Министерство образования и науки Российской Федерации
Вологодский государственный университет

Кафедра теории и проектирования машин и механизмов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания, задачи и вопросы
для подготовки студентов к экзамену и тестированию по кинематике

Факультет производственного менеджмента и инновационных технологий
Направление подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
Профиль «Машины и оборудование лесного комплекса»

Вологда
2014

УДК 531:618.3

Теоретическая механика: методические указания задачи и вопросы для подготовки студентов к экзамену и тестированию по кинематике.- Вологда: ВоГУ, 2014.- 43с.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями учебной программы курса теоретической механики и предназначены для организации самостоятельной работы студентов при подготовке к экзамену по предмету. Указания содержат теорию, примеры решения задач и набор коротких задач и вопросов по всем темам раздела кинематики курса теоретической механики. Приведены характерные задачи из сборника Мещерского И.В. для самостоятельного решения.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Составитель Ю.В. Сараев, канд. физ.-мат. наук, доцент

Рецензент Ю.Р. Осипов, д-р техн. наук, профессор каф. ТПММ

ВВЕДЕНИЕ

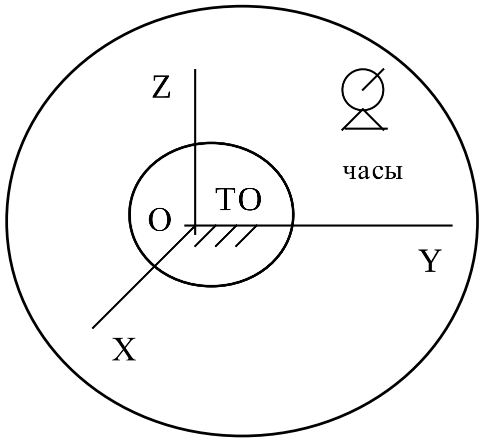
Изучение курса теоретической механики предполагает глубокое усвоение основ теории и приобретение навыков в решении задач. Эффективность обучения при этом определяется правильной организацией и постоянным контролем внеаудиторной самостоятельной работы студентов. Самостоятельное изучение курса теоретической механики состоит в усвоении теоретического материала с помощью учебников и конспектов. В регулярной подготовке к семинарским занятиям (решение задач, задаваемых на дом) и, наконец, в выполнении курсовых домашних заданий. В силу ряда причин (многочисленность групп и недостаток времени) преподавателю трудно организовать непрерывный контроль за работой студентов, поэтому важное значение имеет возможность осуществления самоконтроля студента при изучении курса. Для этих целей предлагается перечень кратких “качественных” вопросов по основным разделам курса теоретической механики и набор кратких “количественных” задач, которые позволяют студенту самостоятельно оценить свои знания. Конспективно изложена теория вопроса.

Вопросы и задачи подбирались так, чтобы проверить усвоение, а также тренировать развитие умений и навыков по наиболее важным узловым темам курса. Кроме того, при формулировке вопросов и разработке заданий авторы руководствовались стремлением подготовить студентов к самостоятельному решению домашних задач по сборнику И. В. Мещерского и к выполнению курсовых заданий по сборнику А.А. Яблонского.

Предлагаемый опросный материал может быть использован для рубежного контроля знаний студентов по основным разделам теоретической механики и при составлении вопросов для тестового контроля усвоения студентами курса.

1. Основные понятия и определения

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение тел без учета причин (сил), вызвавших это движение. Кинематику еще называют геометрией движения.



Движение в кинематике изучается в некоторой системе отсчета (СО). Если СО инерциальная (условно неподвижная), то движение называется абсолютным, в противном случае - относительным.

В кинематике используются те же модели тел, что и в статике: материальная точка, абсолютно твердое тело, сплошная среда.

В кинематике решаются <u>две основные задачи:</u>

- отыскание способов задания движения тела;
- расчет кинематических характеристик движущегося тела (траектория, скорость, ускорение).

2. Кинематика точки. Способы задания движения точки

Движение точки (тела) считается заданным, если заданы таблицы, графики, функции, с помощью которых в любой момент времени может быть определено положение точки (тела) в пространстве.

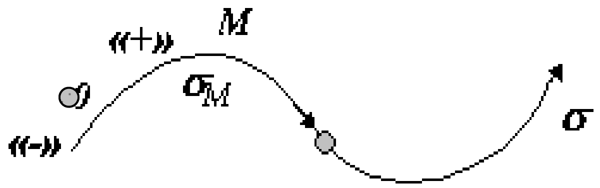
Существуют три способа задания движения точки: естественный, векторный и координатный.

Естественный способ

Этот способ используется, когда известна траектория точки.

Траекторией называется линия, вдоль которой движется точка.

- ***закон движения точки***



$\sigma_м = \sigma_м(t)$ – закон движения точки;

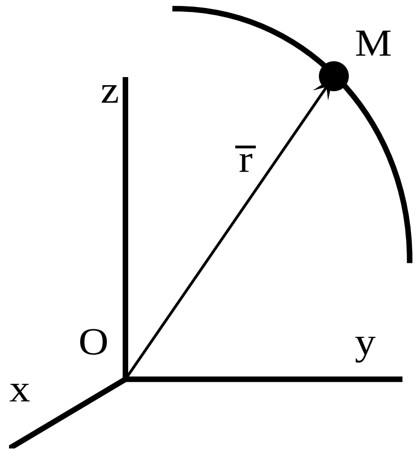
$\sigma_м$ – криволинейная координата точки.

Векторный способ

Этот способ используется в теоретических построениях по причине компактности записи.

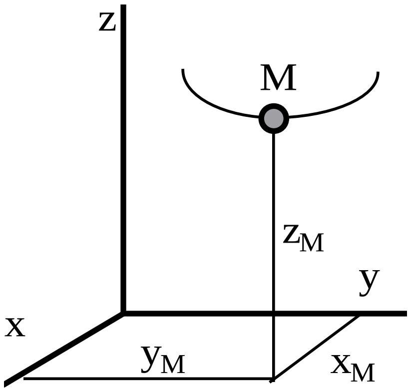
$\bar{r}_м = \bar{r}_м(t)$ - закон движения точки;

$\bar{r}_м$ – радиус – вектор точки.



Координатный способ

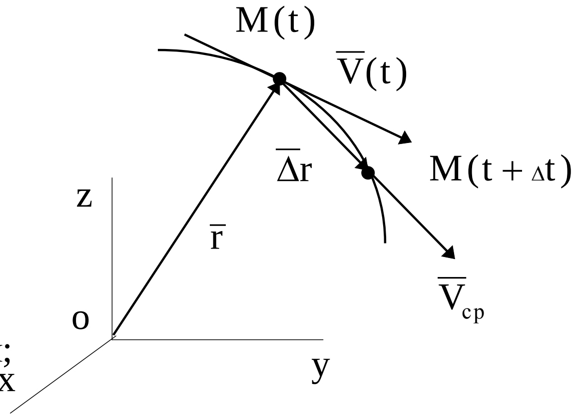
Наиболее часто используется в практических расчетах.



$$\left.\begin{aligned} x_м &= x_м(t) \\ y_м &= y_м(t) \\ z_м &= z_м(t) \end{aligned}\right\} \text{– закон движения точки;}$$

$(x_м; y_м; z_м)$ – координаты точки.

3. Скорость и ускорение точки



Скорость - величина векторная, которая характеризует быстроту и направление движения точки.

$\Delta\bar{r}$ - вектор перемещения точки;

$(\bar{V})_{ср} = \dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ – вектор средней скорости;

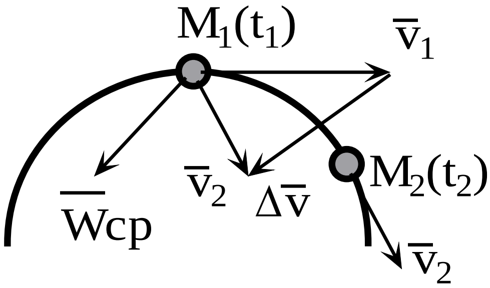
$$(\bar{V})_{ср} \uparrow\uparrow \Delta\bar{r};$$

$$\bar{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} \text{ – мгновенная скорость}$$

Величина скорости обозначается так $|\bar{V}| = V$. Размерность скорости в СИ [V]=м/с. Вектор $\bar{V}$ направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

Ускорение - векторная величина, которая характеризует быстроту изменения вектора скорости со временем.

Определяется ускорение так:



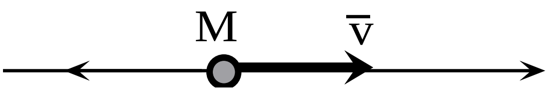
$\bar{W}_{ср} = \dfrac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\bar{V}}{\Delta t}$ - вектор среднего ускорения; $\bar{W}_{ср} \uparrow\uparrow \Delta\bar{V}$.

$$\bar{W} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \dot{\bar{V}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}} \text{ – вектор мгновенного ускорения.}$$

Величина ускорения обозначается так $\bar{W} = |W|$, размерность в СИ [W]=м/с^2.

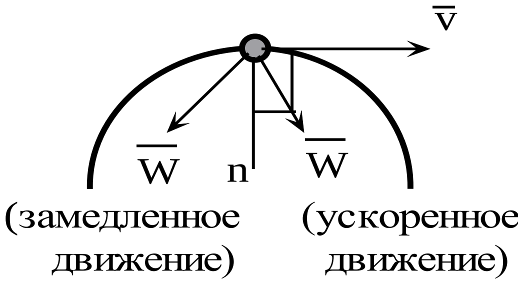
О направлении ускорения:

- прямолинейное движение точки.



$\bar{W} \downarrow\uparrow \bar{V}$ (замедленное движение) $\bar{W} \uparrow\uparrow \bar{V}$ (ускоренное движение)

- плоское криволинейное движение точки.



$\overline{W}$ - направлен в сторону вогнутости траектории.

4. Расчет скорости и ускорения точки при координатном задании движения

Движение точки в декартовых осях координат задается функциями:

$$x = x\,(t); \qquad y = y\,(t); \qquad z = z\,(t).$$

Вектор скорости точки рассчитывается по формулам:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z};$$

$$V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};$$

$$\cos(\overline{V}, \hat{x}) = \frac{V_x}{V}; \quad \cos(\overline{V}, \hat{y}) = \frac{V_y}{V}; \quad \cos(\overline{V}, \hat{z}) = \frac{V_z}{V}.$$

Вектор ускорения точки рассчитывается по формулам:

$$W_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad W_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad W_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z};$$

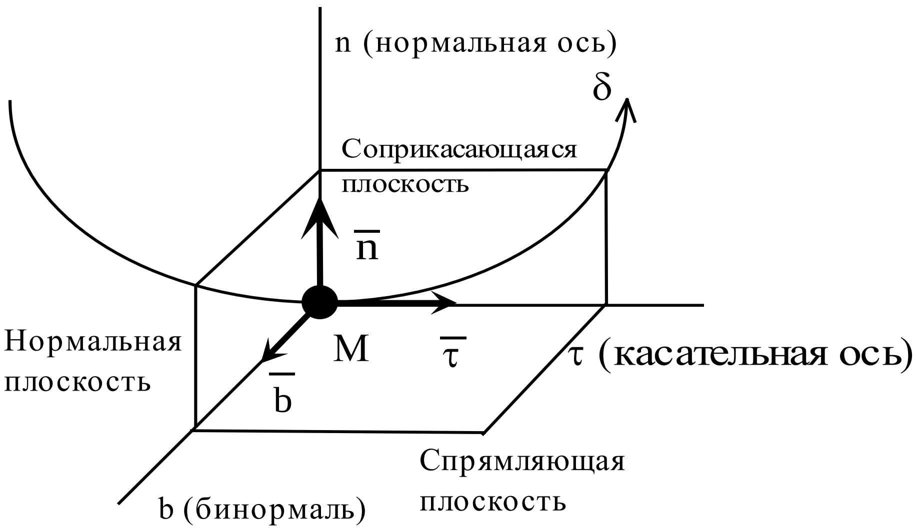
$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

$$\cos(\overline{W}, \hat{x}) = \frac{W_x}{W}; \quad \cos(\overline{W}, \hat{y}) = \frac{W_y}{W}; \quad \cos(\overline{W}, \hat{z}) = \frac{W_z}{W}.$$

Для расчета траектории точки необходимо исключить время из уравнений движения точки.

5. Расчет скорости и ускорения точки при естественном задании движения

Для изучения движения точки, траектория которой известна, вводятся криволинейная координатная линия вдоль траектории и три взаимно - перпендикулярных оси в соответствии со схемой



Оси (τ, n, b) называются <u>естественными осями траектории</u>. Центр их всегда находится в точке, движение которой исследуется. Оси (τ, n, b) друг относительно друга в пространстве расположены так же, как и оси (x, y, z) в правосторонней системе координат. Векторы $(\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b})$ - единичные векторы или орты естественных осей. Очевидно, что

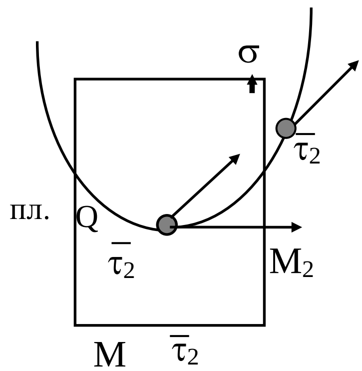
$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(t); \quad \bar{n} = \bar{n}(t); \quad \bar{b} = \bar{b}(t) .$$

Соприкасающаяся плоскость строится по следующему правилу:

- рассматриваются два последовательных положения точки на траектории;
- изображаются единичные векторы касательных осей $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$;
- в исходной точке на векторах $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ строится плоскость Q;

Соприкасающаяся плоскость в точке

$$M_1 = \lim_{M_2 \to M_1} (\text{пл.}Q)$$



Нормальная плоскость строится перпендикулярно касательной оси.

Спрямляющая плоскость строится перпендикулярно нормальной оси.

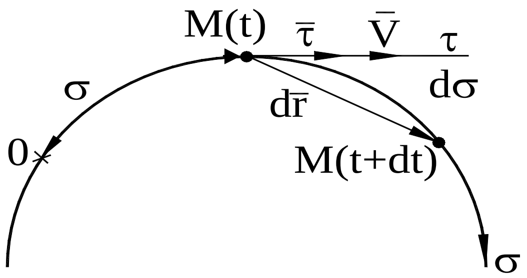
При исследовании движения точки в естественных осях векторы скорости и ускорения точки раскладываются на составляющие вдоль этих осей.

Разложение вектора скорости

$$\overline{V} = V_\tau \overline{\tau} + V_n \overline{n} + V_b \overline{b}$$

Из определения вектора скорости следует

$$V_n \equiv 0; \quad V_b \equiv 0; \qquad \overline{V} = V_\tau \overline{\tau}$$



Закон движения

$$\sigma = \sigma(t)$$

$$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}d\sigma}{dtd\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}\frac{d\overline{r}}{d\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}\overline{\tau}$$

Отсюда $$V_\tau = \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma}$$

Разложение вектора ускорения

$$\overline{W} = W_\tau \overline{\tau} + W_n \overline{n} + W_b \overline{b}$$

Из определений вектора ускорения и соприкасающейся плоскости следует, что вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости, т.е. $W_b \equiv 0$, следовательно

$$\overline{W} = W_\tau \overline{\tau} + W_n \overline{n}$$

По определению

$$\overline{W} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d(V_\tau \overline{\tau})}{dt} = \frac{dV_\tau \overline{\tau}}{dt} + \frac{V_\tau d\overline{\tau}}{dt}$$

Можно показать, что выполняется

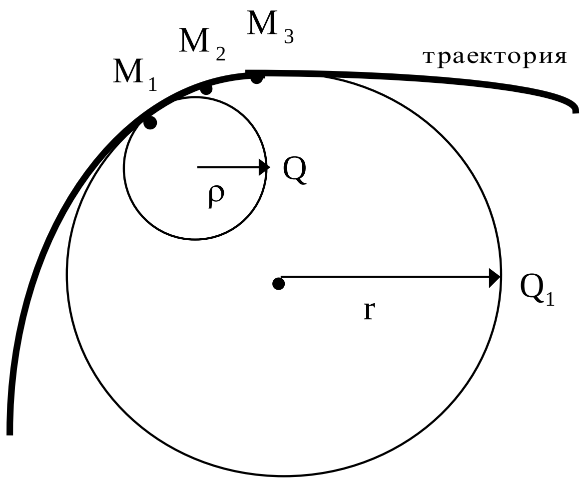
$$\frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{V_\tau \overline{n}}{\rho}, \quad \text{тогда } \overline{W} = \frac{dV_\tau \overline{\tau}}{dt} + \frac{V_\tau^2 \overline{n}}{\rho} = \frac{dV_\tau \overline{\tau}}{dt} + \frac{V^2 \overline{n}}{\rho}$$

$$W_n = \frac{V^2}{\rho}; \quad \overline{W}_n = \frac{V^2 \overline{n}}{\rho}; \quad W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}; \quad \overline{W}_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}\overline{\tau};$$

$$\overline{W} = \overline{W}_\tau + \overline{W}_n$$

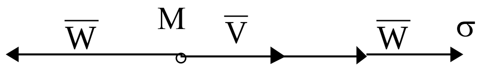
Величина ρ - называется **радиусом** кривизны траектории в данной точке. Это радиус окружности, которая строится так: на траектории выбираются три близкие точки M_1, M_2, M_3 через которые проводится окружность Q_1'. Тогда

$$\text{окр. } Q = \lim_{M_2;M_3 \to M_1} (\text{окр.} Q_1').$$



Частные случаи

а) прямолинейное движение точки.



$\overline{W}$ (замедленное движение) $\overline{W}$ (ускоренное движение)

$$\rho = \infty; \ W_n = \frac{V^2}{\rho} = 0; \ \ W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2} = \ddot{\sigma}.$$

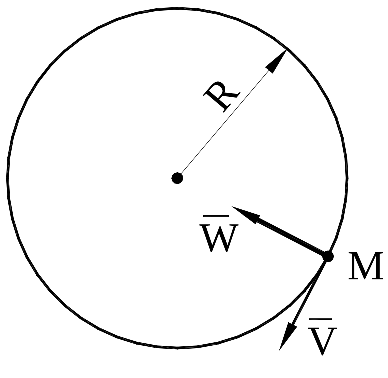
Ускорение состоит из касательной составляющей, а скорость изменяется только по величине. Отсюда следует, касательная составляющая вектора ускорения (ее модуль) характеризует быстроту изменения величины вектора скорости.

б) движение по окружности (V=const)

$$W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = 0;$$

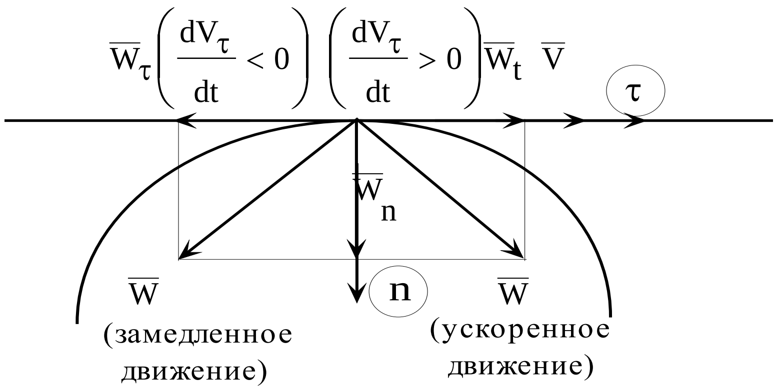
$$\rho = R; \qquad V_\tau = V = \text{const};$$

$$W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{R}.$$



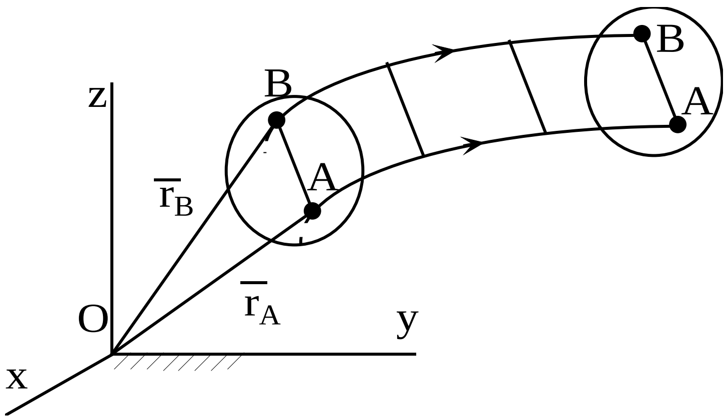
Ускорение состоит из нормальной составляющей, а скорость изменяется только по направлению. Это означает, что нормальная составляющая вектора ускорения характеризует быстроту изменения направления вектора скорости.

В общем случае имеем



6. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, перемещается параллельно самой себе.



Из определения следует, что при поступательном движении все точки твердого тела движутся по одинаковым траекториям, сдвинутым относительно друг друга. Следовательно, для задания поступательного движения тела достаточно задать движение одной его точки, например, точки А:

$$\begin{cases} x_A = x_A(t); \\ y_A = y_A(t); \\ z_A = z_A(t). \end{cases}$$ - уравнения поступательного движения тела.

Из рисунка следует $\quad \bar{r}_A = \bar{r}_B + \overline{AB} \qquad (\overline{AB} = \overline{const})$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt}; \qquad \overline{V}_B = \overline{V}_A$$

$$\begin{array}{ccc} \| & \| & \| \\ \overline{V}_B & \overline{V}_A & 0 \end{array}$$

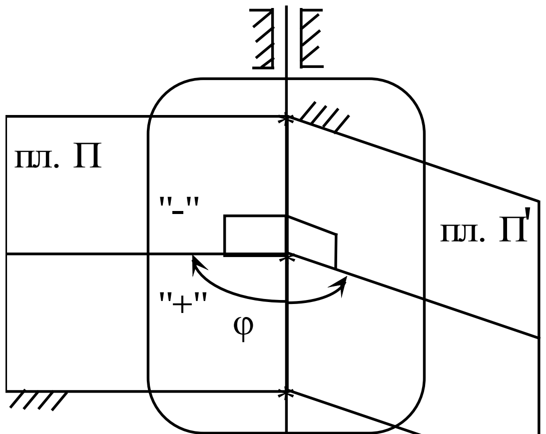
Дифференцируя соотношение для скоростей по времени, найдем:

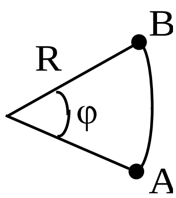
$$\frac{d\overline{V}_B}{dt} = \frac{d\overline{V}_A}{dt}; \qquad \overline{W}_B = \overline{W}_A.$$

Полученные результаты означают, что при поступательном движении тела все его точки движутся по одинаковым траекториям, с одинаковыми скоростями и ускорениями. Следовательно, при поступательном движении твердое тело можно рассматривать как материальную точку.

7. Вращательное движение твердого тела. Основные понятия и определения

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором, по крайней мере, две его точки неподвижны.





$\angle\varphi = \cup AB / R$, рад

$360^o = 2\pi$ рад

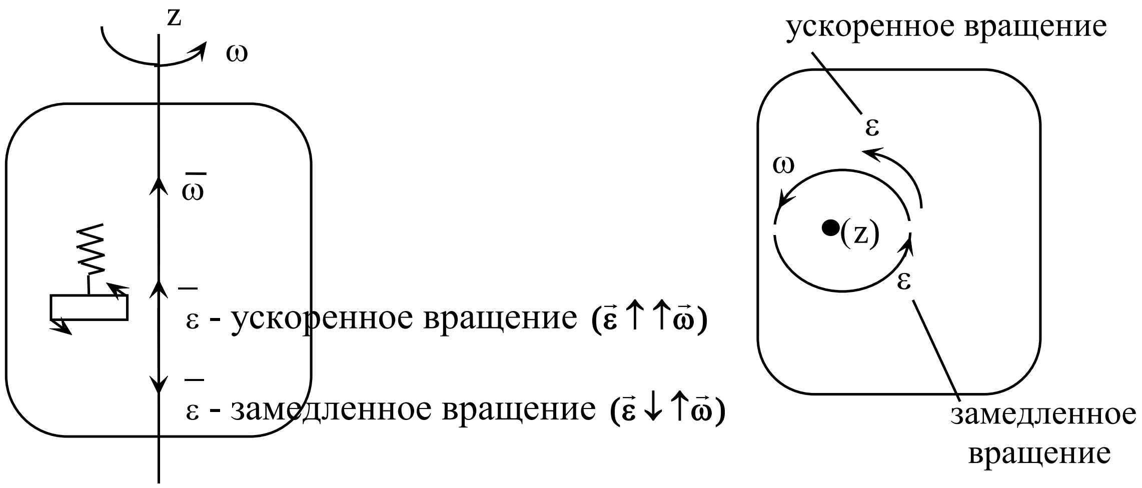
1 рад $\approx 57^o$

Через неподвижные точки проводится ось - **ось вращения**. Вдоль нее направляется числовая ось, обычно z. Для задания вращательного движения вводятся две полуплоскости: пл. П - неподвижная; пл. П’ - вращается вместе с телом. Угол φ между этими полуплоскостями называется **углом поворота**. Он имеет знак и измеряется в **радианах**:

$\varphi = \varphi(t)$ - закон вращательного движения.

Быстрота вращения тела количественно задается **угловой скоростью вращения,** которая определяется так:

$$\omega_{Zср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}; \qquad \omega_Z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$



Чтобы в определении угловой скорости учесть и направление вращения тела вводится понятие **вектора угловой скорости**. Он обозначается $\overline{\omega}$, расположен на оси вращения и направлен по правилу буравчика. Его величина и проекция на ось z определяются так

$$\text{пр}_z\overline{\omega} = \omega_z = \dot{\varphi}; \quad |\overline{\omega}| = \omega; \quad [\omega] = \text{рад}/\text{с} = \text{с}^{-1}.$$

Быстрота изменения угловой скорости со временем характеризуется таким понятием как **угловое ускорение**. Определяется оно так:

$$\varepsilon_{Zер} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}; \quad \varepsilon_z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}.$$

В дополнение к вектору $\overline{\omega}$ вводится вектор углового ускорения. Он обозначается $\overline{\varepsilon}$, располагается на оси вращения и направлен в сторону $\overline{\omega}$ при ускоренном вращении и в обратную сторону - при замедленном.

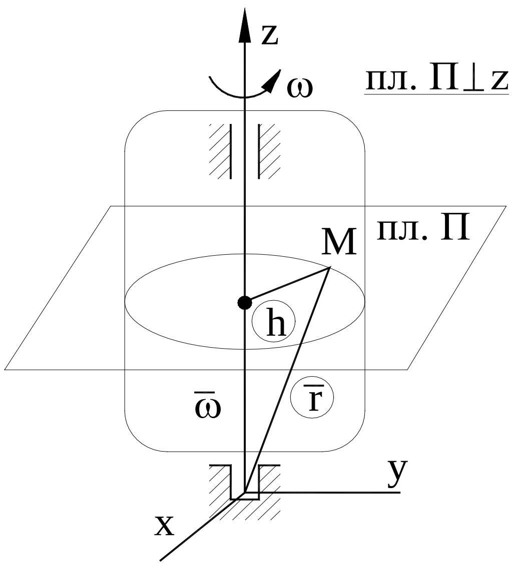
Его величина и проекция на ось z определяются так:

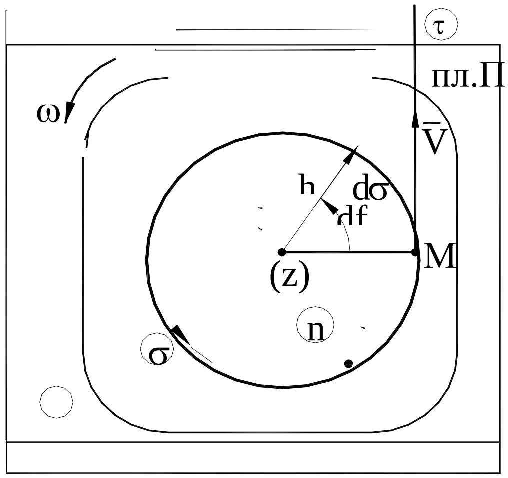
$$\text{пр}_z\overline{\varepsilon} = \varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}; \quad |\overline{\varepsilon}| = \varepsilon; \quad [\varepsilon] = \text{рад}/\text{с}^2 = 1/\text{с}^2.$$

Векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ - скользящие векторы, они не имеют точек приложения.

8. Расчет скоростей и ускорений точек вращающегося тела

При вращении твердого тела его точки движутся по круговым траекториям в плоскостях, перпендикулярных оси вращения (пл.П).

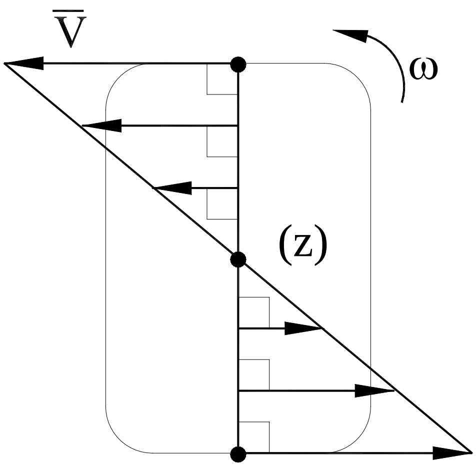


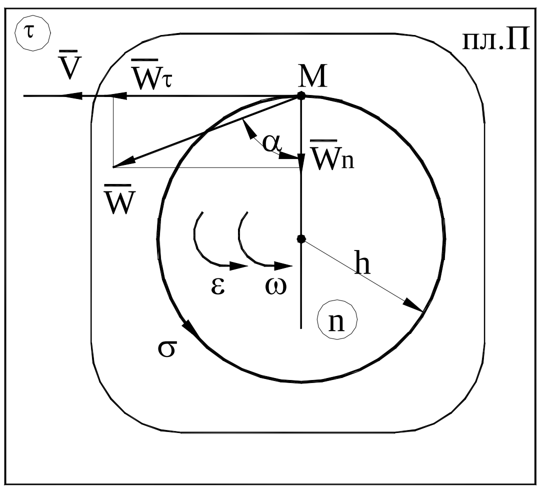


При выводе формулы скорости выбирается произвольная точка тела (т. М). Она движется по окружности радиуса h. Вводятся криволинейная координатная ось σ и касательная ось τ. Тогда можно записать

$$V_\tau = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{h \cdot d\varphi}{dt} = h\omega_z; \qquad V = h\omega.$$

Из этой формулы следует, что скорости точек вращающегося тела линейно увеличиваются при удалении от оси вращения.





Так как траекторией произвольной точки вращающегося тела является окружность радиусом h, то введя естественные оси траектории τ и n, можно для вектора ускорения точки записать:

$$\overline{W} = \overline{W}_\tau + \overline{W}_n = \frac{dV_\tau \overline{\tau}}{dt} + \frac{V^2 \overline{n}}{\rho}; \quad V_\tau = h\omega_z; \quad \rho = h.$$

Тогда составляющие вектора ускорения будут рассчитываться по формулам:

$$W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \frac{d(h\omega)}{dt} = h\varepsilon_z; \qquad |W_\tau| = \varepsilon h.$$

$$W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{h^2\omega^2}{h} = h\omega^2; \qquad W_n = \omega^2 h.$$

О направлении векторов W_n и W_τ :

$\overline{W}_n$ - всегда направлен по радиусу к оси вращения.
W_τ - направлен перпендикулярно радиусу в сторону скорости при ускоренном вращении и в обратную, при замедленном вращении.

Величина и направление вектора ускорения точки рассчитываются по формулам

$$|W| = W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = \sqrt{h^2\varepsilon^2 + h^2\omega^4} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$tg\alpha = \frac{|W_\tau|}{W_n} = \frac{h\varepsilon}{h\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Из последних формул следует, что ускорения точек вращающегося тела по модулю линейно увеличиваются при удалении от оси вращения, а векторы ускорений точек в рассматриваемый момент времени наклонены к радиальному направлению под одним и тем же углом.

В теории вращательного движения твердого тела широко используются следующие наименования:

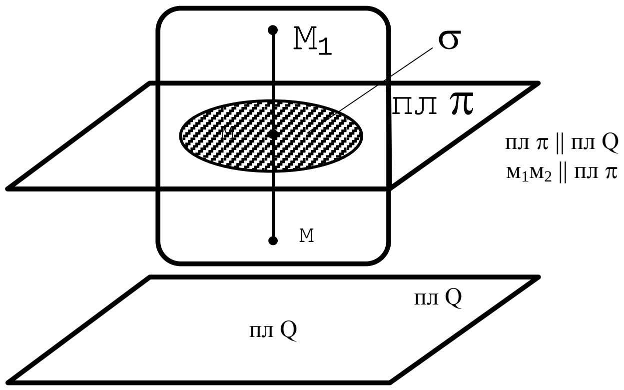
$\overline{W}_n \equiv \overline{W}_{oc}$ - осестремительное ускорение; $\overline{W}_\tau \equiv \overline{W}_{вр}$ - вращательное ускорение.

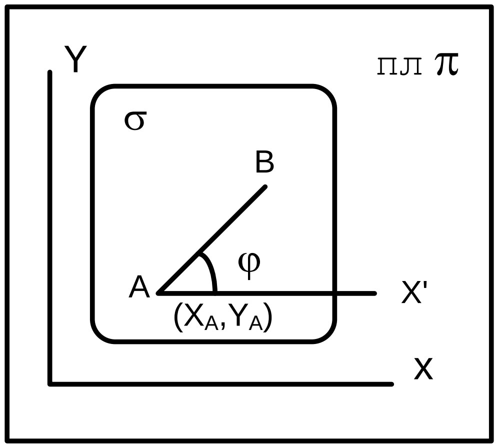
Легко показать, что для векторов скорости и ускорения точек вращающегося тела справедливы следующие векторные соотношения

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}; \qquad \overline{W} = \overline{W}_{вр} + \overline{W}_{oc} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{V}.$$

9. Плоское движение твердого тела. Основные понятия и определения

Плоским или плоскопараллельным движением твердого тела называется такое, при котором каждая его точка движется в плоскости параллельной некоторой заданной плоскости.





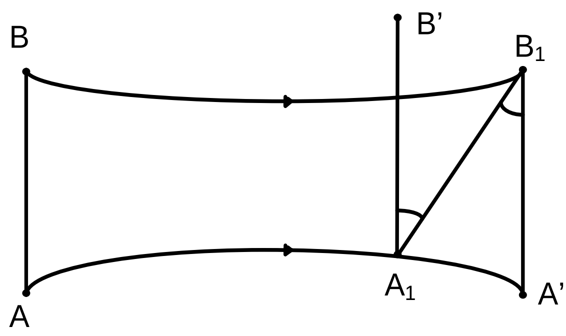
Из определения плоского движения следует, что отрезок M_1MM_2 совершает поступательное движение. Все точки тела, расположенные на нем, движутся так же, как и точка M, находящаяся в сечении σ. Ввиду произвольности точки M это означает, что плоское движение твердого тела полностью определяется движением точек сечения σ в плоскости П. В дальнейшем это движение и будет исследоваться.

При изучении плоского движения выделяется одна точка тела(обозначим буквой А), которая называется полюсом. (В практических расчетах за полюс выбирается точка, движение которой известно). Положение плоского сечения может быть однозначно задано тремя величинами (x_A, y_A, φ), При движении сечения σ они изменяются и можно записать

$$\begin{cases} x_A = x_A(t); \\ y_A = y_A(t); \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases}$$ - закон или уравнения плоского движения.

10. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное

В теории плоского движения важное место занимает теорема, согласно которой плоское движение тела в каждый момент времени может быть разложено на два простейших: поступательное движение вместе с точкой, выбранной за полюс, и вращательное движение вокруг полюса.



Справедливость данной теоремы и выводы из нее вытекающие можно пояснить с помощью следующих рассуждений.

Рассмотрим плоское движение простейшего тела - стержня AB. Пусть стержень переместился из положения AB в A_1B_1. Тогда, выбирая за полюс последовательно точки A и B, указанное перемещение может быть геометрически представлено так:

- <u>полюс т. A</u>

$$AB \Rightarrow A_1B_1 \Rightarrow \begin{cases} AB \Rightarrow A_1B' (\text{поступательное}) \\ \quad + \\ A_1B' \Rightarrow A_1B_1 (\text{вращательное}) \end{cases}$$

- <u>полюс т. B</u>

$$AB \Rightarrow A_1B_1 \Rightarrow \begin{cases} AB \Rightarrow A'B_1 (\text{поступательное}) \\ \quad + \\ A'B_1 \Rightarrow A_1B_1 (\text{вращательное}) \end{cases}$$

Из рисунка следует, что поступательная часть перемещения зависит от выбора полюса, а вращательная часть перемещения (угол поворота и направление вращения) не зависят от выбора полюса.

11. Расчет скоростей точек тела при плоском движении методом полюса

Рассматривается плоское движение твердого тела, которое заменяется движением сечения σ в осях XY. Выбирается за полюс точка A. Движение полюса считается заданным, в частности, задана скорость $\overline{V}_A$. Выбирается произвольная точка B. Для вывода формулы расчета скорости точки B поступают так.

Из рисунка можно записать

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}.$$

Это соотношение дифференцируется по времени

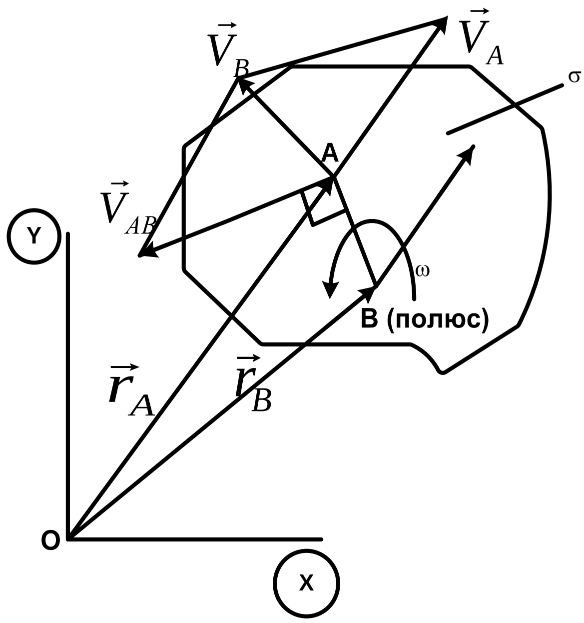
$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \frac{d\overline{AB}}{dt}.$$

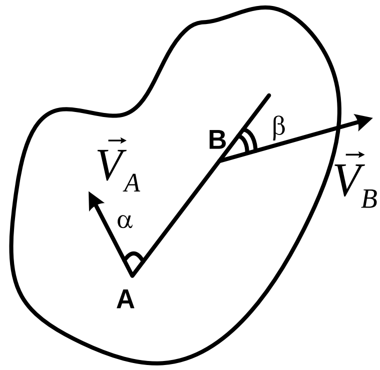
и вводятся обозначения

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{AB} \qquad (*)$$

Сопоставляя полученную формулу с результатами предыдущего параграфа, можно сделать вывод:

$\overline{V}_{AB}$ - вектор скорости точки В в относительном вращательном движении тела вокруг полюса.





Последнее означает, что если вращательная часть движения тела происходит со скоростью ω, то:

$$V_{AB} \perp AB - \text{в сторону вращения}; \qquad V_{AB} = \omega AB.$$

Теорема проекций скоростей

Проектируя выражение (*) на отрезок АВ, получим

$$\text{пр}_{AB}\overline{V}_B = \text{пр}_{AB}\overline{V}_A + \text{пр}_{AB}\overline{V}_{AB};$$

$$\overline{V}_{AB} \perp AB \Rightarrow \text{пр}_{AB}\overline{V}_{AB} = 0;$$

$$\text{пр}_{AB}\overline{V}_B = \text{пр}_{AB}\overline{V}_A.$$

Формулировка: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на отрезок их соединяющий равны между собой.

На практике данная теорема обычно используется в следующей форме записи

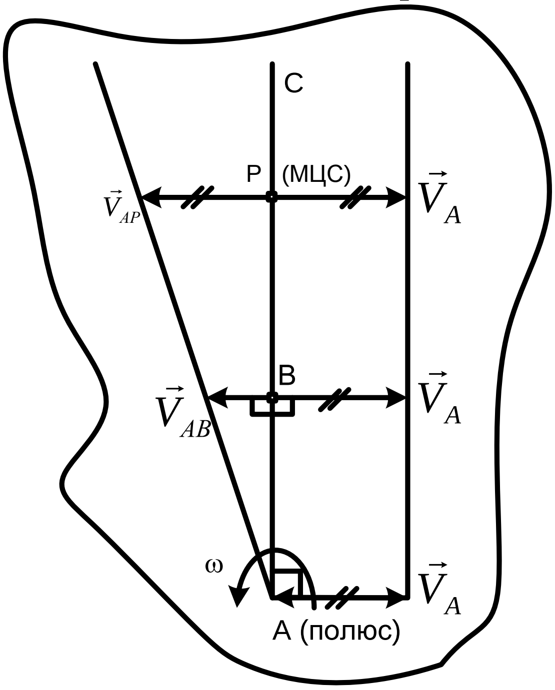
$$V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta$$

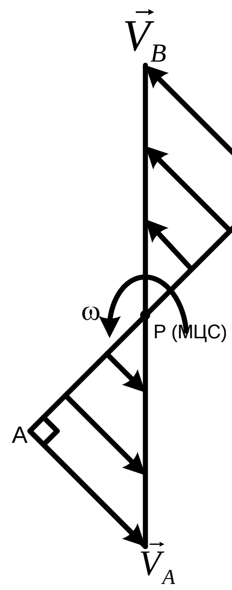
12. Мгновенный центр скоростей (МЦС)

Для практических расчетов скоростей точек тела при плоском движении очень важным является понятие мгновенного центра скоростей (МЦС). Определим его.

При любом плоском непоступательном движении тела существует точка, скорость которой в рассматриваемый момент времени равна нулю. Эта точка и называется МЦС.

Покажем, как эта точка строится, и какими свойствами она обладает.





Рассматривается положение фигуры в момент времени t. К вектору скорости полюса $\overline{V}_A$ под прямым углом, отсчитываемым в сторону вращения ω, строится отрезок AC. Для произвольной точки этого отрезка можно записать

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{AB}; \qquad V_B = V_A - V_{AB};$$

$$V_{AB} = \omega AB; \qquad V_B = V_A - \omega AB.$$

Перемещаясь вдоль AC от полюса можно попасть в точку P такую, что для нее будет выполняться

$$V_P = V_A - \omega AP = 0; \qquad AP = \frac{V_A}{\omega}.$$

Точка P является МЦС. Если теперь МЦС выбрать за полюс, то для любой другой точки фигуры можно записать

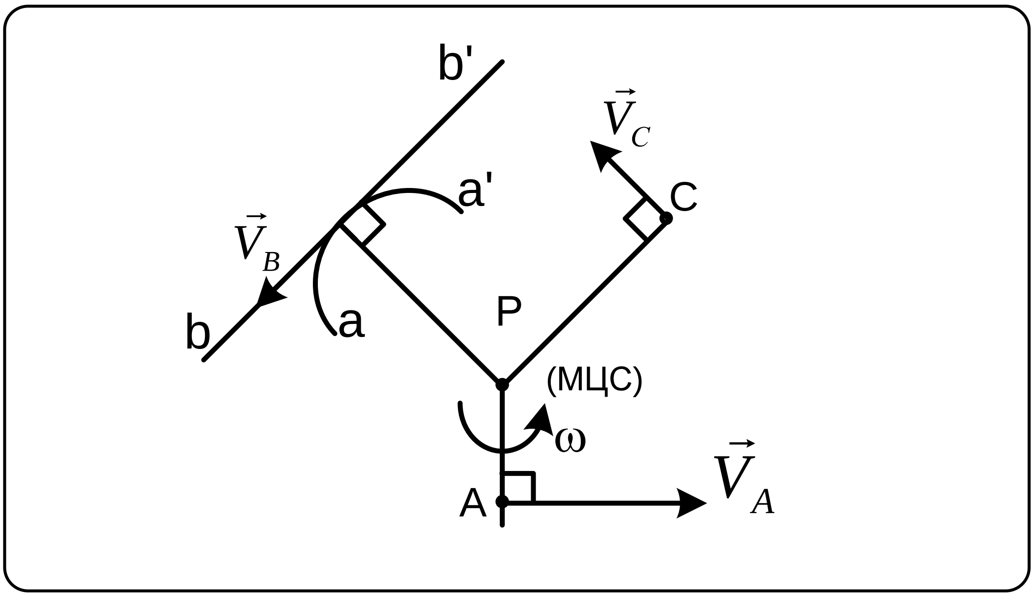
$$\overline{V}_B = \overline{V}_P + \overline{V}_{PB} = \overline{V}_{PB};$$

$$\overline{V}_B \perp PB; \qquad V_B = V_{PB} = \omega PB.$$

Вывод: МЦС обладает тем свойством, что в данный момент времени плоское движение тела можно рассматривать как мгновенно - вращательное вокруг оси, проходящей через МЦС. При этом скорости точек плоской фигуры направлены перпендикулярно отрезкам, соединяющим их с МЦС в сторону вращения, а величины их пропорциональны удалению точек от МЦС.

13. Расчет скоростей при плоском движении с помощью МЦС

Для расчета скорости точки тела, совершающего плоское движение, с помощью МЦС необходимо последовательно выполнить следующие действия:



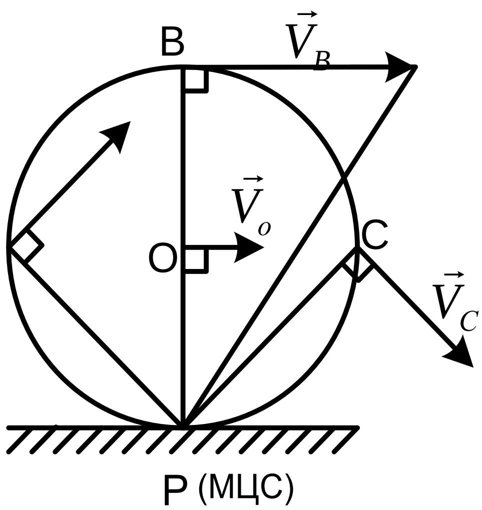
- выделить точку исследуемого тела, скорость которой известна, либо может быть легко рассчитана по условию задачи. Изобразить эту точку и вектор ее скорости (например, точка А);
- определить точку исследуемого тела, для которой можно построить вектор скорости, либо прямую, на которой лежит этот вектор скорости (например, точка В);
- построить МЦС исследуемого тела, для чего провести <u>перпендикуляры</u> в точках А и В к <u>векторам скорости</u> и найти точку их пересечения. Эта точка (точка Р) и является МЦС тела в данный момент времени;
- изобразить стрелкой направление вращательного движения вокруг МЦС в сторону вектора скорости той точки, для которой этот вектор известен (точка А)’
- скорости любых других точек тела строятся перпендикулярно отрезкам, соединяющим эти точки с МЦС, в сторону вращения и рассчитываются по формулам:

$$\omega = \frac{V_A}{AP}; \qquad V_B = \omega PB; \qquad V_C = \omega CP.$$

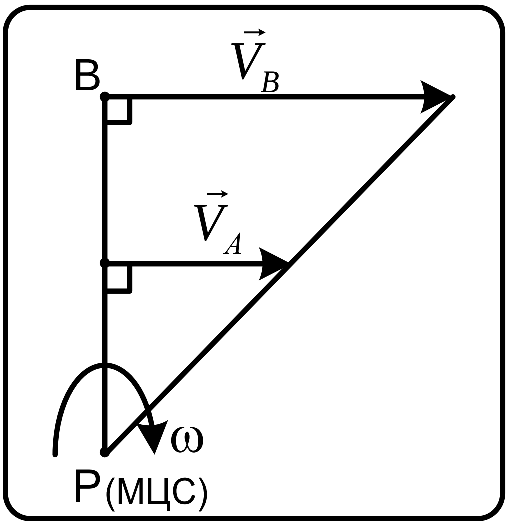
Частные случаи построения МЦС

Рассмотрим ситуации, когда построение МЦС отклоняется от общей схемы.

а)

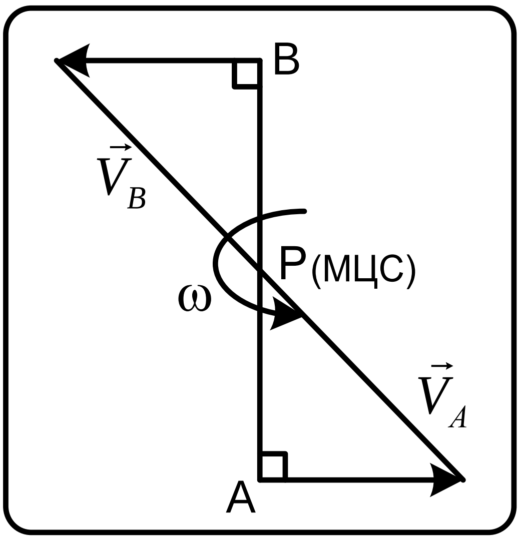


б)

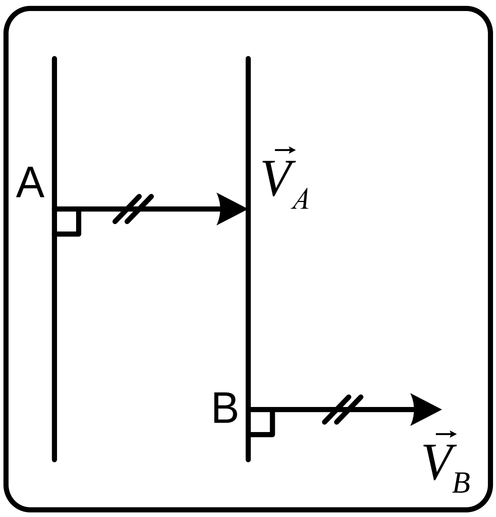


- Колесо катится по неподвижной поверхности без проскальзывания (рис а). МЦС в каждый момент времени находится в точке контакта колеса и поверхности.
- Точки A и B лежат на общем перпендикуляре к векторам их скоростей, направленных в одну сторону (рис б). Построение МЦС ясно из рисунка.
- Точки A и B лежат на общем перпендикуляре к векторам их скоростей, направленных в разные стороны (рис в). Построение МЦС следует из рисунка.

в)



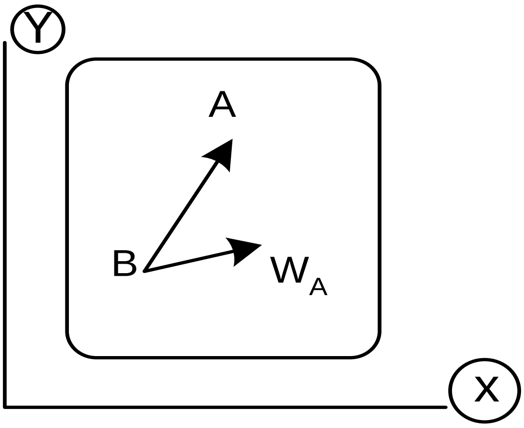
г)

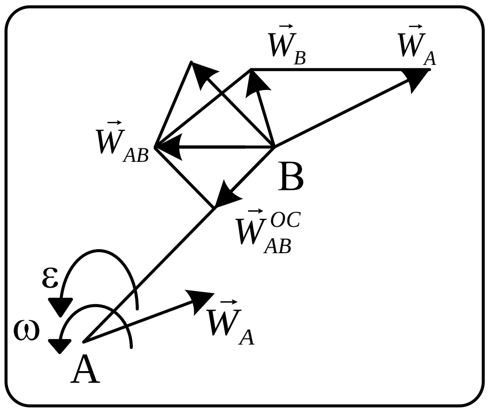


- Перпендикуляры к векторам скоростей точек A и B параллельны (говорят пересекаются на бесконечности). В этом случае МЦС находится на бесконечности и выполняется AP=∞; $\omega=V_A/AP = 0$. Рассматриваемое тело совершает <u>мгновенно поступательное движение</u>: все его точки в данный момент времени движутся с одинаковыми скоростями.

14. Расчет ускорений точек тела при плоском движении методом полюса

Рассматривается плоское движение тела. За полюс выбирается точка A. Предполагается, что движение ее известно, в частности, известно ускорение $\overline{W}_A$. Необходимо вывести формулу для расчета ускорения произвольной точки B тела.





Ранее, для скорости точки B была получена формула

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{AB}.$$

Дифференцируя эту формулу по времени, найдем

$$\frac{d\overline{V}_B}{dt} = \frac{d\overline{V}_A}{dt} + \frac{d\overline{V}_{BA}}{dt}; \qquad \overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}_{BA}.$$

Сопоставляя эту формулу с выводами, полученными при разложении плоского движения на составляющие, можно заключить следующее:

$\overline{\mathbf{W}}_{\mathbf{BA}}$ - ускорение точки B в относительном вращательном движении тела вокруг полюса.

Используя формулы вращательного движения, формулу для расчета ускорения точки B в развернутом виде можно записать так:

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}_{AB}^{OC} + \overline{W}_{AB}^{BP},$$

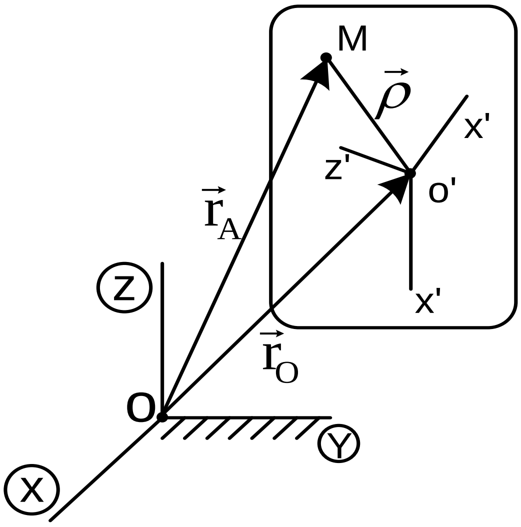
где $W_{AB}^{OC} = \omega^2 AB$; $\overline{W}_{AB}^{OC}$ - направлен вдоль AB к полюсу, $W_{AB}^{BP} = \varepsilon \cdot AB, \overline{W}_{AB}^{BP}$ перпендикулярен AB и направлен в сторону вращения, если оно ускоренное, и в обратную сторону, если - замедленное .

Если движение полюса происходит по криволинейной траектории, то целесообразно разложить его ускорение на касательную и нормальную составляющие. Тогда для расчета ускорения точки В можно записать следующую формулу

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A^{\tau} + \overline{W}_A^{n} + \overline{W}_{AB}^{OC} + \overline{W}_{AB}^{BP}.$$

15. Сложное движение точки. Основные понятия и определения

В ряде практических случаев движение точки по отношению к некоторой системе отсчета (условно неподвижной) может быть разложено на два «простых» составляющих движения. Как правило, эти движения известны. В связи с этим возникает задача: рассчитать кинематику основного - сложного движения точки, зная кинематику «простых» составляющих движений.



В общем виде эта задача формулируется так. Движение точки М рассматривается в двух системах отсчета: условно неподвижной системе (x, y, z) и движущейся относительно нее произвольным образом системе (x', y', z').

Условно неподвижная система отсчета (x, y, z) называется ***абсолютной.*** Движение точки в ней также называется ***абсолютным*** и физические характеристики этого движения снабжаются индексом «a» (V_a, W_a и т.д.).

Система отсчета (x', y', z') называется переносной (она как бы переносит в своем движении рассматриваемую точку). Движение точки пространства переносной системы, через которую в данный момент времени проходит исследуемый объект (точка М) называется ***переносным движением*** точки М и физические характеристики этого движения снабжаются индексом «e» (V_e, W_e и т.д.).

Движение точки М по отношению к системе отсчета (x', y', z') называется ***относительным движением*** точки М. Физические характеристики этого движения снабжаются индексом «r» (V_r, W_r и т.д.).

Считается, что относительное и переносное движения точки заданы. Необходимо получить математические формулы для расчета результирующего - сложного движения точки.

В основе расчета кинематики сложного движения точки лежат две теоремы: теорема сложения скоростей и теорема сложения ускорений. Строгое математическое доказательство этих теорем достаточно сложно и громоздко, поэтому для краткости дадим лишь исходную постановку и конечный результат этих вопросов.

16. Теорема сложения скоростей

Из геометрического построения следует

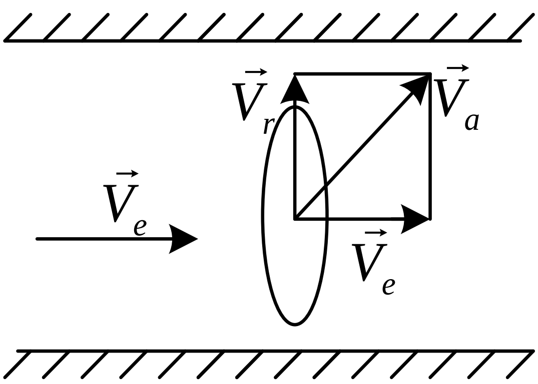
$$\bar{r}_a = \bar{r}_0 + \bar{\rho}$$

Дифференцируя это соотношение по времени, после преобразований можно получить следующее выражение

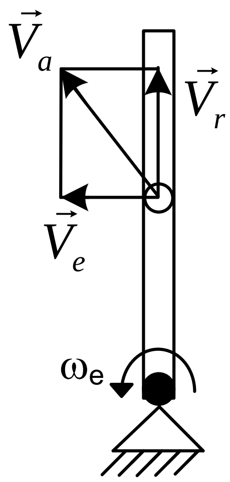
$$\frac{d\bar{r}_a}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt}; \qquad \bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e$$

Формулировка: абсолютная скорость движения точки равна геометрической сумме скоростей ее в относительном и переносном движениях.

<u>Примеры</u>



Движение лодки поперёк реки



Движение шарика
во вращающейся трубке

17. Теорема сложения ускорений

Дифференцируя по времени формулу сложения скоростей, после преобразований можно получить следующее выражение

$$\frac{d\bar{V}_a}{dt} = \frac{d\bar{V}_r}{dt} + \frac{d\bar{V}_e}{dt}; \qquad \bar{W}_a = \bar{W}_r + \bar{W}_e + \bar{W}_c \ .$$

Формулировка: абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме вектора относительного ускорения точки, вектора переносного ускорения точки и вектора ускорения Кориолиса.

При решении конкретных задач переносное и относительное ускорения точки рассчитываются по формулам соответствующих движений. Кориолисово ускорение всегда определяется по формуле

$$\overline{W}_c = 2\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r \ .$$

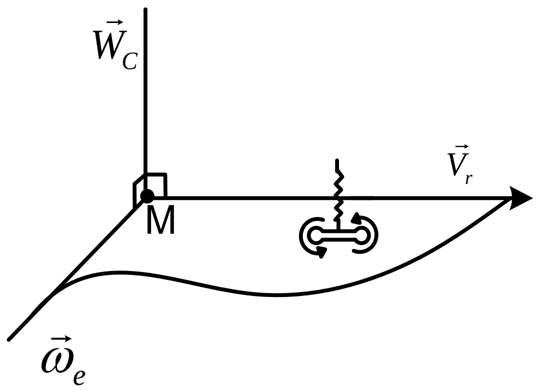
Величина ускорения Кориолиса рассчитывается так

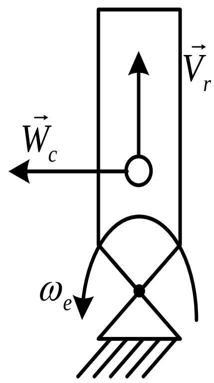
$$W_c = 2\omega_e V_r \sin(\overline{\omega}_e \ \hat{;} \ \overline{V}_r) \ .$$

Вектор ускорения Кориолиса направлен по правилу буравчика согласно рисунку.

Частные случаи расчета W_c.

а) если $\overline{\omega}_e \perp \overline{V}_r$, то $W_c = 2\omega_e V_r \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\omega_e V_r$





Ускорение Кориолиса равно нулю в следующих случаях:

- переносное движение является поступательным, т.е. $\omega_e = 0$;
- векторы ω_e и
- V_r лежат на параллельных прямых, т.е. $\sin(\overline{\omega}_e, \wedge \overline{V}_r) = 0$.

18. Краткие задачи и вопросы по кинематике

1. Точка движется по закону $x = a\cdot\cos wt$, $y = b\cdot\sin wt$. Определить уравнение траектории точки.
2. Точка движется по закону $x=a\cdot t+c$, $y=bt^2+d$. Определить уравнение траектории точки.
3. Точка движется по закону $x = a\cdot\cos^2 w\,t$; $— = b\cdot\sin^2 w\,t$;. Определить уравнение траектории точки.
4. Точка движется по закону $x=a\cdot t^2+bt+c$, $y=2at^2+2bt-d$. Определить уравнение траектории точки.
5. Точка движется по закону $x = a\cdot\cos wt - c$, $y = b\cdot\sin wt + d$. Записать уравнение траектории точки.
6. В механизме, изображенном на рис.1,определить уравнения траектории точки А.

7.Определить уравнение траектории точки В (рис.1).

8. Записать уравнения движения точки В (рис.1).
9. Записать уравнение траектории точки С (рис.1).
10. Записать уравнения движения точки А (рис.1).
11. Движение точки задано зависимостью $\vec{r} = (2t+1)\vec{i} + (4-5t)\vec{j}$. Определить траекторию точки.
12. Движение точки задано зависимостью $\vec{r} = 3t\vec{i} + (6t-5t^2)\vec{j}$. Определить траекторию точки.

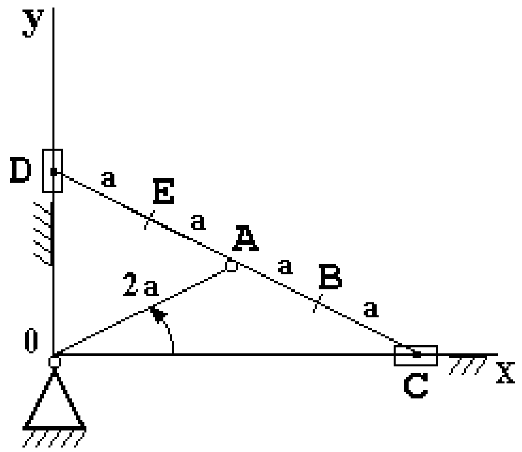


Рис.1

13. Движение точки задано зависимостью $\vec{r} = 3\sin\frac{\pi t}{3}\vec{i} + 2\cos\frac{\pi t}{3}\vec{j}$. Определить траекторию точки.
14. Записать уравнения движения точки Е (рис.1).
15. Записать уравнения движения точки D (рис.1).
16. Движение точки задано уравнениями *x=5cos(π/3)t+4 см, y=7sin(π/6)t+2* см. Определить v_x , в момент времени t_1=1с.
17. В предыдущей задаче определить v_y в момент времени t_1=1с.
18. В задаче 16 определить W_x в момент времени t_1=1с.
19. В задаче 16 определить W_x в момент времени t_1=1с.
20. Точка движется по закону х=3^2+4 см, у=$4t^{2-}$1см. Определить cos(ν,х) в момент времени t_1=1с.
21. В предыдущей задаче рассчитать cos(ν,у) в момент времени t_1=1с.
22. В задаче 20 определить ускорение точки в момент времени t_1=1с.
23. В задаче 20 определить cos(W,х) в момент времени t_1=1с.
24. В задаче 20 определить cos(W,у) в момент времени t_1=1с.
25. Задан график скорости прямолинейного движения точки v(t) (рис.2). Определить ускорение точки на участке ОА.
26. В задаче 25 определить ускорение точки на участке АВ.
27. В задаче 25 определить ускорение точки на участке ВD.
28. Задан график скорости прямолинейного движения точки А (рис. 3). Определить путь, пройденный точкой в момент времени t=5с.
29. Задан график скорости прямолинейного движения точки Б (рис. 3). Определить путь, пройденный точкой в момент времени ·t=5с.
30. Задан график скорости прямолинейного движения точки С (рис. 3). Определить путь, пройденный точкой в момент времени t=5с.
31. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону φ=$8t^2$+5t-4 рад. Определить угловую скорость тела в момент времени t=1с.

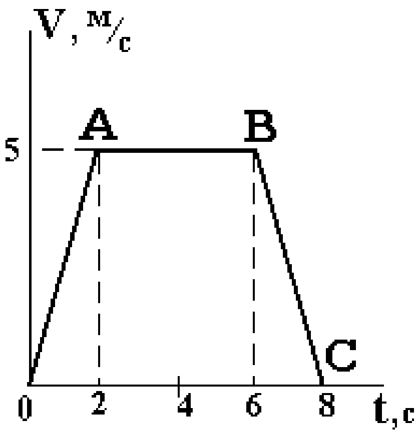


Рис.2

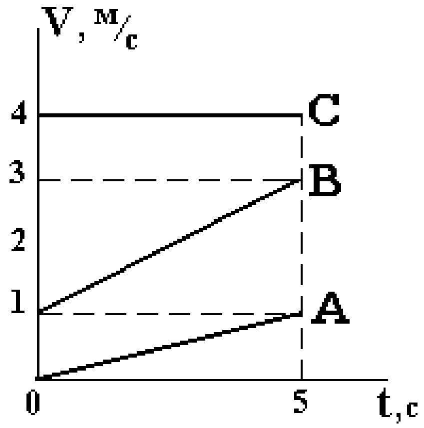


Рис.3

32. В предыдущей задаче определить угловое ускорение тела в момент времени t=1с.
33. В задаче 31 определить в момент t=1с. линейную скорость точки тела, отстоящей от оси вращения на расстоянии 5 см.
34. Тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянной скоростью, совершая 20 об/мин. Рассчитать угловую скорость вращения тела.
35. Тело начало вращаться вокруг неподвижной оси из состояния покоя с постоянной угловой скоростью w_0. Записать закон движения тела.
36. Тело начало вращаться вокруг неподвижной оси из состояния покоя с постоянным угловым ускорением ε_0. Записать закон вращательного движения.

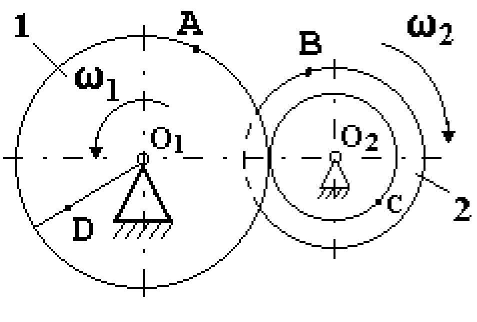


Рис.4

37. В механизме, изображенном на рис.4, шестерня 1, вращаясь по закону $\phi=5t^2$ рад, приводит в движение шестерню 2, состоящую из двух шестерен, насаженных на общий вал. Радиусы шестерен равны: R1=20 см, R2=10 см, r_2=5 см, OD=10 см. Определить w_2 в момент времени t=1 с.

38. В задаче 37 определить ε_2.
39. В задаче 37 определить V_A в момент времени t=1с.
40. В задаче 37 определить V_c в момент времени t=1с.
41. В задаче 37 определить w_1, в момент времени t=1с.
42. В задаче 37 определить ε_1.
43. В задаче 37 определить W_A^{OC} в момент времени t=1с.
44. В задаче 37 определить W_A^{BP}.
45. В задаче 37 определить отношение V_A/V_D.
46. В задаче 37 определить отношение W_A/ W_D.

47. В механизме, изображенном на рис.5, рейка AB, двигаясь по закону x=40t+4 см, приводит во вращательное движение цилиндр радиуса 20 см. Определить V_A.

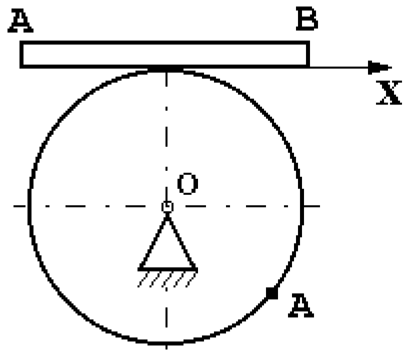


Рис.5

48. В задаче 47 определить угловую скорость цилиндра ω.

49. В задаче 47 определить угловое ускорение цилиндра *е*.

50. В задаче 47 определить W_A^{OC}.

51. В задаче 47 определить W_A^{BP}.

52. Груз A (рис. 6) поднимается с помощью лебедки, барабан которой вращается по закону $\varphi=5t^2$ рад. Определить угловую скорость барабана лебедки в момент t=2c.

53. В задаче 52 определить угловое ускорение барабана лебедки в момент t=3c.

54. В задаче 52 определить скорость подъема груза A в момент t=2c.

55. В задаче 52 определить ускорение подъема груза A в момент t=3c.

56. Для изображенного на рис.7 механизма определить скорость точки B, когда $\alpha=\pi/з$. Дано: OA=1, AC=BC=1.

57. В задаче 56 определить скорость точки C.

58. В задаче 56 определить ω_{AB}.

59. Для изображенного на рис. 7 механизма определить скорость точки B, когда a=0. Дано: OA=1, AC=BC=1.

60. В задаче 59 определить скорость точки C.

61. В задаче 59 определить угловую скорость звена AB.

62. Колесо радиуса a катится без скольжения (рис.8). Центр колеса движется со скоростью V_0. Определить скорость точки A.

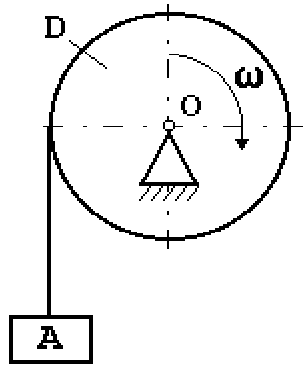


Рис.6

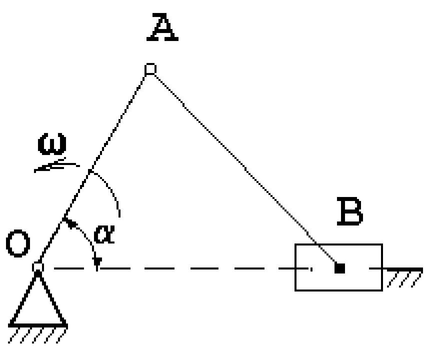


Рис.7

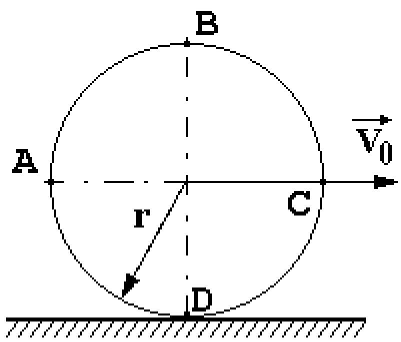


Рис.8

63. В задаче 62 определить скорость точки B.

64. В задаче 62 определить скорость точки C.

65. В задаче 62 определить угловую скорость движения колеса.

66. В задаче 62 определить ускорение точки A.

67. В задаче 62 определить ускорение точки B.

68. В задаче 62 определить ускорение точки C.
69. В задаче 62 определить ускорение точки O.
70. Для изображенного на рис.7 механизма определить скорость точки B, когда a=π/3. Дано: OA=1.
71. Для изображенного на рис.7 механизма определить скорость точки B, когда a=π/6. Дано: OA=1.
72. Для изображенного на рис.9 механизма определить скорость точки C, если известно: OA=1, AC=21. Колесо катится без скольжения.
73. В задаче 72 определить AE=CE=1.
74. В задаче 72 определить скорость точки B, если a=1.
75. В задаче 72 определить угловую скорость колеса, если a=1.
76. Для механизма, изображенного на рис.10, определить скорость точки A.
77. В задаче 76 определить скорость точки B.
78. В задаче 76 определить скорость точки C.

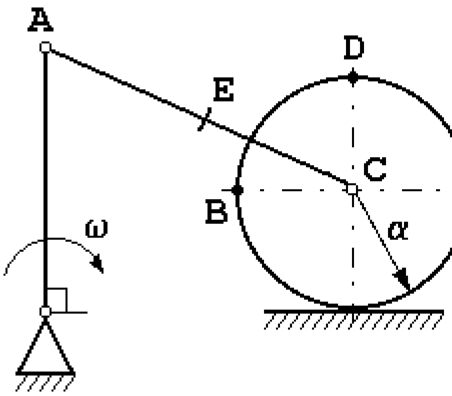


Рис.9

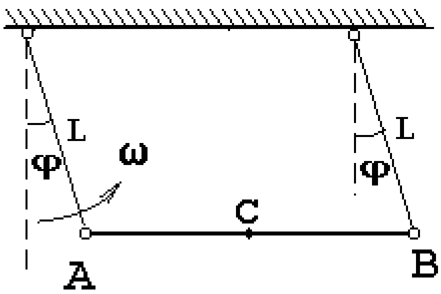


Рис.10

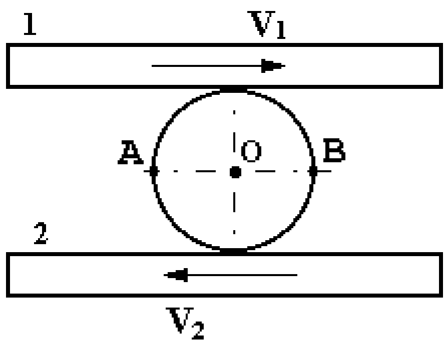


Рис.11

79. Колесо, изображенное на рис.11, приводится в движение горизонтальными пластинами, перемещающимися поступательно без проскальзывания относительно колеса. Определить скорость точки O колеса, если $V_1=V_2=V$.
80. В задаче 79 определить скорость точки A колеса.
81. В задаче 79 определить скорость точки B колеса.
82. В задаче 79 определить скорость точки O колеса, если $V_1=0$, $V_2=2V$.
83. В задаче 79 определить скорость точки A колеса, если $V_2=0, V_1=V$.
84. В задаче 79 определить скорость точки B колеса, если $V_2=0, V_1=V$.
85. В задаче 79 определить скорость точки O колеса, если $V_2=0, V_1=2V$.
86. По трубке, вращающейся с постоянной угловой скоростью w=2 1/c (рис.12) движется точка M по закону $x=OM=2t^2$ см. Определить переносную скорость точки M в момент времени t=1 c.

87. В задаче 86 определить относительную скорость точки М в момент времени t=1с.
88. В задаче 86 определить абсолютную скорость точки М в момент времени t=1с.
89. В задаче 86 определить переносное ускорение точки М в момент времени t=1с.
90. В задаче 86 определить относительное ускорение точки М в момент времени t=1с.
91. В задаче 86 изобразить вектор ускорения Кориолиса точки М. Рассчитать его величину в момент времени t=1с.

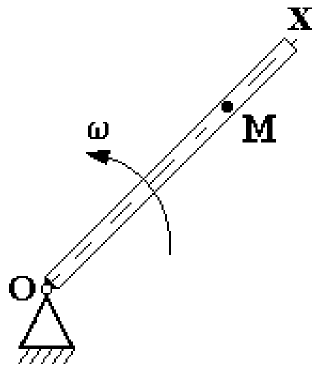


Рис.12

92. Тело D (рис.13) движется в горизонтальных направляющих по закону $x=5\cdot t^3+4$ см. По прямолинейному каналу движется точка М по закону $AM=3t^2$ см. Определить переносную скорость точки М в момент времени t=1с.
93. В задаче 92 определить относительную скорость точки М в момент времени t=1с.
94. В задаче 92 определить абсолютную скорость точки М в момент времени t=1с.
95. В задаче 92 рассчитать ускорение Кориолиса для точки М в момент t=1с.
96. Определить ускорение Кориолиса точки М, изображенной на рис. 14.

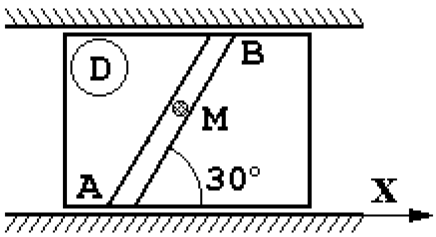


Рис.13

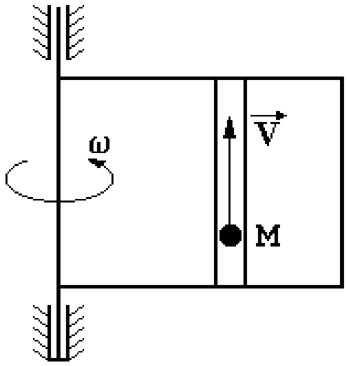


Рис.14

97. Указать направление векторов угловой скорости и углового ускорения при вращательном движении тела, изображенного на рис. 15.
98. Указать направления векторов угловой скорости и углового ускорения при вращательном движении тела, изображенного на рис. 16.

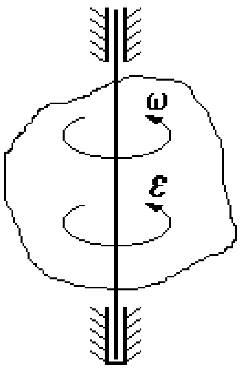


Рис.15

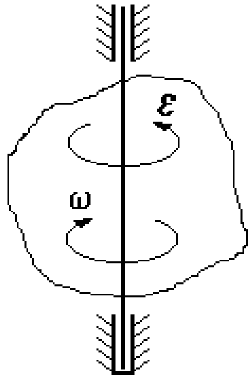
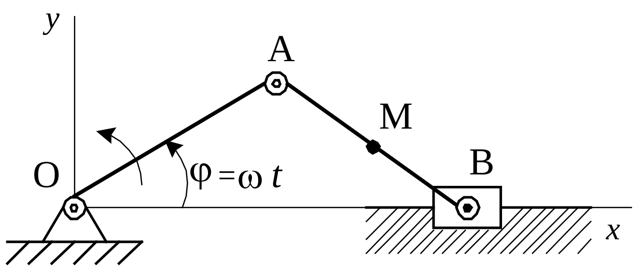


Рис.16

19. Характерные задачи кинематики

Для закрепления материала предлагается прорешать следующий набор характерных задач из сборника заданий Мещерского И.В. Нумерация задач соответствует оригиналу.



10.12 Кривошип ***OA*** вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ = 10 рад/с. Длина ***OA*** = ***AB*** = 80 см. Найти уравнение движения и траекторию средней точки M шатуна, а также уравнение движения ползуна ***B***, если в начальный момент ползун находится в крайнем правом положении; оси координат показаны на рисунке.

Ответ: 1) $x_M = 120 \cos 10t$, $y_M = 40 \sin 10t$.

2) Траекторией точки ***M*** является эллипс $x^2/120^2 + y^2/40^2 = 1$;

3) уравнение движения ползуна ***B*** $x = 160 \cos 10t$.

11.3 Точка описывает фигуру Лиссажу согласно уравнениям $x = 2 \cos t$, $y = 4 \cos 2t$ (x, y – в сантиметрах , t – в секундах). Определить величину и направление скорости точки, когда она находится на оси Oy.

Ответ: 1) V = 2 см/с, cos(V, x) = -1; 2) V = 2 см/с, cos(V, x) = 1.

12.1(12.1) Поезд движется со скоростью 72 км/ч; при торможении он получает замедление, равное 0,4 м/с^2. Найти, за какое время до прихода поезда на станцию и на каком от неё расстоянии должно быть начато торможение.

Ответ: 50 с, 500 м.

12.4(12.5) Считая посадочную скорость самолета равной 400 км/ч, определить замедление его при посадке на пути l = 1200 м, считая, что замедление постоянно.

Ответ: ω = 5,15 м/с^2.

12.7(12.8) Поезд, имея начальную скорость 54 км/ч, прошел 3 м в первые 30 с. Считая движение поезда равнопеременным, определить скорость и ускорение поезда в конце 30-й секунды, если рассматриваемое движение поезда происходит на закруглении радиуса R = 1 км.

Ответ: v = 25 м/с, ω = 0,708 м/с^2.

12.14(12.15) Уравнение движения пальца кривошипа дизеля в период пуска имеют вид $x = 75 \cos 4t^2$, $y = 75 \sin 4t^2$ (x,y – в сантиметрах, t – в секундах). Найти скорость, касательное и нормальное ускорения пальца.

Ответ: v = 600 t см/с, ω_t = 600 см/с^2, ω_n = 4800 t^2 см/с^2.

13.4 Тело, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, делает 3600 оборотов в первые 2 минуты. Определить угловое ускорение.

Ответ: $\varepsilon = \pi$ рад/с^2.

13.5 Вал начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя; в первые 5с он совершает 12,5 оборота. Какова его угловая скорость по истечению этих 5с?

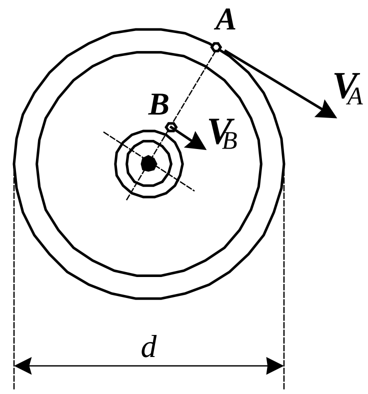
Ответ: $\omega = 10\pi$ рад/с.

13.6 Маховое колесо начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно; через 10 минут после начала движения оно имеет угловую скорость, равную 4π рад/с. Сколько оборотов сделало колесо за эти 10 минут?

Ответ: 600 оборотов.

13.14 Точка ***A*** шкива, лежащая на его ободе, движется со скоростью 50 см/с, а некоторая точка ***B***, взятая на одном радиусе с точкой ***A***, движется со скоростью 10 см/с; расстояние ***AB*** = 20 см. Определить угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ и диаметр шкива.

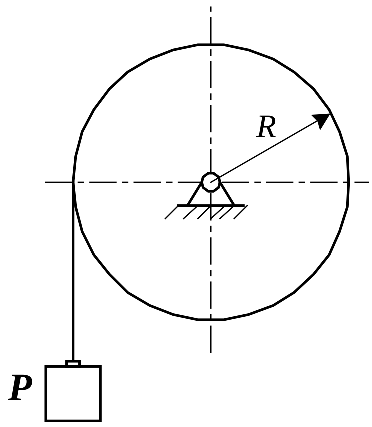
Ответ: $\boldsymbol{\omega} = 2$ рад/с, $\boldsymbol{d} = 50$ см.



13.18 Вал радиуса $\boldsymbol{R}$ = 10 см приводится во вращение гирей ***P***, привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $\boldsymbol{x = 100t^2}$, где x – расстояние гири от места схода нити с поверхности вала, выраженное в сантиметрах, t – время в секундах. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение $\boldsymbol{\omega}$ точки на поверхности вала в момент t.

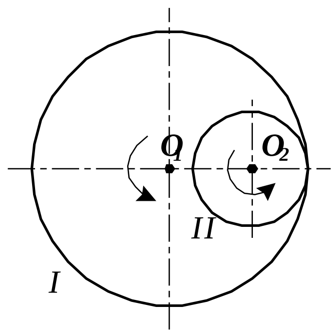
Ответ: $\omega = 20t$ рад/с, $\varepsilon = 20$ рад/с,

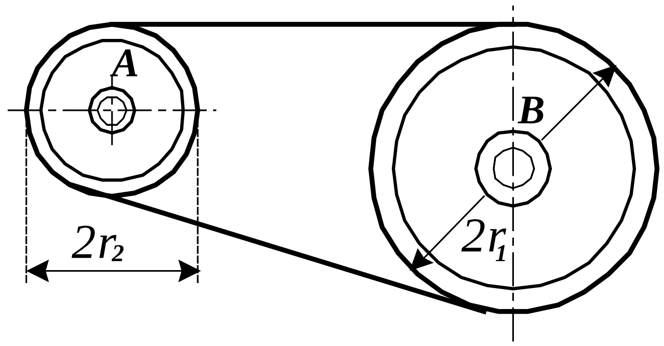
$\boldsymbol{\omega} = 200(1 + 400t^4)^{1/2}$ см/с^2.



14.1 Угловая скорость зубчатого колеса I диаметра $\boldsymbol{D}_1$ = 360 мм равна $10\pi/3$ рад/с. Чему должен равняться диаметр зубчатого колеса II , находящегося с колесом I во внутреннем зацеплении, угловая скорость которого в три раза больше угловой скорости колеса I?

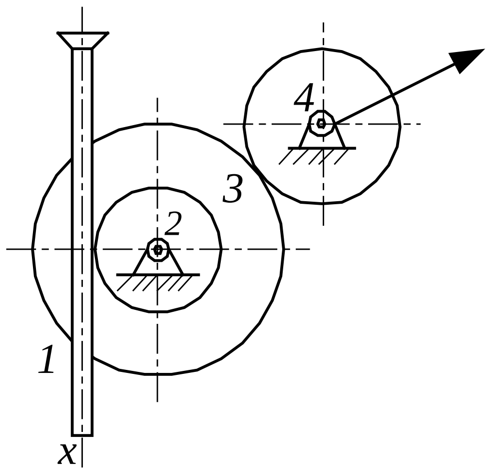
Ответ: $\boldsymbol{D}_2$ = 120 мм.





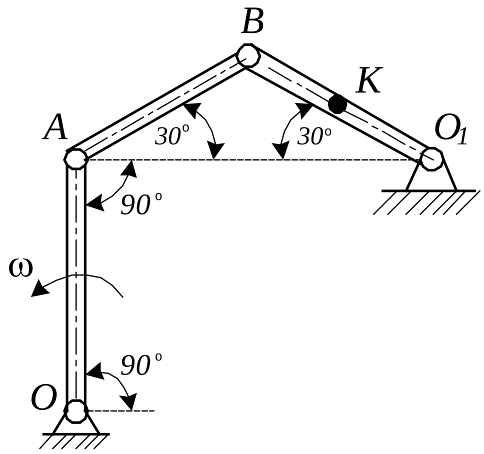
14.3 Станок со шкивом *A* приводится в движение из состояния покоя бесконечным ремнём от шкива B электромотора; радиусы шкивов: r_1 = 75 см, r_2 = 30 см; после пуска в ход электромотора его угловое ускорение равно 0,4π рад/с^2. Пренебрегая скольжением ремня по шкивам, определить через сколько времени угловая скорость станка будет равна 10π рад/с.

Ответ: 10 с.



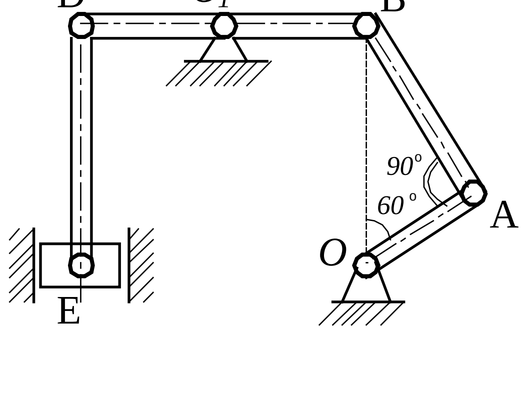
14.4 В механизме стрелочного индикатора движение от рейки мерительного штифта *1* передаётся шестерне *2*, на оси которой укреплено зубчатое колесо *3*, сцепляющееся с шестерней *4*, несущей стрелку. Определить угловую скорость стрелки, если движение штифта задано уравнением $x = a \sin kt$ и радиусы зубчатых колёс соответственно равны r_2, r_3 и r_4.

Ответ: $\omega_4 = (r_3/r_2 r_4) ak \cos kt$.



16.17 Определить скорость точки *K* четырёхзвенного механизма $OABO_1$ в положении, указанном на рисунке, если звено *OA* длины 20 см имеет в данный момент угловую скорость 2 рад/с. Точка *K* расположена в середине стержня BO_1.

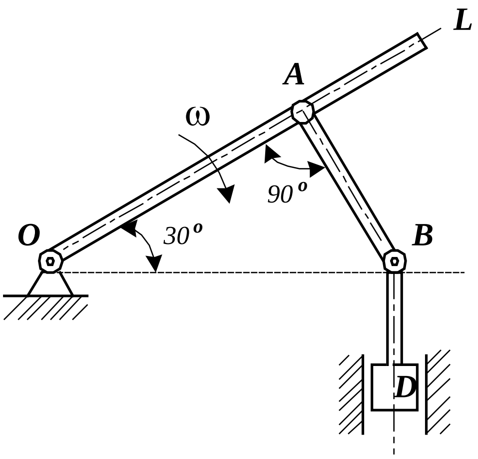
Ответ: 20 см/с.



16.18 Определить скорость поршня *E* приводного механизма насоса в положении, указанном на рисунке, если OA = 20 см, $O_1B = O_1D$. Кривошип *OA* вращается равномерно с угловой скоростью 2 рад/с.

Ответ: 46,2 см/с.

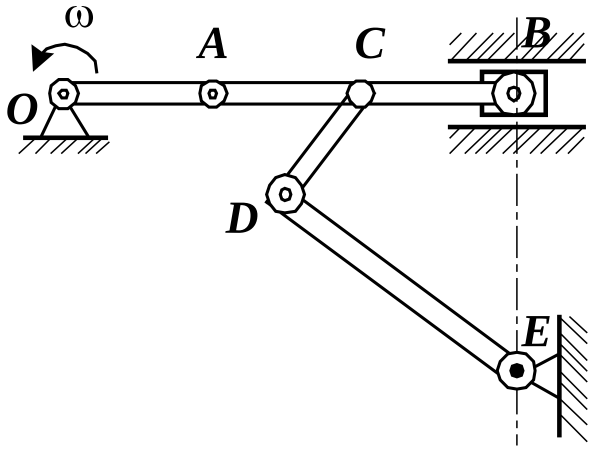
16.24 Поршень ***D*** гидравлического пресса приводится в движение посредством шарнирно-рычажного механизма ***OABD***. В положении, указанном на рисунке, рычаг ***OL*** имеет угловую скорость ω = 2 рад/с. Определить скорость поршня ***D*** и угловую скорость звена ***AB***, если ***OA*** = 15 см.



Ответ: V_D = 34,6 см/с,

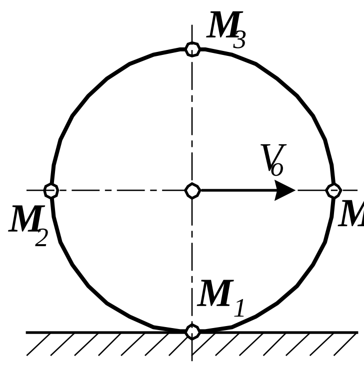
ω_{AB} = 2 рад/с.

16.28 Кривошипный механизм связан шарнирно в середине ***C*** шатуна со стержнем ***CD***, а последний – со стержнем ***DE***, который может вращаться вокруг оси ***E***. Определить угловую скорость стержня ***DE*** в указанном на рисунке положении кривошипного механизма, если точки ***B*** и ***E*** расположены на одной вертикали; угловая скорость ω кривошипа ***OA*** равна 8 рад/с, ***OA*** = 25 см, ***DE*** = 100 см, угол (***CDE***) = 90° и угол (***BED***) = 30°.



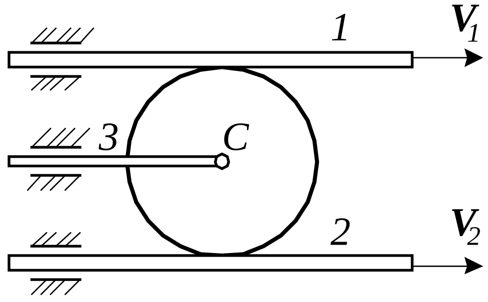
Ответ: ω_{DE} = 0,5 рад/с.

16.31 Колесо радиуса ***R*** = 0,5м катится без скольжения по прямолинейному участку пути; скорость центра его постоянна и равна V_0 = 10 м/с. найти скорости концов M_1, M_2, M_3, и M_4 вертикального и горизонтального диаметров колеса. Определить его угловую скорость.

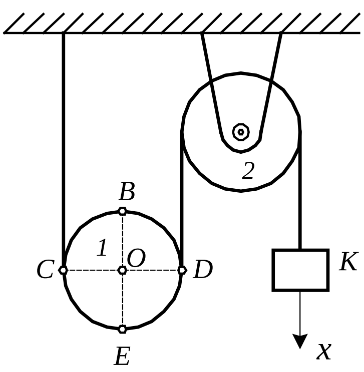


Ответ: V_1 = 0, V_2 = 14,14 м/с, V_3 = 20 м/с, V_4 = 14,14 м/с, ω = 20 рад/с.

16.32 На рисунке изображён суммирующий механизм. Две параллельные рейки ***1*** и ***2*** движутся в одну сторону с постоянными скоростями V_1 и V_2. Между рейками зажат диск радиуса ***r***, катящийся по рейкам без скольжения. Показать, что скорость средней рейки ***3***, присоединённой к оси ***C*** диска, равна полусумме скоростей реек ***1*** и ***2***. Найти также угловую скорость диска.

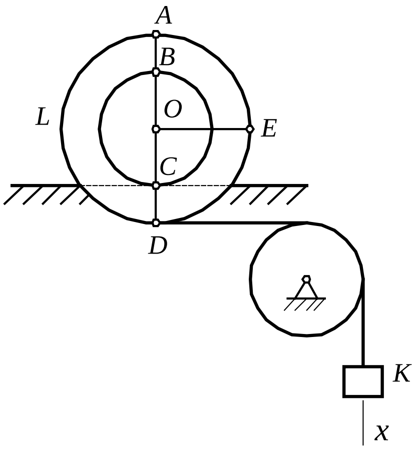


Ответ: $\omega = (V_1 - V_2)/2r$.



16.33 Подвижный блок ***1*** и неподвижный блок ***2*** соединены нерастяжимой нитью. Груз ***K***, прикреплённый к концу этой нити, опускается по вертикали вниз по закону $\boldsymbol{x = 2t^2}$ м. Определить скорости точек ***C***, ***D***, ***B*** и ***E***, лежащих на ободе подвижного блока, в момент t = 1 с в положении, указанном на рисунке, если радиус подвижного блока ***1*** равен 0,2 м, а $\boldsymbol{CD \perp BE}$. Найти также угловую скорость блока ***1***.

Ответ: $V_C = 0$, $V_o = 2$ м/с, $V_B = V_E = 2(2)^{1/2}$ м/с, $\omega = 10$ рад/с.



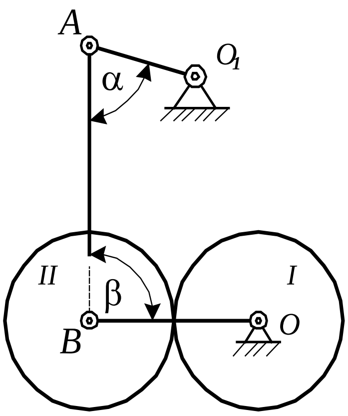
16.34 Груз ***K***, связанный посредством нерастяжимой нити с катушкой ***L***, опускается вертикально вниз по закону $\boldsymbol{x = t^2}$ м. При этом катушка ***L*** катится без скольжения по неподвижному горизонтальному рельсу. Определить скорости точек ***C***, ***A***, ***B***, ***O*** и ***E*** катушки в момент t = 1 с в положении, указанном на рисунке, а также угловую скорость катушки, если $\boldsymbol{AD \perp OE}$, а $\boldsymbol{OD} = 2\boldsymbol{OC} = 0{,}2$ м.

Ответ: $V_C = 0$, $V_A = 6$ м/с, $V_B = 4$ м/с,

$V_O = 2$ м/с,

$V_E = 4{,}46$ м/с,

$\omega = 20$ рад/с.



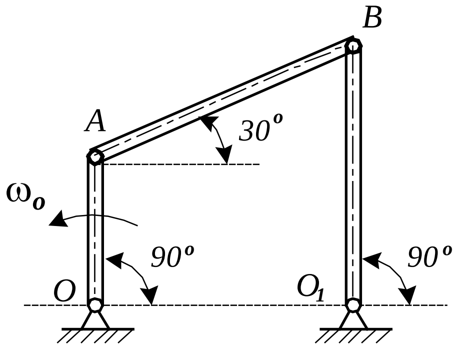
16.38 Механизм Уатта состоит из коромысла $\boldsymbol{O_1A}$, которое, качаясь на оси O_1, передаёт при помощи шатуна ***AB*** движение кривошипу ***OB***, свободно насаженному на ось ***O***. На той же оси ***O*** сидит колесо ***I*** ; шатун ***AB*** оканчивается колесом ***II*** , наглухо связанным с шатуном. Определить угловые скорости кривошипа ***OB*** и колеса ***I*** в момент, когда α =60°, β = 90°, если $r_1 = r_2 = 30(3)^{1/2}$ см, $\boldsymbol{O_1A}$ = 75 см, ***AB*** = 150 см и угловая скорость коромысла $\omega_o = 6$ рад/с.

Ответ: $\omega_{OB} = 3{,}75$ рад/с , $\omega_I = 6$ рад/с.

16.39 Планетарный механизм состоит из кривошипа $\boldsymbol{O_1A}$, приводящего в движение шатун ***AB***, коромысла ***OB*** и колеса ***I*** радиуса $\boldsymbol{r_1}$ = 25 см; шатун ***AB*** оканчивается шестерёнкой ***II*** радиуса $\boldsymbol{r_2}$ = 10 см, наглухо с ним связанной. Определить угловую скорость кривошипа $\boldsymbol{O_1A}$ и колеса ***I*** в момент, когда $\alpha = 45°$, $\beta = 90°$, если $\boldsymbol{O_1A} = 30\sqrt{2}$ см, ***AB*** = 150 см, угловая скорость коромысла ***OB*** ω = 8 рад/с.

Ответ: $\omega_{O1A} = 4$ рад/с, $\omega_I = 5{,}12$ рад/с.

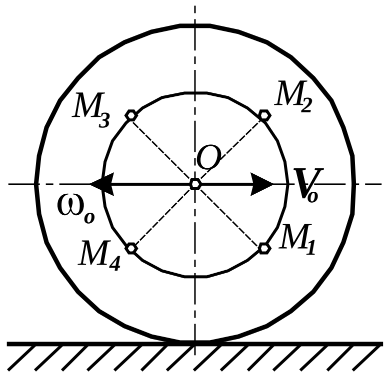
18.13 Стержень ***OA*** шарнирного четырёхзвенника ***OABO***$_1$ вращается с постоянной угловой скоростью ω_o. Определить угловую скорость, угловое ускорение стержня ***AB***, а также ускорение шарнира ***B*** в положении, указанном на рисунке, если ***AB*** = 2***OA*** = 2***a***.



Ответ: $\omega = 0$, $\varepsilon = [(\sqrt{3})/6]\omega_o^2$,

$\boldsymbol{\omega}_B = [(\sqrt{3})/3]a\omega_o^2$

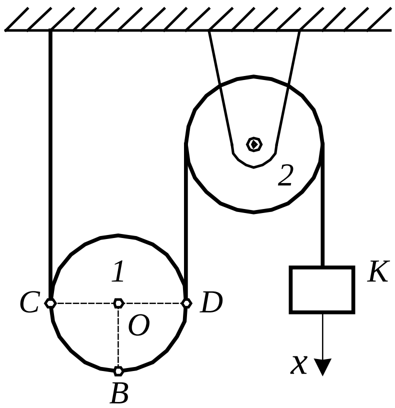
18.22 Вагон трамвая движется по прямолинейному горизонтальному участку пути с замедлением ω_o = 2 м/с^2, имея в данный момент скорость V_o = 1 м/с. Колёса катятся по рельсам без скольжения. Найти ускорения концов двух диаметров ротора, образующих с вертикалью углы по 45°, если радиус колеса ***R*** = 0,5 м , а ***r*** = 0,25 м.



Ответ: ω_1 = 2,449 м/с^2 , ω_2 = 3,414 м/с^2 ,

ω_3 = 2,449 м/с^2 , ω_4 = 0,586 м/с^2.

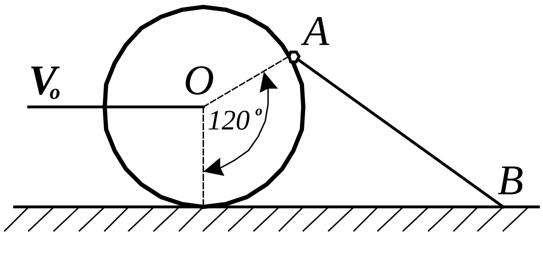
18.25 Подвижный блок ***1*** и неподвижный блок ***2*** соединены нерастяжимой нитью. Груз ***К***, прикреплённый к концу этой нити, опускается вертикально вниз по закону ***x= 2t²*** м. Определить ускорение точек ***C***, ***B*** и ***D***, лежащих на ободе подвижного блока ***1***, в момент ***t*** = 05 с в положении, указанном на рисунке, если ***OB⊥CD*** , а радиус подвижного блока ***1*** равен 0,2 м.



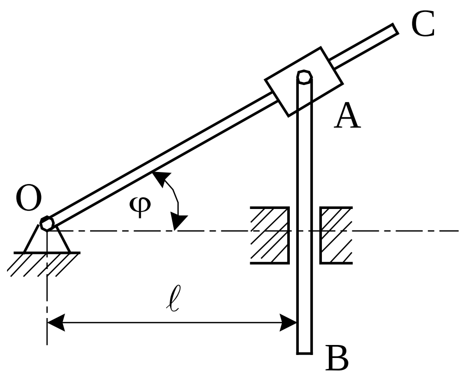
Ответ: ω_C = 5 м/с^2, ω_B = 7,29 м/^{2},

ω_D = 6,4 м/с^2.

18.27 Колесо радиуса ***R*** катится без скольжения по плоскости. Центр ***O*** колеса движется с постоянной скоростью V_o. В точке ***A*** с ним шарнирно соединён стержень ***AB*** длины ℓ = 3***R***. Другой конец стержня скользит по плоскости. В положении, указанном на рисунке, определить угловую скорость и угловое ускорение стержня ***AB***, а также линейные скорость и ускорение его точки ***B***.

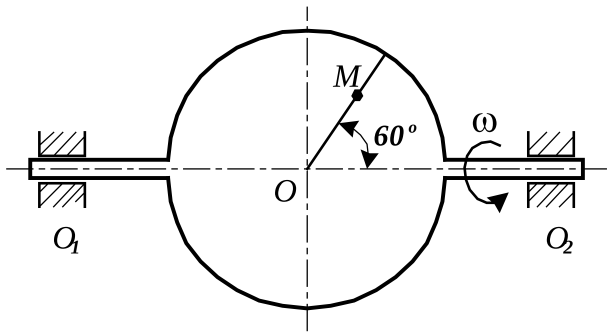


Ответ: $\omega_{AB} = V_o/3R$, $\varepsilon_{AB} = 0{,}128(V_o^2/R^2)$, $V_B = 2V_o$, $\boldsymbol{\omega}_B = 0{,}962(V_o^2/R)$.



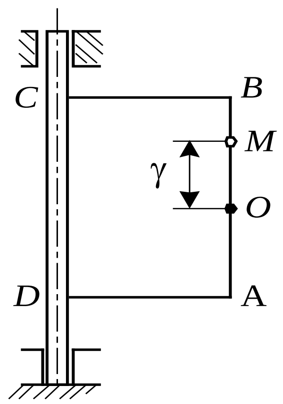
22.17 В кулисном механизме при качании кривошипа ***OC*** вокруг оси ***O***, перпендикулярной плоскости рисунка, ползун A, перемещаясь вдоль кривошипа ***OC***, приводит в движение стержень ***AB***, движущийся в вертикальных направляющих ***K***. Расстояние ***OK*** = ℓ. Определить скорость движения ползуна ***A*** относительно кривошипа ***OC*** в функции от угловой скорости ***ω*** и угла поворота ***φ*** кривошипа.

Ответ: $V_r = (\ell\ \omega\ \mathrm{tg}\varphi)/\cos\varphi$.



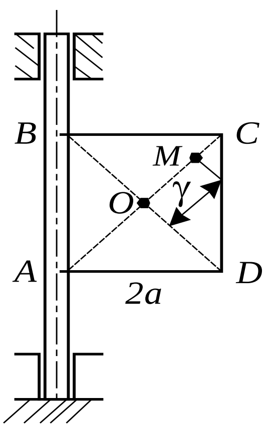
23.27 По радиусу диска, вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega = 2t$ рад/с в направлении от центра диска к его ободу движется точка ***M*** по закону $OM = 4t^2$ см. Радиус ***OM*** составляет с осью O_1O_2 угол 60°. Определить величину абсолютного ускорения точки ***M*** в момент ***t*** = 1 с.

Ответ: $\omega_{M} = 35{,}56$ см/с^2.



23.28 Прямоугольник ***ABCD*** вращается вокруг стороны ***CD*** с угловой скоростью $\omega = \pi/2$ рад/с = const. Вдоль стороны ***AB*** движется точка ***M*** по закону $\gamma = a \sin(\pi/2)\ t$ м. Даны размеры: ***DA*** = ***CB*** = ***a*** м. Определить величину абсолютного ускорения точки в момент времени ***t*** = 1 с.

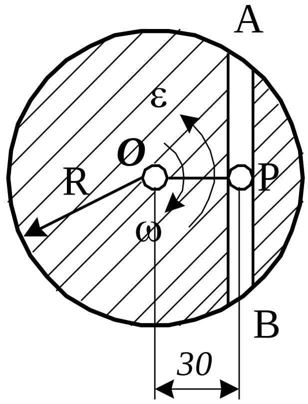
Ответ: $\omega_a = 0{,}354(a\pi^2)$ м/с^2.



23.29 Квадрат ***ABCD*** со стороной ***2a*** м вращается вокруг стороны ***AB*** с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi\sqrt{2}$ рад/с. Вдоль диагонали ***AC*** совершает гармоническое колебание точка ***M*** по закону $\gamma = a \cos(\pi/2)\ t$ м. Определить величину абсолютного ускорения точки при ***t*** = 1 с и ***t*** = 2 с.

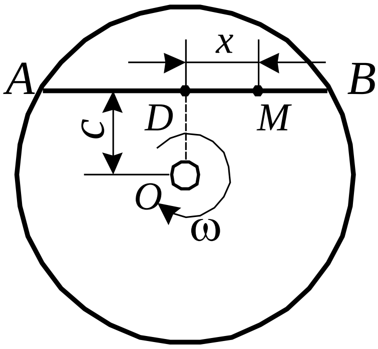
Ответ: $\omega_{a1} = a\pi^2\sqrt{5}$ м/с^2, $\omega_{a2} = 0{,}44a\pi^2$ м/с^2.

23.36 Шарик P движется со скоростью 1,2 м/с от A к B по хорде AB диска, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. Найти абсолютное ускорение шарика, когда он находится на кратчайшем расстоянии от центра диска, равном 30 см. В этот момент угловая скорость диска равна 3 рад/с, угловое замедление равно 8 рад/с^2.



Ответ: ω_a = 10,18 м/с.

23.43 Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. По хорде AB из её середины D движется точка M с постоянной относительной скоростью u. Хорда отстоит от центра диска на расстоянии c. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M как функции расстояния $DM = x$.



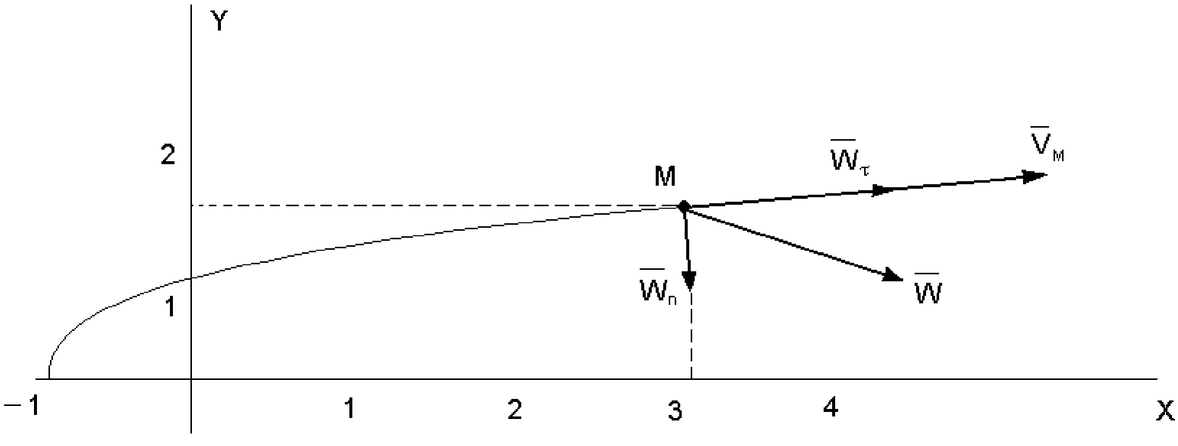
Ответ: $Va = \sqrt{\omega^2 x^2 + (u + \omega c)^2}$,

$$\omega_a = \omega\sqrt{\omega^2 x^2 + (2u + \omega c)^2}.$$

20. Примеры решения задач

Пример1. (Кинематика точки)

Точка М совершает плоское движение согласие уравнениям X = 4t^3 -1, V = 2t, см. Установить вид траектории точки и для момента времени t =1c найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорении, а также радиус кривизны траектории.



Решение

Для нахождения уравнения траектории необходимо исключить время из уравнений движения.

Имеем: $t = \dfrac{Y}{2} \quad \rightarrow \quad X = Y^2 - 1;$

Траекторией точки является парабола которая строиться по точкам. Положение точки **M** на траектории в момент времени **t=1c** определяется по её координатам.

$X=4\times1^2-1 = 3$см; $\qquad Y=2\times1=2$см;

Скорость точки **M** в момент времени **t=1c** определяется по формулам:

$$V_x = \dot{X} = 8t = 8\times1 = 8\,\text{см/с}; \qquad V_y = \dot{Y} = 2\,\text{см/с};$$
$$V_M = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = 8{,}3\,\text{см/с};$$

Поскольку $\mathbf{V_x > 0}$**,** то вектор скорости точки **M** направлен по касательной к траектории в положительном направлении с оси **OX**.

Ускорение точки M в момент времени t=1c определяется по формулам:

$$W_x = \ddot{X} = 8\,\text{см/с}^2; \qquad W_y = \ddot{Y} = 0;$$
$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = 8\,\text{см/с}^2;$$

Модуль касательного ускорения точки:

$$|W_\tau| = \left|\frac{V_x W_x + V_y W_y}{V}\right| = 7{,}7\,\text{см/с}^2;$$

Нормальное ускорение точки: $\quad W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = 2{,}2\,\text{см/с}^2;$

Радиус кривизны траектории: $\quad \rho = \dfrac{V}{W_n} = 31{,}1\text{см};$

Пример 2. (Вращательное движение тела)

Зубчатые колеса 1 и 2, находятся в зацеплении и приводятся во вращательное движение с помощью груза M, который опускается по закону $X=30t^2$ см для момента времени t=1c рассчитать : $\omega_2, \varepsilon_2, V_c, W_c$.

Решение

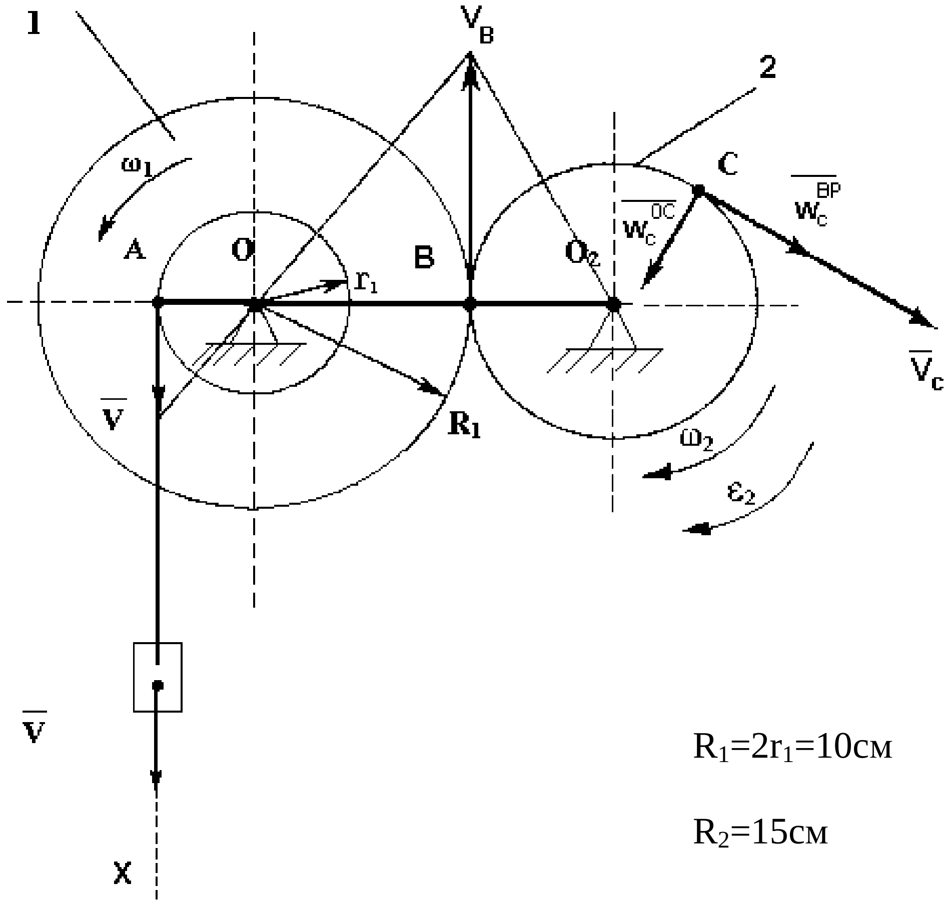
Скорости груза M и точки A определяются по формуле $V = \dot{X} = 60t;$

Угловая скорость колеса и скорость точки B:

$$\omega_1 = \frac{V}{r_1} = 6t; \; V_B = R_1 \cdot \omega_1 = 120t$$

Угловая скорость и угловое ускорение колеса 2 в момент времени t=1c будут:

$$\omega_2 = \frac{V_B}{R_2} = 8t = 8 \cdot 1 = 8c^{-1}; \quad \varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 8c^{-2};$$



R_1=2r_1=10см

R_2=15см

Скорость и ускорение точки С в момент времени t=1c рассчитывают так:

$$V_c = \omega_2 \cdot O_2C = \omega_2 \cdot R_2 = 120 см/с;$$

$$W_c = \sqrt{\left(W_c^{OC}\right)^2 + \left(W_c^{BP}\right)^2} = R_2\sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4} = 15\sqrt{8^2 + 8^4} = 967 см/с^2;$$

Пример 3. (Плоское движение тела)

Кривошип $O_1A = l_1$=0,4м плоского механизма вращается вокруг оси O, и посредством шатуна AB $= l_3$=1,4м приводит в движение ползун B, который перемещается в вертикальных направляющих. Другой шатун DE= l_2 =1,2м одним концом соединен в точке D, которая находится в середине шатуна AB, с шатуном AB, а другим - с ползуном E, который перемещается в неподвижных вертикальных направляющих.

Положение механизма определяется углами, заданными на чертеже. В данный момент величина скорости равна $У_в$ = 4м/с, а ее направление показано на чертеже.

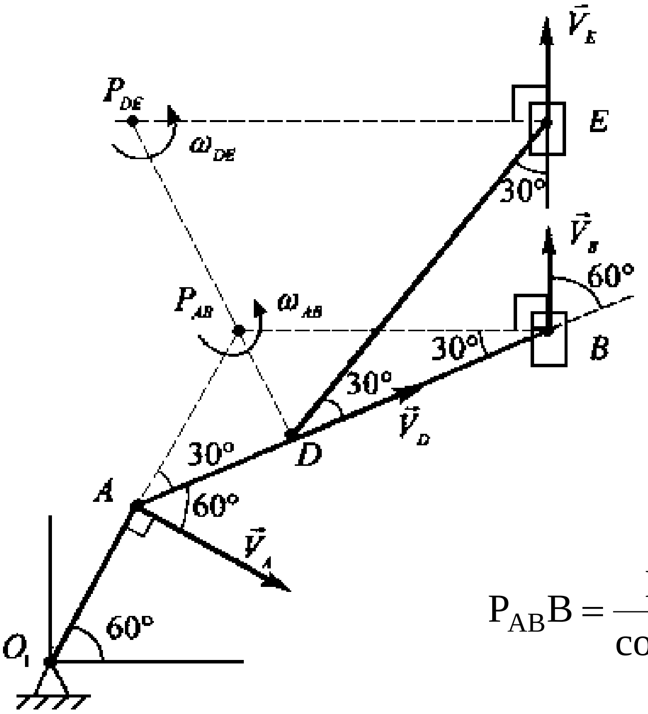
Для заданного положения механизма:

1.Построить мгновенные центры скоростей шатунов AB и DE.

2. Определить скорости V_A и V_E и угловую скорость ω_{AB} шатуна AB.

Решение задачи начинается с построения механизма с точным соблюдением заданной геометрии (углов).

AD=DB



1. Расчёт скорости точки *A* проводим по теореме проекций скоростей

$$V_A \cdot \cos 60^\circ = V_B \cdot \cos 60^\circ;$$

$$V_A = V_B = 4м/с;$$

2. Расчёт угловой скорости звена AB. Строим МЦС звена AB но общим правилам. Получаем точку

Тогда:

$$\omega_{AB} = \frac{V_B}{P_{AB}B};$$

$$P_{AB}B = \frac{DB}{\cos 30^\circ} = \frac{l_3}{2} \cdot \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1{,}4 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = 0{,}81м;$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_B}{P_{AB}B} = \frac{4}{0{,}81} = 4{,}94рад/с;$$

3. Расчёт скорости точки E. Вначале определяем скорость точки D ;

$$V_D = \omega_{AB} \cdot P_{AB}D = \omega_{AB} \cdot P_{AB}B \sin 30^\circ = 4{,}94 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}5 \approx 2м/с.$$

По теореме проекций скоростей имеем:

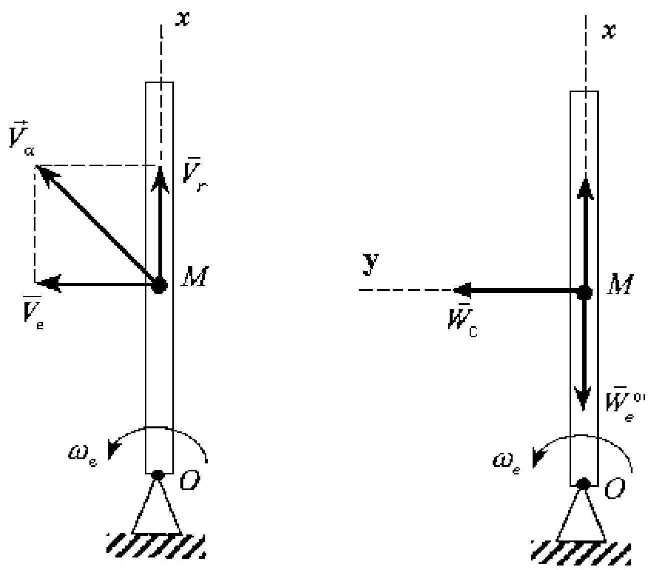
$$V_D \cdot \cos 30^\circ = V_E \cdot \cos 30^\circ; \qquad V_E = V_D = 2м/с.$$

4. Построение МЦС звеньев AB и DE . Проводится по общим правилам построения МЦС. Дня звена AB: проводим перпендикуляры к скоростям точек B и A. Точка пересечения их и есть МЦС звена AB. Это точка P_{AB}. Для звена DE: проводим перпендикуляры к скоростям точек D и E. Точка пересечения их и есть МЦС звена DE . Это тачка P_{DE}.

Направления угловых скоростей звеньев ω_{AB} и ω_{DE} определяются по направлениям линейных скоростей точек $\overline{V}_B$ и $\overline{V}_D$,

Пример 4.(Сложное движение точки)

Трубка совершает вращательное движение в плоскости чертежа вокруг оси, проходящей через точку О , с угловой скоростью $\omega = 4c^{-1}$; Вдоль трубки движется точка по закону $x = 2\text{-}t^2$см. Для момента времени t = 1с с начала движения, рассчитать абсолютные скорость и ускорение точки М.



Расчёт абсолютной скорости

Используется теорема сложения скоростей:

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_c;$$

Относительным движением точки является прямолинейное движение вдоль трубки по закону x = 2 • t^2, тогда:

$$V_{rx} = \dot{x} = 4t; \qquad V_r(t = 1c) = 4\,\text{см/с}.$$

Переносным движением для точки М является вращательное движение трубки. В момент t = 1с точка будет находиться на расстоянии от оси ОМ= $x_1 = 2\cdot 1^2$ =2см и её переносная скорость рассчитывается по формуле:

$$V_e = OM \cdot \omega_e = 4 \cdot 2 = 8\,\text{см/с}.$$

Построение абсолютной скорости приведено на рис. Её величина определяется так:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 8{,}9\,\text{см/с}$$

Расчёт абсолютного ускорения

Используется теорема сложения ускорений:

$$\overline{W}_a = \overline{W}_r + \overline{W}_e + \overline{W}_c \,. \qquad (1)$$

При прямолинейном относительном движении $\overline{W}_r$ определяется так:

$$W_{rx} = \ddot{x} = 4\,см/с^2 \Rightarrow W_r(t=1с) = 4 см/с^2$$

При вращательном переносном движении $\overline{W}_e$ рассчитывается по формулам:

$$\overline{W}_e = \overline{W}_e^{OC} + \overline{W}_e^{BP};$$

$$W_e^{OC} = \omega_e^2 \cdot OM; \qquad W_e^{BP} = \varepsilon_e \cdot OM; \qquad \varepsilon_e = \dot{\omega}_e;$$

В рассматриваемом случае $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 0$ и выполняется:

$$\overline{W}_e = \overline{W}_e^{OC}; \qquad W_e = W_e^{OC} = \omega_e^2 \cdot OM = 4 \cdot 2 = 8\,см/с^2$$

Ускорение Кориолиса рассчитывается по формуле:

$$\overline{W}_c = 2 \cdot \overline{\omega}_e \times \overline{V}_r; \quad W_c = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \sin(\omega_e, V_r);$$

$$W_c = 2\omega_e V_r \sin\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = 32\,см/с^2$$

В рассматриваемом случае:

Построение абсолютного ускорения приведено на рисунке. Для расчета W_a в точке M строятся оси X, Y, Z и соотношение (1) проектируется на оси с учетом построения (рис.):

$$W_c = W_{rx} + W_{ex} + W_{cx} = 4 - 8 + 0 = -4\ см/с^2.$$

Тогда

$$W_y = W_{ry} + W_{ey} + W_{cy} = 0 + 0 + 32 = 32\,см/с^2$$

$$W_z \equiv 0$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} = \sqrt{4^2 + 32^2} = 32{,}3\,см/с^2$$

Ответ:

V_a=8,9см/с $\qquad$ W_a=32,3см/с^2

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие для вузов / ред.: И.В. Мещерский, В.А. Пальмов, Д.Р. Меркин. – Изд. 50-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2010. – 447, [1] с.

2. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для вузов / под общ. ред. А.А. Яблонского. – 17-е изд., стер. – Москва: КНОРУС, 2010. – 385 [2] с.

3. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С.М. Тарг. – Изд. 18-е, стер. – Москва: Высш. шк, 2008. – 416 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Подписано в печать 30.10.2014. Усл. печ. л. . Тираж экз.
Печать офсетная. Бумага офисная. Заказ № _____

Отпечатано: РИО ВоГУ, г. Вологда, ул. С. Орлова, 6