Министерство образования и науки Российской Федерации
Вологодский государственный университет

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

II часть

Методическое пособие по выполнению контрольной работы № 2 для дистанционного и заочного обучения студентов направления «Экономика»

Факультет ЗДО

Вологда
2014

УДК: 629. 113. 004. 5

Математический анализ. II часть: методическое пособие по выполнению контрольной работы № 2 для дистанционного и заочного обучения студентов направления «Экономика». – Вологда: ВоГУ, 2014. – 28 с.

Пособие ставит своей целью подготовить студентов заочной формы обучения направления «Экономика» к выполнению контрольной работы № 2 по математическому анализу, содержит необходимый теоретический материал, примеры решения задач и контрольные задания в 10 вариантах.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Составители: Быстроумова А.П., старший преподаватель;
Иванова С.В., канд. тех. наук, доцент;
Микрюкова О.И., канд. физ.-мат. наук, доцент

Рецензент И.А. Миткевич, канд. эконом. наук, доцент кафедры экономической теории и менеджмента Вологодского государственного университета

Введение

В экономике часто необходимо добиться оптимального значения некоторого показателя. Оптимальным называется наибольшее или наименьшее значение величины, достигнутое при наличии ограничений, препятствующих достижению этого наибольшего или наименьшего значений. Сами показатели зависят от действия многих факторов, т.е. можно сказать, что показатель является функцией нескольких переменных. Например, прибыль является функцией таких величин: цены на ресурсы, цены на продукцию, производительность труда, производственные издержки и т.д.

Задачи нахождения наибольшего и наименьшего значений функции нескольких переменных рассматриваются в курсе математического анализа в разделе исследования функции нескольких переменных на экстремум и условный экстремум. Поэтому данное пособие и посвящено рассмотрению таких задач.

В первом разделе пособия приводятся основные определения и понятия теории функций нескольких переменных.

Второй раздел освещает вопрос о дифференцировании функций нескольких переменных.

В третьем разделе рассмотрены методы исследования на экстремумы функций нескольких переменных.

Четвертый раздел знакомит с нахождением условного экстремума функций нескольких переменных.

В пятом разделе приведены примеры конкретных экономических задач, решаемых с помощью исследования функций нескольких переменных.

В шестом разделе разобраны решения типовых задач.

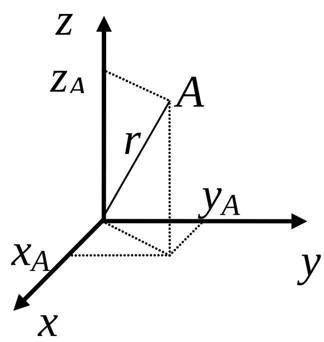
Последний раздел пособия содержит задания контрольной работы № 2 по математическому анализу в 10 вариантах.

1. Функция нескольких переменных: основные понятия

1.1. Примеры и определение функции нескольких переменных

Существует большое количество величин, которые зависят от нескольких других. Например, падение напряжения на резисторе U зависит от силы тока I и сопротивления R: $U = I \cdot R$.

Объем комнаты V зависит от длины l, ширины d и высоты h: $V = l \cdot d \cdot h$.



Расстояние r от начала координат до точки A зависит от трех ее координат $r = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$.

Изучаются издержки производства на изготовление единицы некоторого вида продукции. Пусть: x - затраты по материалам, y - расходы на выплату заработной платы работникам, z - амортизационные отчисления. Очевидно, что издержки производства зависят от значений названных параметров x, y, z.

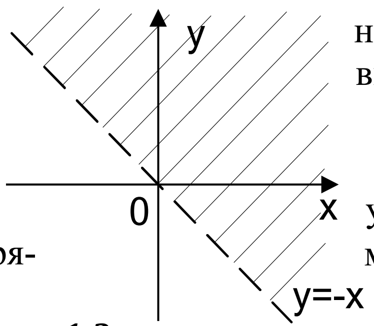
Эти и еще множество других зависимостей можно объединить понятием функции нескольких переменных.

Если каждому набору значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *соответствует вполне определенное значение величины y, то говорят, что y является функцией n переменных, и записывают* $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для функций нескольких переменных могут использоваться и другие обозначения, например: $z = z(x, y)$; $u = u(x, y, z)$; $t = t(x, y, z)$.

Областью определения функции нескольких переменных называется совокупность значений переменных, при которых функция имеет смысл.

Пример. Найти и изобразить область определения функции $z = \ln(x + y)$.



Так как на множестве действительных чисел логарифм можно найти только от неотрицательных чисел, то должно выполняться условие:

$x + y > 0$ или $y > -x$.

Подстановкой значений переменных можно убе- убедиться, что это часть плоскости, лежащая выше прямой $y = -x$.

1.2. Способы задания, графическое изображение

Рассмотрим способы задания функции нескольких переменных.

1. Аналитический способ.

а). Функция задана в явном виде формулой $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, позволяющей по значениям переменных вычислить значение функции, например, $y = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2$; $z = \ln(x + y)$.

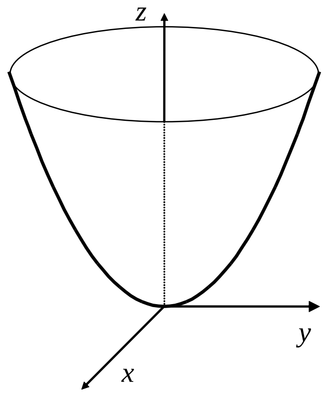
б). Функция задана в неявном виде соотношением $F(x_1, x_2, ..., x_n) = const$, связывающим значение функции и переменные, например, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; $yx_1 + \ln(x_1 + x_2) + \mathrm{tg}(y + x_4) = 0$.

2. Табличный способ задания функции нескольких переменных.

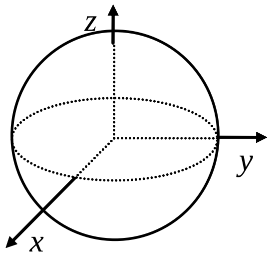
Практически этот способ удобен только для функции двух переменных:

$x \backslash y$	y_1	y_2	…	y_m
x_1	z_{11}	z_{12}	…	z_{1m}
x_2	z_{21}	z_{22}	…	z_{2m}
…	…	…	…	…
x_n	z_{n1}	z_{n2}	…	z_{nm}

3. Графическое изображение функции нескольких переменных.



Функцию одной переменной можно изобразить графически линией. Функцию двух переменных можно изобразить поверхностью. Например, на рисунке представлено изображение поверхности, задаваемой уравнением $z = x^2 + y^2$. Поверхность, заданная уравнением такого вида, называется параболоидом.



Уравнение сферы с центром в начале координат $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ представляет собой неявную функцию двух переменных, которая может быть представлена двумя явными функциями:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \text{ и } z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,.$$

Линией уровня функции двух переменных называется линия, на которой функция сохраняет постоянное значение.

Например, линиями уровня функции $z = x^2 + y^2$ будут окружности различного радиуса $x^2 + y^2 = const$.

Поверхностью уровня функции трех переменных называется поверхность, на которой она сохраняет постоянное значение.

Например, для функции трех переменных $u = x + y + z$ поверхностями уровня будут плоскости, уравнение которых имеет вид $x + y + z = const$.

Функция большего числа переменных также может принимать постоянные значения, но объект, соответствующий совокупности значений переменных, для которых функция принимает постоянное значение, представить графически нельзя. Тем не менее, по аналогии с функциями трех переменных, его называют поверхностью или гиперповерхностью уровня.

1.3. Понятие предела функции нескольких переменных, непрерывность

Набору значений двух переменных x и y соответствует точка на плоскости, набору значений трех переменных x, y, z – точка в пространстве.

По аналогии будем называть произвольный набор значений переменных $(x_1, x_2, ..., x_n)$ точкой и обозначать одной буквой M. Если каждому натуральному числу n поставлена в соответствие точка M_n, то говорят, что определена последовательность точек, обозначаемая $\{M_n\}$.

Если с увеличением n координаты точек этой последовательности меняются так, что

$$x_1 \to x_{10},\ x_2 \to x_{20},\ .....,\ x_n \to x_{n0};$$

тогда говорят, что последовательность $\{M_n\}$ сходится к точке M_0.

Число b называется пределом функции $y(M)$ в точке M_0, если для любой сходящейся к M_0 последовательности $\{M_n\}$, причем $M_n \neq M_0$, соответствующая последовательность значений функции $\{y(M_n)\}$ сходится к b.

Символически существование предела у функции нескольких переменных можно записать так

$$\lim_{M \to M_0} y(M) = b.$$

Функция $y(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{M \to M_0} y(M) = y(M_0).$$

2. Частные производные, полный дифференциал функции нескольких переменных

2.1. Частные производные функции нескольких переменных

Частным приращением $\Delta_{x_i} y$ функции нескольких переменных y по переменной x_i называется разность:

$$\Delta_{x_i} y = y(x_1, x_2, \ldots x_i + \Delta x_i, \ldots x_n) - y(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n),$$

где Δx_i – приращение переменной x_i.

Частной производной $y'_{x_i} = \dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ функции y по переменной x_i называется предел отношения частного приращения $\Delta_{x_i} y$ к приращению Δx_i, когда последнее стремится к 0 произвольным образом:

$$y'_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} y}{\Delta x_i}.$$

Учитывая соответствующие обозначения, для функции двух переменных получим:

$$\Delta_x z = z(x + \Delta x, y) - z(x, y); \quad \Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y);$$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}; \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Частные производные функции нескольких переменных можно найти по правилам дифференцирования и таблице производных для функции одной переменной, т.к. при дифференцировании по одной переменной x_i все остальные переменные имеют постоянное значение.

Пример. $z = x^3 y + (2x + y)\sin y;$

$$z'_x = \left(x^3 y\right)'_x + \left((2x + y)\sin y\right)'_x = y\left(x^3\right)'_x + \sin y(2x + y)'_x = 3x^2 y + 2\sin y;$$

$$z'_y = \left(x^3 y\right)'_y + \left((2x+y)\sin y\right)'_y =$$

$$= x^3\left(y\right)'_y + \left(2x+y\right)'_y \sin y + \left(2x+y\right)\left(\sin y\right)'_y = x^3 + \sin y + \left(2x+y\right)\cos y.$$

Пример. $z = x^y$; $z'_x = y \cdot x^{y-1}$; $z'_y = x^y \ln x$.

Дифференцирование сложной функции нескольких переменных рассмотрим на примере функции двух переменных.

Пусть $z = f(u)$, а $u = u(x,y)$. Тогда $z'_x = z'_u \cdot u'_x$; $z'_y = z'_u \cdot u'_y$.

Пример. $z = \operatorname{arctg}(3x+2y)$;

$$z'_x = \frac{1}{1+\left(3x+2y\right)^2} \cdot \left(3x+2y\right)'_x = \frac{3}{1+\left(3x+2y\right)^2};$$

$$z'_y = \frac{1}{1+\left(3x+2y\right)^2} \cdot \left(3x+2y\right)'_y = \frac{2}{1+\left(3x+2y\right)^2}.$$

Пусть $z = f(x,y)$, а $x = x(t)$, $y = y(t)$, тогда z - сложная функция от t. Производную z'_t можно найти аналогично производной сложной функции одной переменной: $z'_t = \dfrac{dz}{dt} = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t$

Пример. Найти z'_t, если $z = x^y$, $x = t^2$, $y = 2t$.

$$z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t = y x^{y-1} \cdot 2t + x^y \ln x \cdot 2 =$$

$$= 2t(t^2)^{2t-1} \cdot 2t + (t^2)^{2t} \ln t^2 \cdot 2 = 4(t^2)^{2t}(1+\ln t).$$

2.2. Понятие полного дифференциала функции нескольких переменных

Полным дифференциалом dy *функции нескольких переменных* y *называется сумма произведений частных производных на дифференциалы соответствующих независимых переменных:*

$$dy = y'_{x_1} dx_1 + y'_{x_2} dx_2 + \ldots + y'_{x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} y'_{x_i} dx_i .$$

Для функции двух переменных: $dz = z'_x\, dx + z'_y\, dy$.

Пример. Найти, $dz(2;1)$ если $z = x^2 y^3$.

Найдем частные производные функции z в общем виде:

$z'_x = 2xy^3$; $z'_y = 3x^2 y^2$.

Вычислим значение производных при: $x = 2$; $y = 1$:

$z'_x(2;1) = 4$; $z'_y(2;1) = 12$.

Подставив эти значения в формулу полного дифференциала для функции двух переменных, найдем

$$dz(2,1) = 4\,dx + 12\,dy.$$

2.3. Применение полного дифференциала при дифференцировании неявных функций

Неявную функцию одной переменной $F(x,y) = const$ можно рассматривать как функцию двух переменных, имеющую постоянное значение. Тогда ее дифференциал должен быть равен 0:

$$dF = F'_x\,dx + F'_y\,dy = 0, \text{ откуда } y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Пример. Функция одной переменной задана в неявном виде: $\ln\sqrt{x^2+y^2} = arctg\,\dfrac{y}{x}$. Найти y'_x.

Запишем данную функцию в виде: $F(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - arctg\,\dfrac{y}{x} = 0$. Найдем частные производные этой функции:

$$F'_x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x+y}{x^2+y^2};$$

$$F'_y = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

Найдем y'_x: $\quad y'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = -\dfrac{x+y}{x^2+y^2} : \dfrac{y-x}{x^2+y^2} = \dfrac{x+y}{x-y}.$

2.4. Частные производные и дифференциалы высших порядков

В разделе 2.1. мы видели, что частные производные функции нескольких переменных, так же, как и сама функция, зависят от нескольких переменных, поэтому их снова можно дифференцировать, получая частные производные второго порядка. Дифференцирование производных второго порядка приводит к производным третьего порядка и т.д. Поскольку дифференцировать можно по любой из нескольких переменных, то с увеличением порядка разнообразие производных увеличивается.

Например, для функции двух переменных $z = z(x,y)$ имеются две частные производные z'_x и z'_y. Дифференцируем еще раз:

$$\left(z'_x\right)'_x = z''_{xx};\quad \left(z'_x\right)'_y = z''_{xy};\quad \left(z'_y\right)'_x = z''_{yx};\quad \left(z'_y\right)'_y = z''_{yy}$$

Производные вида z''_{xy} и z''_{yx} называются смешанными, для них и для других смешанных производных любого порядка выполняется следующее свойство: *вид смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования, а определяется только количеством дифференцирований по той или иной переменной, если смешанные производные непрерывны в точке дифференцирования.*

Например, $z''_{xy} = z''_{yx}$; $z'''_{xxy} = z'''_{xyx} = z'''_{yxx}$.

Таким образом, у функции двух переменных 3 частных производных второго порядка: z''_{xx}; z''_{xy}; z''_{yy}; 4 частных производных третьего порядка:

$$z'''_{xxx};\ z'''_{xxy};\ z'''_{xyy};\ z'''_{yyy}.$$

У функции трех переменных $u = u(x, y, z)$ 6 производных второго порядка: u''_{xx}; u''_{xy}; u''_{yy}; u''_{xz}; u''_{zz}; u''_{yz}.

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от полного дифференциала функции.

Для функции двух независимых переменных:

$$d^2z = d(dz) = (dz)_x{}' dx + (dz)_y{}' dy = \left(z'_x dx + z'_y dy\right)_x{}' dx + \left(z'_x dx + z'_y dy\right)_y{}' dy =$$

$$= z''_{xx}(dx)^2 + z''_{yx} dy\, dx + z''_{xy} dx\, dy + z''_{yy}(dy)^2 = z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{xy} dx\, dy + z''_{yy}(dy)^2$$

Аналогично получается дифференциал второго порядка функции трех переменных:

$$d^2u = d(du) = d\left(u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz\right) =$$

$$= u''_{xx}(dx)^2 + 2u''_{xy} dxdy + u''_{yy}(dy)^2 + 2u''_{xz} dxdz + u''_{zz}(dz)^2 + 2u''_{yz} dydz$$

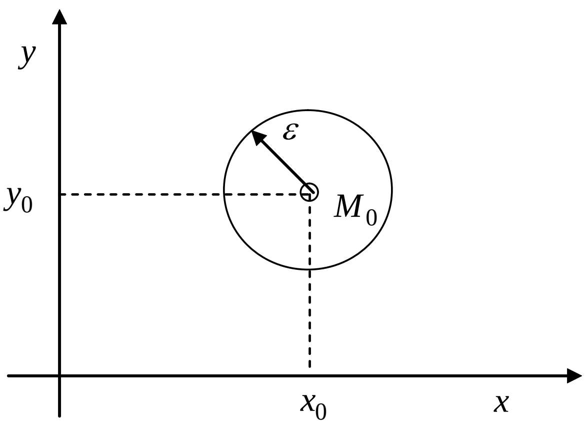
В общем случае, дифференциал $n-$го порядка $d^n y = d\left(d^{n-1} y\right)$.

В математическом анализе для функции нескольких переменных $y = y(x_1, x_2, \ldots x_n)$ так же, как и для функции одной переменной, доказана формула Тейлора, которая устанавливает связь между приращением функции и ее дифференциалами:

$$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{2!} + \frac{d^3 y}{3!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n y}{n!}$$

3. Исследование функции нескольких переменных на экстремум

3.1. Определение экстремума



Нарисуем на плоскости круг с центром в точке M_0 и радиусом ε. Для всех точек этого круга расстояние до M_0 не превосходит ε:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \le \varepsilon .$$

Будем называть такой круг ε-окрестностью точки M_0. Аналогично, для произвольного числа переменных ε-окрестностью точки M_0 называется множество точек M, для которых выполняется условие:

$$\sqrt{(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+...+(x_n-x_{n0})^2} \le \varepsilon.$$

Используя введенные понятия, дадим определение экстремума функции нескольких переменных.

Функция $y(x_1, x_2,..., x_n)$ имеет в точке M_0 максимум (минимум), если существует такая ε-окрестность точки M_0, для всех точек которой выполняется условие: $y(M) < y(M_0)$ $\big(y(M) > y(M_0)\big)$.

Если составить приращение $\Delta y = y(M) - y(M_0)$, то в точке минимума приращение всегда положительно ($\Delta y > 0$), в точке максимума – отрицательно ($\Delta y < 0$).

3.2. Необходимые и достаточные условия экстремума

Рассмотрим функцию двух переменных $z = z(x, y)$. Пусть в точке M_0 у нее имеется экстремум. Зафиксируем значение одной из переменных, например, возьмем $y = y_0$, тогда функция $z = z(x, y_0)$ является функцией одной переменной, и для нее в точке экстремума должно выполняться условие: производная равна 0 или не существует. Во втором случае функция имеет так называемый «острый» экстремум. Такие функции достаточно редки, поэтому в дальнейшем будем рассматривать только функции с «гладкими» экстремумами, когда производная равна 0: $z'_x(x, y_0)\big|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow z'_x(x_0, y_0) = 0$. Аналогично можно показать, что и $z'_y(x_0, y_0) = 0$. Продолжая рассуждения для функции произвольного числа переменных, можно показать, что необходимым условием существования экстремума функции нескольких переменных является равенство 0 всех частных производных функции:

$$\begin{cases} y'_{x_1} = 0, \\ y'_{x_2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ y'_{x_n} = 0. \end{cases}$$

Точки, которые являются решением этой системы, называются стационарными. Чтобы узнать, будут ли они точками экстремума, и, если да, то какого, нужно проверить выполнение достаточных условий экстремума.

Для функции нескольких переменных, также, как и для функции одной переменной, можно написать формулу Тейлора в следующем виде:

$$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{2!} + \frac{d^3 y}{3!} + \frac{d^4 y}{4!} + \dots$$

При малых дифференциалах независимых переменных (меньше 1), основной вклад в приращение дают дифференциалы малых порядков - первого, второго и т.д. Чем больше порядок, тем меньше величина слагаемого $\frac{d^n y}{n!}$. Поскольку в точке экстремума все частные производные первого порядка обращаются в 0, то $dy = 0$ и величина приращения определяется величиной второго дифференциала: $\Delta y \approx \frac{1}{2} d^2 y$.

Из этого обстоятельства следуют достаточные условия существования экстремума.

Если в стационарной точке второй дифференциал функции при любых значениях дифференциалов независимых переменных положителен, то в этой точке имеется минимум, если второй дифференциал при любых значениях дифференциалов независимых переменных отрицателен, то в этой точке имеется максимум.

3.3. Примеры исследования на экстремум

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2$.

Необходимые условия: $\begin{cases} z'_x = 2x - y = 0, \\ z'_y = -x + 2y = 0, \end{cases} \Rightarrow x_0 = y_0 = 0$.

Найдем вторые производные: $z''_{xx} = 2;\ z''_{xy} = -1;\ z''_{yy} = 2$. Составим дифференциал второго порядка и преобразуем его, выделив полный квадрат: $d^2 z = 2(dx)^2 - 2dxdy + 2(dy)^2 =$

$$2\left[(dx)^2 - dxdy + (dy)^2\right] = 2\left[(dx)^2 - dxdy + \frac{1}{4}(dy)^2 + \frac{3}{4}(dy)^2\right] = 2\left(dx - \frac{dy}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}(dy)^2.$$

Из последней формулы видно, что знак второго дифференциала в стационарной точке при любых dx и dy положителен как сумма квадратов, следовательно, в ней имеется минимум и $z_{\min} = 0$.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - xy - 2y^2$.

Необходимые условия: $\begin{cases} z'_x = 2x - y = 0, \\ z'_y = -x - 4y = 0, \end{cases} \Rightarrow x_0 = y_0 = 0$.

Найдем вторые производные: $z''_{xx} = 2;\ z''_{xy} = -1;\ z''_{yy} = -4$. Составим дифференциал второго порядка и преобразуем его:

$$d^2z = 2(dx)^2 - 2dxdy - 4(dy)^2 =$$
$$2\left((dx)^2 - dxdy - 2(dy)^2\right) = 2(dx - 2dy)(dx + dy).$$

Знак второго дифференциала зависит от значений независимых дифференциалов dx и dy, значит, в исследуемой точке экстремума нет.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1.$$

Необходимые условия: $\begin{cases} u'_x = 2x - 2 = 0, \\ u'_y = 4y + 4 = 0, \\ u'_z = 2z - 6 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_0 = 1;\ y_0 = -1;\ z_0 = 3.$

Вторые производные: $u''_{xx} = 2,\ u''_{xy} = 0,\ u''_{xz} = 0,\ u''_{yy} = 4,\ u''_{yz} = 0,\ u''_{zz} = 2$.

$d^2u = 2(dx)^2 + 4(dy)^2 + 2(dz)^2$. Видно, что знак второго дифференциала всегда положителен, значит, в исследуемой точке у функции имеется минимум и $u_{\min} = 1^2 + 2(-1)^2 + 3^2 - 2\cdot 1 + 4\cdot(-1) - 6\cdot 3 + 1 = -11$.

3.4. Проверка достаточных условий с помощью матрицы Гессе

В рассмотренных примерах знак второго дифференциала определялся достаточно просто для произвольных значений дифференциалов независимых переменных. Однако так бывает далеко не всегда, часто это задача довольно сложная. Поэтому хочется иметь формализованный способ проверки достаточных условий. Он состоит в следующем. После установления стационарных точек находят вторые частные производные и составляют из них матрицу Гессе.

Для функции двух переменных: $H = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix}$.

Для функции трех переменных: $H = \begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{pmatrix}$.

Для функции произвольного числа переменных $H = \begin{pmatrix} y''_{x_1x_1} & y''_{x_1x_2} & \cdots & y''_{x_1x_n} \\ y''_{x_2x_1} & y''_{x_2x_2} & \cdots & y''_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y''_{x_nx_1} & y''_{x_nx_2} & \cdots & y''_{x_nx_n} \end{pmatrix}$.

Вначале матрицу Гессе составляют в общем виде. Затем выписывают ее для конкретной стационарной точки и находят угловые миноры этой матрицы:

$$\delta_1 = h_{11}; \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}; \ \ldots, \ \delta_n = \Delta H .$$

Если все угловые миноры положительны, т.е. $\delta_1 > 0; \delta_2 > 0; ..., \delta_n > 0$, то в данной точке имеется минимум.

Если знак миноров чередуется таким образом:

$\delta_1 < 0;\ \delta_2 > 0;\ \delta_3 < 0;\ \delta_4 > 0;\ ....$

то в данной точке имеется максимум.

При другом чередовании знаков экстремума нет, если правильное чередование знаков нарушается равенством 0 одного из угловых миноров, требуется дополнительное исследование.

Для функции двух переменных $z = z(x, y)$ достаточные условия наличия экстремума можно сформулировать и в более привычном виде:

а) если в критической точке $z''_{xx} > 0, (z''_{yy} > 0), \ \ z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$, то в ней имеется минимум;

б) если в критической точке $z''_{xx} < 0, (z''_{yy} < 0), \ \ z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$, то в ней имеется максимум;

в) если в критической точке $z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 < 0$, то в ней нет экстремума;

г) если в критической точке $z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$, требуется дополнительное исследование.

Пример 4. Исследуем на экстремум функцию

$u = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1.$

Необходимые условия экстремума: $\begin{cases} u'_x = 3x^2 + y - 2z = 0 \\ u'_y = x + 2y + 3 = 0 \\ u'_z = -2x + 4z = 0 \end{cases}$

Из второго уравнения $y = -\dfrac{x+3}{2}$; из третьего $x = 2z$; подставим в первое, получим $2x^2 - x - 1 = 0$. Решив квадратное уравнение, найдем $x_1 = 1;\ x_2 = -0{,}5.$ Учитывая соотношения между переменными, получим две стационарные точки: $M_1(1;-2;0,5)$, $M_2(-0,5;-1,25;-0,25)$. Для составления матрицы Гессе выпишем вторые производные:

$u''_{xx}=6x;\ u''_{xy}=1;\ u''_{xz}=-2;\ u''_{yy}=2;\ u''_{yz}=0;\ u''_{zz}=4.$

Матрица Гессе в общем виде: $H=\begin{pmatrix} 6x & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Для первой стационарной точки M_1: $H(M_1)=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\delta_1=6>0;\ \delta_2=\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=11>0;\ \delta_3=\begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=36>0.$$

Т.к. все угловые миноры положительны, значит, в точке M_1 минимум функции u:

$$u_{\min}=1^3+1\cdot(-2)+(-2)^2-2\cdot 0,5\cdot 1+2\cdot 0,5^2+3\cdot(-2)-1=-4,5.$$

$$H(M_2)=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\delta_1=-3<0;\ \delta_2=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-7<0;\ \delta_3=\begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-40<0.$$

В точке M_2 экстремума нет.

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-x^2-2xy-y^2$.

Необходимые условия: $\begin{cases} z'_x=3x^2-2x-2y=0, \\ z'_y=3y^2-2x-2y=0. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения системы второе, получим: $3x^2-3y^2=0$ $\Rightarrow 3(x-y)(x+y)=0\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y, \\ x=-y. \end{array}\right.$

Подставим первое равенство в любое из уравнений системы, получим в качестве решения две стационарные точки: $M_1(0;0)$ и $M_2\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$. Подстановка второго равенства дает снова точку $M_1(0;0)$. Найдем вторые производные и составим из них матрицу Гессе в общем виде:

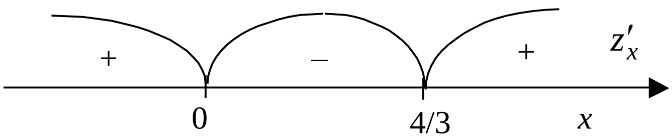
$$H = \begin{pmatrix} 6x-2 & -2 \\ -2 & 6y-2 \end{pmatrix}.$$

Выпишем вид матрицы Гессе для точки $M_1(0;0)$ и найдем ее угловые миноры: $H(M_1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$; $\delta_1 = -2$; $\delta_2 = 0$.

Проведем дополнительное исследование. Обе стационарные точки находятся на линии $x = y$, используем это условие и подставим его в функцию, исследуемая функция при этом будет иметь вид: $z = 2x^3 - 4x^2$. Найдем производную, приравняем 0 и найдем критические точки: $z'_x = 6x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ \ x_2 = 4/3$. Исследуем знак производной вблизи этих точек:

При $x = 0$ у функции имеется максимум и $z_{\max} = 0$, при $x = 4/3$ у функции имеется минимум и

$$z_{\min} = 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{64}{27}.$$



4. Нахождение условного экстремума функции нескольких переменных

Эта задача может быть сформулирована следующим образом: исследовать на экстремум функцию $f = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ при условии, что переменные связаны соотношениями

$$\begin{cases} y_1\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = b_1; \\ y_2\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = b_m. \end{cases}$$

В простейшем случае число ограничений равно одному.

Исследование на условный экстремум может быть проведено двумя способами: методом неопределенных множителей Лагранжа и методом исключения переменных.

4.1. Метод неопределенных множителей Лагранжа

Запишем ограничения, наложенные на переменные, в виде $y_i\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) - b_i = 0$ и составим из них и целевой функции $f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ функцию Лагранжа L:

$$L = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) + \lambda_1\left(y_1 - b_1\right) + \lambda_2\left(y_2 - b_2\right) + \ldots + \lambda_m\left(y_m - b_m\right),$$

здесь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ - неопределенные множители Лагранжа.

Для нахождения точек, в которых может быть экстремум, составим и решим систему:

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 0; \\ L'_{x_2} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ L'_{x_n} = 0; \\ L'_{\lambda_1} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ L'_{\lambda_m} = 0. \end{cases}$$

Для проверки достаточных условий экстремума в каждой точке, являющейся решением системы, составим дифференциал второго порядка функции Лагранжа d^2L (при составлении дифференциала учитываются только производные от реальных переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$). По его знаку определим, будет ли в исследуемой точке экстремум и, если будет, какого вида.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $f = \dfrac{x-y-4}{\sqrt{2}}$ при условии, что $x^2+y^2=1$.

Запишем условие в виде $x^2+y^2-1=0$ и составим функцию Лагранжа:

$$L = \frac{x-y-4}{\sqrt{2}} + \lambda\left(x^2+y^2-1\right) = L\left(x, y, \lambda\right).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа и приравняем их нулю, получим систему:

$$\begin{cases} L'_x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 2\lambda x = 0; \\ L'_x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 2\lambda y = 0; \\ L'_x = x^2+y^2-1 = 0. \end{cases}$$

Выразим из первых двух уравнений x и y через λ и подставим в третье уравнение: $\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}\lambda}\right)^2 - 1 = 0$ или $\dfrac{1}{4\lambda^2} = 1$, откуда получим $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}, \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$. При первом значении получим $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; при втором значении найдем $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Составим $d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}(dy)^2$. Т.к. $L''_{xx} = 2\lambda,\ L''_{xy} = 0,\ L''_{yy} = 2\lambda$, то в первой точке $d^2L = (dx)^2 + (dy)^2$, во второй точке $d^2L = -(dx)^2 - (dy)^2$.

В первом случае $\left(\lambda = \frac{1}{2},\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ при любых dx и dy дифференциал второго порядка положителен, следовательно, в ней имеется минимум $f_{\min} = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - 4}{\sqrt{2}} = -1 - 2\sqrt{2}$.

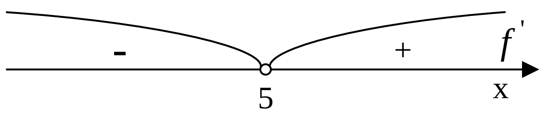
Во втором случае $\left(\lambda = -\frac{1}{2},\ x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ при любых dx и dy дифференциал второго порядка отрицателен, следовательно, во второй точке имеется максимум и $f_{\max} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 4}{\sqrt{2}} = 1 - 2\sqrt{2}$.

4.2. Метод исключения переменных

Используя m уравнений системы ограничений, выражают m через остальные $n-m$ переменные и подставляют в целевую функцию. Получившуюся функцию $n-m$ переменных исследуют на обычный экстремум.

Пример. Найти условный экстремум функции $f = 5x_1x_2 + 2x_2x_3$ при условии, что $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ 3x_1 + x_3 = 4. \end{cases}$

Выразим из системы $x_2 = 2 - x_1$ и $x_3 = 4 - 3x_1$ и подставим в целевую функцию: $f = 5x_1(2 - x_1) + 2(2 - x_1)(4 - 3x_1) = x_1^2 - 10x_1 + 16$. Исследуем полученную функцию одной переменной на экстремум, найдем производную $f'_{x_1} = 2x_1 - 10$. Критическую точку найдем из условия: $2x_1 - 10 = 0$, откуда $x_{1кр} = 5$. Исследуем знак производной вблизи критической точки:



Т.к. знак производной меняется с - на +, то в исследуемой точке имеется минимум и $f_{\min} = f(5;-3;-11) = 5\cdot 5\cdot(-3) + 2(-3)\cdot(-11) = -9$.

5. Применение в экономической теории

5.1. Прибыль от производства разных видов продукции

Рассмотрим типичную задачу нахождения экстремума функции нескольких переменных, возникающую в экономике. Пусть $x_1, x_2, \dots x_n$ - количество производимых n разновидностей продукции, а их цены - соответственно $P_1, P_2, \dots P_n$, (все P_i - постоянные величины). Пусть затраты на производство этих видов продукции задаются функцией издержек

$$C = S(x_1, x_2, \dots x_n).$$

Тогда функция прибыли имеет вид

$$\Pi = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n - S(x_1, x_2, \dots x_n).$$

Максимум прибыли следует искать как экстремума функции Π при $x_i > 0$ (при отсутствии других ограничений).

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Это условие приводит к системе алгебраических уравнений относительно переменных x_i.

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial x_i} = 0,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Система уравнений реализует известное правило экономики: предельная стоимость (цена) продукции равна предельным издержкам на производство этой продукции. Решениями этой системы уравнений являются наборы, состоящие из n значений каждый. Нужно заметить, что сам процесс нахождения решения системы уравнений зависит от вида функции издержек и может быть довольно сложным.

Приведем конкретный пример. Пусть производится два вида продукции, обозначим их количества через x и y. Пусть цены этой продукции, соответственно, $P_1 = 8$ и $P_2 = 10$, а функция затрат $C = x^2 + xy + y^2$. Тогда, при $x_1 = x,\ x_2 = y$ прибыль является функцией двух переменных:

$$\Pi(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Условия экстремума приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 8, \\ x + 2y = 10, \end{cases}$$

решение которой определяет точку M(2, 4).

Поскольку матрица Гессе в точке M имеет вид $H(M) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $\delta_1 = -2;\ \delta_2 = 3 > 0$, то найденная точка определяет максимум функции прибыли, который равен $\Pi_{\max} = 28$.

5.2. Максимизация прибыли производства однородной продукции

Функция прибыли обычно вычисляется по формуле

$$\Pi(K,L) = PF(K,L) - WL - RK,$$

где $F(K,L)$ - производственная функция, P - цена продукции, W и R - соответственно, факторные цены на труд и капитальные затраты, L и K - соответственно, затраты трудовых ресурсов и капитала. Рассмотрим две задачи, связанные с определением максимума прибыли.

1. Точка (K_0, L_0) называется *оптимальным планом*, если в ней функция прибыли $\Pi(K,L)$ принимает максимальное значение. Найти предельную норму замещения производственной функции F при оптимальном плане.

В точке экстремума первые производные функции прибыли $\Pi(K,L)$ равны нулю, откуда имеем систему двух уравнений:

$$PF'_K(K_0, L_0) - R = 0, \; PF'_L(K_0, L_0) - W = 0.$$

Предельная норма замещения первого ресурса вторым вычисляется по формуле $\mu = -F'_L / F'_K$, откуда при оптимальном плане получаем: $\mu = -W/R$.

2. Максимизация функции прибыли. Найти оптимальный план и максимум функции прибыли $\Pi(K,L)$, если $F(K,L) = 2(KL)^{1/3}$.

Таким образом, функция прибыли в данном случае имеет вид

$$\Pi(K,L) = 2P(KL)^{1/3} - WL - RK.$$

Условия экстремума приводят к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно координат K_0 и L_0 оптимального плана:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} P L_0^{1/3} K_0^{-2/3} = R, \\ \dfrac{2}{3} P L_0^{-2/3} K_0^{1/3} = W. \end{cases}$$

Отсюда получаем координаты оптимального плана:

$$K_0 = (2P/3)^3 / R^2 W, \;\; L_0 = (2P/3)^3 / RW^2.$$

Подстановка этих величин в функцию прибыли дает ее максимум:

$$\Pi_{\max} = (2P/3)^3 / RW.$$

6. Примеры решения заданий

Задание 1

Исследовать функцию $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$ на экстремум.

Решение:

Найдем частные производные исследуемой функции: $z'_x = 15 - 4x - y$, $z'_y = -x - 4y$.

Необходимые условия экстремума: $\begin{cases} 15 - 4x - y = 0, \\ -x - 4y = 0. \end{cases}$

Система уравнений имеет единственное решение $x = 4;\ y = -1$, а функция z – единственную стационарную точку $M(4;-1)$.

Найдем производные второго порядка: $z''_{xx} = -4;\ z''_{xy} = -1;\ z''_{yy} = -4$.

Составим матрицу Гессе в общем виде:

$$H = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы Гессе являются постоянными величинами, значит, для точки $M(4;-1)$ она имеет тот же вид: $H(M) = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Найдем ее угловые миноры: $\delta_1 = -4;\ \delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15$.

Т.к. $\delta_1 < 0;\ \delta_2 > 0$, то в точке M максимум функции z:

$z_{\max} = 1 + 15 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 - 4 \cdot (-1) - 2(-1)^2 = 31.$

Ответ: $z_{\max} = 31$.

Задание 2

Исследовать функцию $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$ на экстремум.

Решение:

Найдем частные производные исследуемой функции: $u'_x = 2x - y + 1$, $u'_y = 2y - x$ и $u'_z = 2z - 2$.

Необходимые условия экстремума: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2y - x = 0, \\ 2z - 2 = 0. \end{cases}$

Система уравнений имеет единственное решение $x = -\frac{2}{3};\ y = -\frac{1}{3};\ z = 1$, а функция u – единственную стационарную точку $M(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1)$.

Для составления матрицы Гессе найдем производные второго порядка: $u''_{xx}=2;\ u''_{xy}=-1;\ u''_{xz}=0;\ u''_{yy}=2;\ u''_{yz}=0;\ u''_{zz}=2$.

Матрица Гессе в общем виде: $H=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Для стационарной точки: $H\left(M\right)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

$$\delta_1=2;\ \ \delta_2=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3;\ \ \delta_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=6.$$

Т.к. все угловые миноры положительны, значит, в точке M минимум функции u:

$$u_{\min}=\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+1^2-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}.$$

Ответ: $u_{\min}=-\dfrac{4}{3}$.

Задание 3

Найти условный экстремум функции $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$ при условии $F: x+y+3=0$.

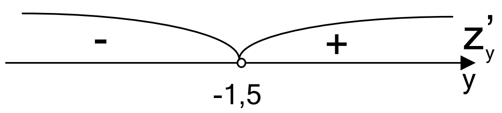
Решение:

Выразим из условия F $x=-y-3$ и подставим в функцию $z=\left(-y-3\right)^2+y^2-\left(-y-3\right)y+\left(-y-3\right)+y-4=3y^3+9y+2$.

Функция z стала функцией одной переменной y. Исследуем ее на экстремум. Найдем производную: $z'_y=6y+9$.

Определим критическую точку: $6y+9=0\Rightarrow y_{кр}=-1{,}5$.

Исследуем знак производной слева и справа от критической точки: $z'_y\left(-2\right)<0;\ \ z'_y\left(0\right)>0$.



Т.к. знак производной меняется с - на +, то в исследуемой точке имеется минимум. Если $y=-1{,}5$, то $x=-\left(-1{,}5\right)-3=-1{,}5$.

$$z_{\min}=z\left(-1{,}5;-1{,}5\right)=\left(-1{,}5\right)^2+\left(-1{,}5\right)^2-1{,}5\cdot1{,}5-1{,}5-1{,}5-4=-4{,}75.$$

Ответ: $z_{\min}=-4{,}75$.

Задание 4

Исследовать на экстремум функцию $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$ методом Лагранжа.

Решение:

Запишем условие в виде $x^2 + y^2 - 5 = 0$ и составим функцию Лагранжа:

$L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 5\right)$.

Найдем частные производные функции Лагранжа и приравняем их нулю, получим систему:

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0; \\ L'_x = 2 + 2\lambda y = 0; \\ L'_x = x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Выразим из первых двух уравнений x и y через λ: $x = -\dfrac{1}{2\lambda}$; $y = -\dfrac{1}{\lambda}$.

Подставим в третье уравнение: $\left(-\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 - 5 = 0$ или $\dfrac{5}{4\lambda^2} = 5$, откуда получим $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}, \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$. При первом значении получим $x_1 = -1,\ y_1 = -2$; при втором значении найдем $x_2 = 1,\ y_2 = 2$.

Найдем $L''_{xx} = 2\lambda,\ L''_{xy} = 0,\ L''_{yy} = 2\lambda$.

Составим $d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}(dy)^2$.

В первом случае $\left(\lambda_1 = \dfrac{1}{2},\ x_1 = -1,\ y_1 = -2\right)$ при любых dx и dy дифференциал второго порядка $d^2L = (dx)^2 + (dy)^2$ положителен, следовательно, в точке $x_1 = -1,\ y_1 = -2$ имеется минимум $z_{\min} = -1 + 2\cdot(-2) = -5$.

Во втором случае $\left(\lambda_2 = -\dfrac{1}{2},\ x_2 = 1,\ y_2 = 2\right)$ при любых dx и dy дифференциал второго порядка $d^2L = -(dx)^2 - (dy)^2$ отрицателен, следовательно, во второй точке $x_2 = 1,\ y_2 = 2$ имеется максимум и $z_{\max} = 1 + 2\cdot 2 = 5$.

Ответ: $z_{\min} = -5$; $z_{\max} = 5$.

Контрольная работа по математическому анализу № 2

Вариант 1

Задание 1

Исследовать функцию $z = 5x^2 + 6xy + 2y^2 - 2x - 2y + 10$ на экстремум.

Задание 2

Исследовать функцию $u = 5x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 4xz - 3yz - 2x + y - z + 9$ на экстремум.

Задание 3

Найти условный экстремум функции $z = 3 + (x-4)^2 + (y-6)^2$ при условии $F: x = 5y$.

Задание 4

Исследовать на экстремум функцию $z = 3x + 4y - 7$ при условии $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ методом Лагранжа.

Вариант 2

Задание 1

Исследовать функцию $z = 4x^2 + 3xy - y^2 + x - 9y + 5$на экстремум.

Задание 2

Исследовать функцию $u = -3x^2 - 2y^2 - 5z^2 + 4xy + 2xz + 3yz - 4x - 2y + 7z + 8$ на экстремум.

Задание 3

Найти условный экстремум функции $z = 10 - (x-4)^2 - (y-3)^2$ при условии $F: y = 2x$.

Задание 4

Исследовать на экстремум функцию $z = -3x + 4y - 5$ при условии $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$ методом Лагранжа.

Контрольная работа по математическому анализу № 2

Вариант 3

Задание 1

Исследовать функцию $z = -3x^2 + 7xy - 5y^2 - 2x + 6y + 32$ на экстремум.

Задание 2

Исследовать функцию $u = -2x^2 - y^2 + 2z^2 - 2xy + 3xz - 2yz - 4x + 8y + z + 4$ на экстремум.

Задание 3

Найти условный экстремум функции $z = 8 + (x+2)^2 + (y-4)^2$ при условии $F: x = -3y$.

Задание 4

Исследовать на экстремум функцию $z = 3x - 4y - 3$ при условии $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ методом Лагранжа.

Вариант 4

Задание 1

Исследовать функцию $z = 2x^2 + 6xy + 3y^2 - 6y + 7$ на экстремум.

Задание 2

Исследовать функцию на экстремум
$u = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 5xy - 2xz - 5yz + 15y + 6z + 7$.

Задание 3

Найти условный экстремум функции $z = 4 + (x-3)^2 + (y-5)^2$ при условии $F: y = -4x$.

Задание 4

Исследовать на экстремум функцию $z = -3x - 4y + 5$ при условии $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ методом Лагранжа.

Контрольная работа по математическому анализу № 2

Вариант 5

Задание 1

Исследовать функцию на экстремум $z = 9x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 4y + 18$.

Задание 2

Исследовать функцию $u = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy - 6xz - 2yz - 2x - 22y + 18z + 5$ на экстремум.

Задание 3

Найти условный экстремум функции $z = 9 - (x-3)^2 - (y+1)^2$ при условии $F: x = 2y$.

Задание 4

Исследовать на экстремум функцию $z = 4x + 3y - 2$ при условии $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ методом Лагранжа.

Вариант 6

Задание 1

Исследовать функцию $z = -x^2 + 2xy - 5y^2 + 4x + 4y + 8$ на экстремум.

Задание 2

Исследовать функцию $u = 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 3xz - 2yz - 9x + 2y - 10z + 6$ на экстремум.

Задание 3

Найти условный экстремум функции $z = 6 + (x-4)^2 + (y-2)^2$ при условии $F: y = 3x$.

Задание 4

Исследовать на экстремум функцию $z = -4x + 3y + 3$ при условии $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$ методом Лагранжа.

Контрольная работа по математическому анализу № 2

Вариант 7

Задание 1

Исследовать функцию $z = x^2 - 4xy + y^2 + 8x - 10y + 33$ на экстремум.

Задание 2

Исследовать функцию $u = -5x^2 - 3y^2 - 2z^2 + 4xy + 2xz + 3yz + 2x + y - z + 9$ на экстремум.

Задание 3

Найти условный экстремум функции $z = 2 + (x-4)^2 + (y-6)^2$ при условии $F: y = -5x$.

Задание 4

Исследовать на экстремум функцию $z = 4x - 3y + 5$ при условии $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$ методом Лагранжа.

Вариант 8

Задание 1

Исследовать функцию $z = 2x^2 + 3xy + 2y^2 - 2x - 5y + 10$ на экстремум.

Задание 2

Исследовать функцию $u = -4x^2 - y^2 + 2z^2 - 3xy + 2xz - 2yz - 5x + 8y + 6z + 3$ на экстремум.

Задание 3

Найти условный экстремум функции $z = 12 - (x-2)^2 - (y-4)^2$ при условии $F: x = 3y$.

Задание 4

Исследовать на экстремум функцию $z = -4x - 3y + 6$ при условии $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$ методом Лагранжа.

Контрольная работа по математическому анализу № 2

Вариант 9

Задание 1

Исследовать функцию $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 10x + 2y + 10$ на экстремум.

Задание 2

Исследовать функцию $u = 4x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 4xy - 2xz - 4yz - 10x - 4y - 2z + 9$ на экстремум.

Задание 3

Найти условный экстремум функции $z = 29 - (x-3)^2 - (y-4)^2$ при условии $F: y = -2x$.

Задание 4

Исследовать на экстремум функцию $z = 5x + 12y - 4$ при условии $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ методом Лагранжа.

Вариант 10

Задание 1

Исследовать функцию $z = -4x^2 + 3xy + 2y^2 + 7x - 18y + 25$ на экстремум.

Задание 2

Исследовать функцию $u = -x^2 - 5y^2 - 3z^2 + xy - 2xz + 2yz + 11x + 2y + 18z + 10$ на экстремум.

Задание 3

Найти условный экстремум функции $z = 3 + (x-5)^2 + (y-3)^2$ при условии $F: x = -4y$.

Задание 4

Исследовать на экстремум функцию $z = -5x + 12y - 3$ при условии $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$ методом Лагранжа.

Библиографический список

1. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов по эконом. специальностям / под ред. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд. – М. : ЮНИТИ, 2008. - 478 с. : ил.
2. Красс, М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2007. – 464 с.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие для втузов: в 2 т. Т. 1 / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2009. – 415 с.: ил.
4. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – 7-е изд., испр. - М.: ОНИКС: Мир и образование, 2008. – 368 с.: ил.

СОДЕРЖАНИЕ

Подписано в печать 6.03.2014. Усл. печ. л. 1,75 Тираж экз.
Печать офсетная. Бумага писчая. Заказ №____.

Отпечатано: РИО ВоГУ, г. Вологда, ул. Ленина, 15