits_D f_1(x,y)dS + \iint\limits_D f_2(x,y)dS$.
2. $\iint\limits_D k \cdot f(x,y)\,dS = k \cdot \iint\limits_D f(x,y)\,dS$.

3. Если область D разбита на две непересекающиеся части D_1 и D_2, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS.$$

4. Если $0 < f_1(x,y) \le f_2(x,y)$ в D, то $\iint\limits_D f_1(x,y)dS \le \iint\limits_D f_2(x,y)dS$.

2. Вычисление двойного интеграла

Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат сводится к последовательному вычислению двух обычных определенных интегралов (повторному интегрированию).

Различают два основных вида области интегрирования D.

Область D называется ***правильной в направлении (относительно) оси*** Oy (Ox), если каждая прямая, параллельная оси Oy (Ox) и проходящая через внутреннюю точку области D, пересекает её границу только в двух точках.

Нижняя (левая) из этих точек называется ***точкой входа в область***, верхняя (правая) – ***точкой выхода из области***.

Правильная область может быть задана системой неравенств.

а) Рассмотрим область D, правильную в направлении оси Oy (рис. 2):

$$D: \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases} \Rightarrow$$

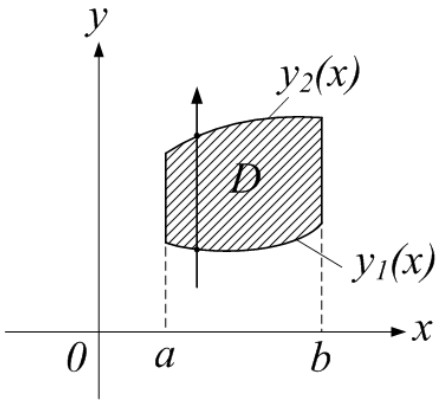

Рис. 2.

В этом случае двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy, \qquad (1)$$

где $y_1(x)$ – линия входа в область, $y_2(x)$ – линия выхода, направление движения показано стрелкой на рис. 2.

В формуле (1) сначала внутренний интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ берется по y при фиксированном x, затем от полученного результата находится внешний интеграл по x.

б) Теперь рассмотрим область D, правильную в направлении оси Ox (рис. 3):

$$D:\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases} \quad \Rightarrow$$

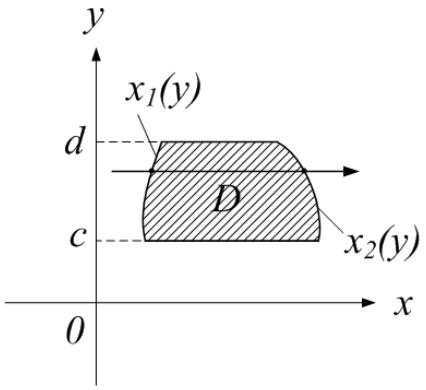

Рис. 3.

Тогда двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx, \qquad (2)$$

где $x_1(y)$ – линия входа в область, $x_2(y)$ – линия выхода из области.

В формуле (2) внутренний интеграл $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ берется по x при постоянном y, а внешний интеграл – по y.

Выражения, стоящие в правых частях равенств (1) и (2), называются ***повторными*** (или ***двукратными***) ***интегралами***.

Переход от равенства (1) к (2) или обратно называется ***изменением порядка интегрирования***. Значение двойного интеграла не зависит от порядка интегрирования.

с) Если область интегрирования D не принадлежит ни к одному из разобранных выше видов, то её разбивают на конечное число частей, каждая из которых является правильной в направлении какой-либо из координатных осей.

Тогда $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy.$$

3. Примеры решения задач

Пример 1. Для интеграла $I=\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{4-x} f(x,y)dy$ построить область интегрирования.

Решение. Найдем аналитическое выражение области D в виде системы неравенств:

$$D:\begin{cases}0\le x\le 2\\ x\le y\le 4-x\end{cases}\Rightarrow$$

уравнения границ: $x=0$, $x=2$,

$y=x$ – линия входа, $y=4-x$ – линия выхода.

Теперь изобразим область интегрирования на рис. 4.

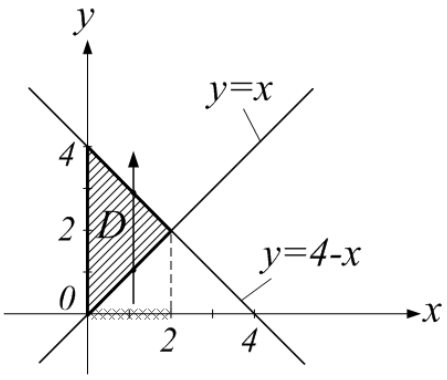

Рис. 4.

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x-2)dxdy,$ если D ограничена линиями: $y=x$, $y=3x$, $x=1$.

Решение. Область интегрирования D описывается системой $\begin{cases}y=x\\ y=3x\\ x=1\end{cases}$.

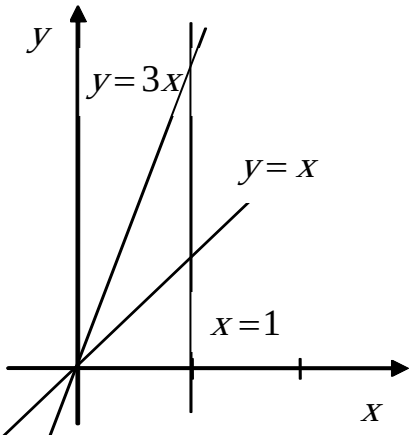

Рис. 5.

Строим область D (см. рис.5). Границы области: $y=x$, $y=3x$, $x=1$ – прямые, т.е. область D – треугольник, где $y=x$ – линия входа, $y=3x$ – линия выхода, $0\le X\le 1$. Поэтому данный двойной интеграл можно записать в виде следующего повторного:

$$\iint\limits_D (x-2)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{3x}(x-2)dy=\int\limits_0^1 dx\Big((x-2)y\Big|_x^{3x}\Big)=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\big((x-2)3x-(x-2)x\big)=\int\limits_0^1\big(2x^2-4x\big)dx$$

$$=\left(2\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}.$$

4. Приложения двойных интегралов

4.1. Вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел

Для их нахождения используют формулы:

$S = \iint\limits_D dx\,dy$, $V = \iint\limits_D z\,dx\,dy$.

Пример 1. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями $y^2 = 4x$, $y = 2x - 4$.

Решение. Строим область D (см. рис. 6).

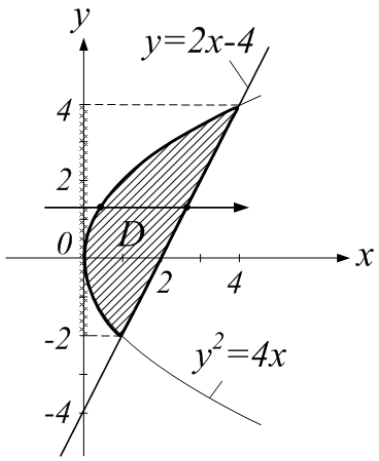

Рис. 6.

Заметим, что её удобнее спроектировать на ось Oy, т.к. область D правильная в направлении оси Ox.

Решая совместно данные уравнения линий границ, найдем координаты точек их пересечения:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \quad (2x-4)^2 = 4x, \quad x^2 - 5x + 4 = 0, \quad \begin{matrix} x_1 = 1, & y_1 = -2 \\ x_2 = 4, & y_2 = 4. \end{matrix}$$

Линия входа – парабола, $x = \dfrac{y^2}{4}$ – её уравнение, разрешенное относительно x. Линия выхода – прямая, $x = \dfrac{1}{2}(y+4)$ – её уравнение, разрешенное относительно x. Отрезок $y \in [-2;4]$ – проекция области D на ось Oy. Таким образом, область задается в виде системы неравенств: $\begin{cases} -2 \le y \le 4 \\ \dfrac{y^2}{4} \le x \le \dfrac{1}{2}(y+4) \end{cases}$.

Площадь вычисляем по формуле

$$S=\iint\limits_D dxdy=\left|\textit{см. рис.}\,6\right|=\int\limits_{-2}^{4}dy\int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{1}{2}(y+4)}dx=\int\limits_{-2}^{4}dy\left(x\Big|_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{1}{2}(y+4)}\right)=\int\limits_{-2}^{4}\left(\frac{1}{2}(y+4)-\frac{y^2}{4}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{1}{4}(y+4)^2-\frac{1}{12}y^3\right)\Big|_{-2}^{4}=9.$$

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y+z=2$, $y=x^2$, $z=0$.

Решение. По условию дано цилиндрическое тело, которое сверху ограничено плоскостью $z=2-y$, с боков – параболическим цилиндром $y=x^2$, образующие которого параллельны оси *Oz* (см. рис. 7а). Основанием *D* цилиндрического тела является проекция тела на плоскость $z=0$, которая ограничена линиями: $y=x^2$, $y=2$ (см. рис. 7б).

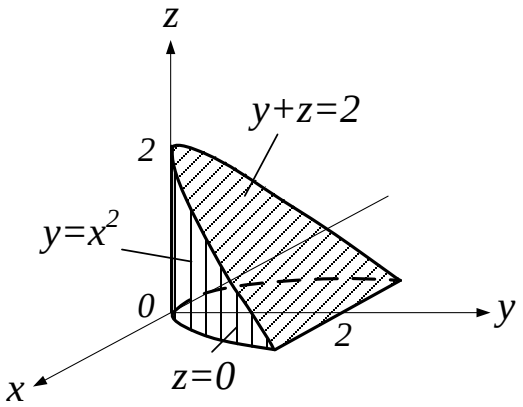

Рис. 7а.

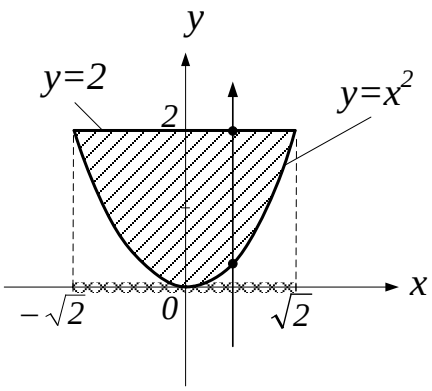

Рис. 7б.

Объем тела вычисляем по формуле:

$$V=\iint\limits_D z\,dxdy=\iint\limits_D(2-y)\,dxdy=\left|\textit{см. рис.}\,7\textit{б}\right|=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{x^2}^{2}(2-y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{2}=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(2-2x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx=\left(2x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=$$

$$=4\sqrt{2}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\sqrt{2}\right)^5=4\sqrt{2}-\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{4}{5}\sqrt{2}=\frac{32\sqrt{2}}{15}.$$

4.2. Вычисление массы и статических моментов плоской пластинки

Из физики известно, что масса плоской пластинки D равна интегралу от поверхностной плотности пластинки $\rho(x, y)$ в точке (x, y) по площади пластинки, т.е.

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y)\,dx\,dy .$$

Статические моменты M_x и M_y плоской пластинки D относительно осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot \rho(x, y)\,dx\,dy , \qquad M_y = \iint\limits_D x \cdot \rho(x, y)\,dx\,dy .$$

Если пластинка однородна, то $\rho(x, y) = const$.

Пример. Найти массу неоднородной пластинки D, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой её точке $\rho = \rho(x, y)$,

D (рис. 8): $x = 2$, $y = 0$, $y^2 = \dfrac{x}{2}$ $(y \ge 0)$; $\rho(x, y) = 4x + 6y^2$.

Решение.

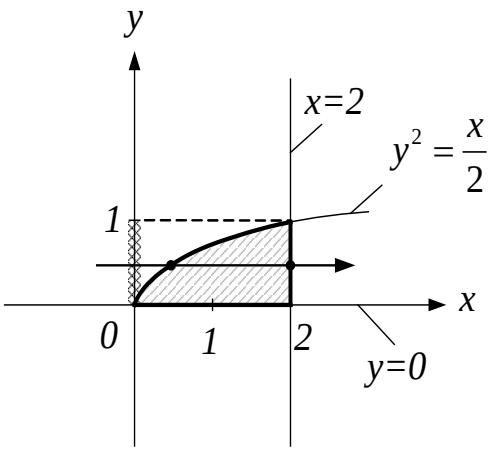

Рис. 8.

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D \left(4x + 6y^2\right) dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y^2}^{2} \left(4x + 6y^2\right) dx = \int\limits_0^1 dy \left(2x^2 + 6y^2 x\right)\Big|_{2y^2}^{2} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(8 + 12y^2 - 20y^4\right) dy = \left(8y + 4y^3 - 4y^5\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 8 + 4 - 4 = 8 .$$

4.3. Вычисление координат центра тяжести плоской пластинки

Если $C(x_c, y_c)$ – центр тяжести (масс) пластинки, то его координаты определяются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m},$$

где m – масса пластинки и M_x, M_y – её статические моменты относительно осей координат Ox, Oy соответственно.

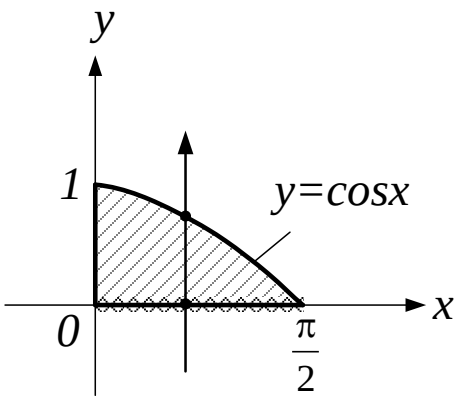

Рис. 9.

Пример 1. Найти координаты центра тяжести пластинки с постоянной плотностью $\rho(x,y)=1$, если D (рис .9): $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$.

Решение. $x_C=\frac{M_y}{m}$, $y_C=\frac{M_x}{m}$.

Найдем массу пластинки:

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D dx\,dy=\left|\textit{см. рис.}16\right|=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int\limits_0^{\cos x} dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

.

Теперь находим статические моменты пластинки:

$$M_y=\iint\limits_D x\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D x\,dx\,dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx\int\limits_0^{\cos x} dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx=\left|\begin{array}{c}\text{применим}\\ \text{формулу}\\ \text{интегрирования}\\ \text{по частям}\end{array}\right|=$$

$$=x\cdot\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}-1;$$

$$M_x=\iint\limits_D y\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D y\,dx\,dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int\limits_0^{\cos x} y\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{\pi}{8}.$$

Следовательно, $x_C=\frac{\pi}{2}-1$, $y_C=\frac{\pi}{8}$.

Пример 2. Найти координаты центра тяжести пластинки, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=1$, если плотность $\rho(x,y)=2y$.

Решение.

Вследствие симметрии пластинки относительно оси Oy (см. рис. 10) центр тяжести находится на оси Oy, т.е. $x_c = 0$.

Координата $y_c = \dfrac{M_x}{m}$.

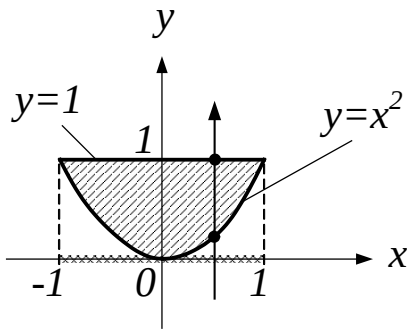

Рис. 10.

Находим массу пластинки:

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D 2y\,dx\,dy = \left|\text{см. рис.10}\right| = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} 2y\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \cdot y^2\Big|_{x^2}^{1} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(1 - x^4\right) dx = \left(x - \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{5}.$$

Вычислим статический момент M_x:

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D 2y^2\,dx\,dy = 2\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} y^2\,dy =$$

$$= 2\int\limits_{-1}^{1} dx \cdot \frac{y^3}{3}\Bigg|_{x^2}^{1} = \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1} \left(1 - x^6\right) dx = \frac{2}{3}\left(x - \frac{x^7}{7} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{7}.$$

Следовательно, $x_c = 0$, $y_c = \dfrac{5}{7}$.

4.4. Вычисление моментов инерции плоской пластинки

Моменты инерции плоской пластинки D с плотностью $\rho(x,y)$ относительно координатных осей Ox и Oy вычисляются по формулам:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy, \qquad I_y = \iint\limits_D x^2 \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy.$$

Пример. Найти момент инерции однородной пластинки с плотностью $\rho(x,y) = const = 1$, ограниченной прямыми $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$, относительно оси Ox (рис. 11).

Решение.

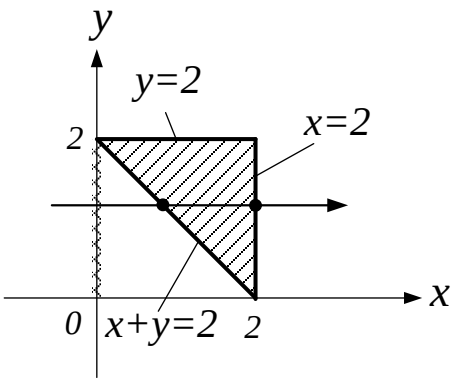

Рис. 11.

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D y^2\,dx\,dy = \left|см.\ рис.11\right| =$$

$$= \int\limits_0^2 dy \int\limits_{x=2-y}^{x=2} y^2\,dx = \int\limits_0^2 y^2 \left(x\Big|_{2-y}^{2} \right) dy = \int\limits_0^2 y^3\,dy = \frac{y^4}{4}\Big|_0^2 = 4\,.$$

5. Пример решения контрольной работы

Задание 1. Вычислить массу и координаты центра тяжести (масс) пластины D, заданной линиями $y^2 = x$, $y = 3$, если поверхностная плотность в каждой её точке $\rho(x,y) = x$. Координаты центра тяжести (масс) отметить на координатной плоскости вместе с изображением пластины D.

Решение.

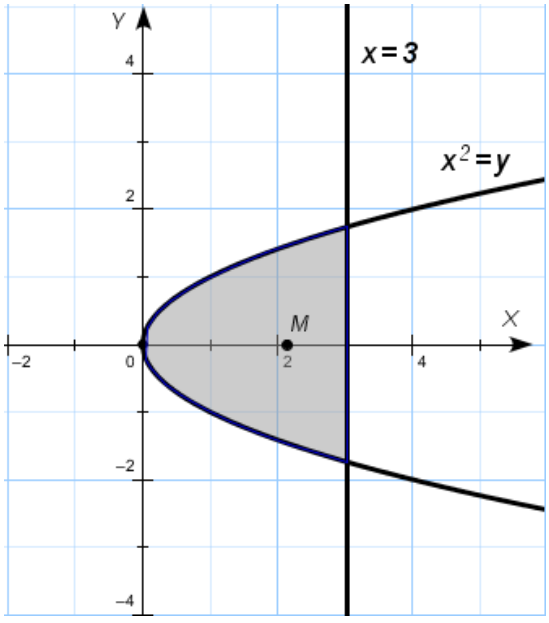

Рис. 12.

а) Массу находим по формуле $m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy$, где $\rho(x,y) = x$.

Область D: $\begin{cases} y^2 = x \\ y = 3 \end{cases}$ имеет вид, изображённый на рисунке 12.

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D x\,dx\,dy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x\,dy = \int\limits_0^3 dx \left(xy\Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \right) =$$

$$= \int\limits_0^3 dx \left(x\sqrt{x} + x\sqrt{x} \right) = 2\int\limits_0^3 x^{3/2}\,dx = 2 \cdot \frac{x^{5/2}}{5/2}\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot 3^{5/2} = \frac{4}{5}\sqrt{3^5} = \frac{4}{5} \cdot 9\sqrt{3} = \frac{36}{5}\sqrt{3}.$$

б) Для нахождения координат центра тяжести (масс) пластины D воспользуемся формулами

$$x_C = \frac{M_y}{m},\ y_C = \frac{M_x}{m},$$

где m – масса пластины, M_x и M_y – её статические моменты.

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy,\ \ M_y = \iint\limits_D x \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy.$$

$$M_x = \iint\limits_D yx\,dx\,dy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} yx\,dy = \int\limits_0^3 \left(x\frac{y^2}{2}\Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \right) dx = \int\limits_0^3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 0.$$

$$M_y = \iint\limits_D x \cdot x\,dx\,dy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x^2\,dy = \int\limits_0^3 \left(x^2\, y\Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \right) dx = \int\limits_0^3 x^2 \left(\sqrt{x} + \sqrt{x} \right) dx =$$

$$= 2\int\limits_0^3 x^{\frac{5}{2}} dx = 2\frac{x^{7/2}}{7/2}\Big|_0^3 = \frac{4}{7} \cdot \sqrt{3^7} = \frac{4}{7} \cdot 3^3\sqrt{3} = \frac{108}{7}\sqrt{3}.$$

Следовательно, $x_c = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{\frac{108}{7}\sqrt{3}}{\frac{36}{5}\sqrt{3}} = \dfrac{15}{7} = 2\dfrac{1}{7},\ \ y_c = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{0}{\frac{36}{5}\sqrt{3}} = 0.$

Наносим на координатную плоскость центр тяжести $\mathrm{M}\left(\frac{15}{7};0\right)$.

Задание 2. Найти объём тела, ограниченного поверхностями:
$z = 4x^2 + 2y^2 + 1,\ x + y - 3 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Решение.

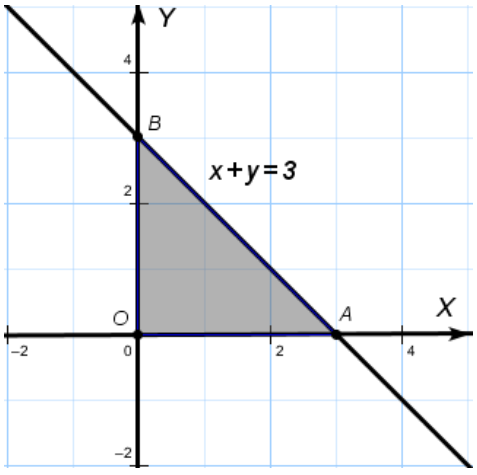

Рис. 13.

Объём данного тела можно вычислить с помощью формулы $V = \iint\limits_D z\,dx\,dy$,

где $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$ – параболоид, область D – треугольник OAB (см. рис.13).

$$V = \iint\limits_D z\,dxdy = \iint\limits_D \left(4x^2 + 2y^2 + 1\right) dxdy =$$

$$= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} \left(4x^2 + 2y^2 + 1\right) dy = \int_0^3 dx \left(4x^2 y + \frac{2}{3} y^3 + y \right) \Bigg|_0^{3-x} =$$

$$= \int_0^3 dx \left(4x^2 (3-x) + \frac{2}{3}(3-x)^3 + 3 - x \right) = \int_0^3 \left(18x^2 - \frac{14}{3} x^3 - 19x + 21 \right) dx =$$

$$= \left(18\frac{x^3}{3} - \frac{14}{3}\frac{x^4}{4} - 19\frac{x^2}{2} + 21x \right) \Bigg|_0^3 = \left(6x^3 - \frac{7}{6} x^4 - \frac{19}{2} x^2 + 21x \right) \Bigg|_0^3 =$$

$$= 6 \cdot 3^3 - \frac{7}{6} 3^4 - \frac{19}{2} 3^2 + 21 \cdot 3 = 45.$$

6. Варианты контрольной работы

Задание 1. Вычислить массу и координаты центра тяжести (масс) пластины D, заданной линиями с поверхностной плотностью в каждой её точке $\rho = \rho(x, y)$. Координаты центра тяжести (масс) отметить на координатной плоскости вместе с изображением пластины D.

1) D: $x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ \rho(x, y) = x^2$;

2) D: $2x + 3y = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ \rho(x, y) = \frac{y^2}{2}$;

3) D: $y = x,\ y = 1,\ x = 0,\ \rho(x, y) = x^2 + 2y^2$

4) D: $x + y = 1,,\ x = 0,\ y = 0,\ \rho(x, y) = x^2 + y^2$;

5) D: $y = 2x,\ x + y = 2, x = 0,\ \rho(x, y) = 2 - x - y$;

6) D: $y = x^2,\ y = 4,\ \rho(x, y) = 2x + 5y + 10$;

7) D: $x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ \rho(x, y) = 2x^2 + y^2$;

8) D: $y = \sqrt{x},\ y = x,\ \rho(x, y) = 2 - x - y$;

9) D: $y = x,\ x = 1,\ y = 0,\ \rho(x, y) = x^2 + 2y^2 + 10$

10) D: $y = x^2,\ y = x,\ \rho(x, y) = 2x + 3y$.

Задание 2. Найти объём тела, ограниченного поверхностями:

1) $z = x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

2) $z = 2x^2 + y^2 + 1,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

3) $z = 4 - x^2 - y^2,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

4) $z = 2x^2 + y^2,\ x + y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

5) $z = 9 - y^2,\ 3x + 4y = 12, x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

6) $z = 4 - y^2,\ 2x + y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

7) $z = x - x^2,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

8) $z = 2 - x^2 - y^2,\ x + 2y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

9) $z = 2x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

10) $z = x^2 + y^2 + 1,\ x + y = 3,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

Список литературы

1. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для втузов: [в 2 т.] / Н. С. Пискунов . – Изд. стер. . – Москва: Интеграл-Пресс , 2009 . – Т. 2. – 544 с.

2. Щипачев, В. С. Высшая математика: учебник для вузов / В.С. Щипачев. – 6-е изд., стер. – Москва: Высш. шк., 2003. – 479 с.

3. Кузнецов, Л. А. Сборник задач по высшей математике: типовые расчеты: учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. – Изд. 8-е, стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2006. – 239 с.

4. Индивидуальные задания по высшей математике: учебное пособие для техн. специальностей вузов: в 4 ч. Ч. 3. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под ред. А. П. Рябушко. – 4-е изд, испр. – Минск: Вышейшая школа, 2007. – 367 с.: ил.

МАТЕМАТИКА

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания для самостоятельной работы студентов

Оригинал-макет – О.М. Ванчугова

Подписано в печать 21.12.2015 г. Формат 60 × 84/16.
Усл. п. л. 1,0. Тираж . Заказ № .

РИО ВоГУ. 160000, г. Вологда, ул. С. Орлова, 6.