Министерство образования и науки Российской Федерации

Вологодский государственный технический университет

Кафедра теории и проектирования машин и механизмов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания для самостоятельной работы студентов по разделу «Основные знания по статике»

Для студентов инженерно-технических специальностей
и направлений

Вологда
2013

УДК 531:681.3

Теоретическая механика: методические указания для самостоятельной работы студентов по разделу «Основные знания по статике». – Вологда: ВоГТУ, 2013. – 31 с.

Методические указания предназначены для студентов инженерно-технических специальностей и направлений бакалавриата. Указания содержат основные понятия и теоремы статики. Приведены примеры решения задач.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГТУ

Составитель В.Н. Русаков, ст. преподаватель

Рецензент В.А. Быстроумов, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики

1. Сила

Механическое взаимодействие тел - такое взаимодействие материальных тел, в результате которого они изменяют движение или деформируются.

Абсолютно твёрдое тело – тело, не деформирующееся при любых воздействиях. В теоретической механике рассматриваются только абсолютно твёрдые тела. Такая идеализация материальных тел вполне пригодна для решения задач теоретической механики.

Сила − мера механического взаимодействия материальных тел. Сила есть вектор.

Геометрически сила является направленным отрезком (рис. 1). При этом она характеризуется направлением, модулем и точкой приложения. Направление силы обычно задаётся её углами φ_1, φ_2, φ_3 с осями некоторой прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$, либо косинусами этих углов (направляющие косинусы).

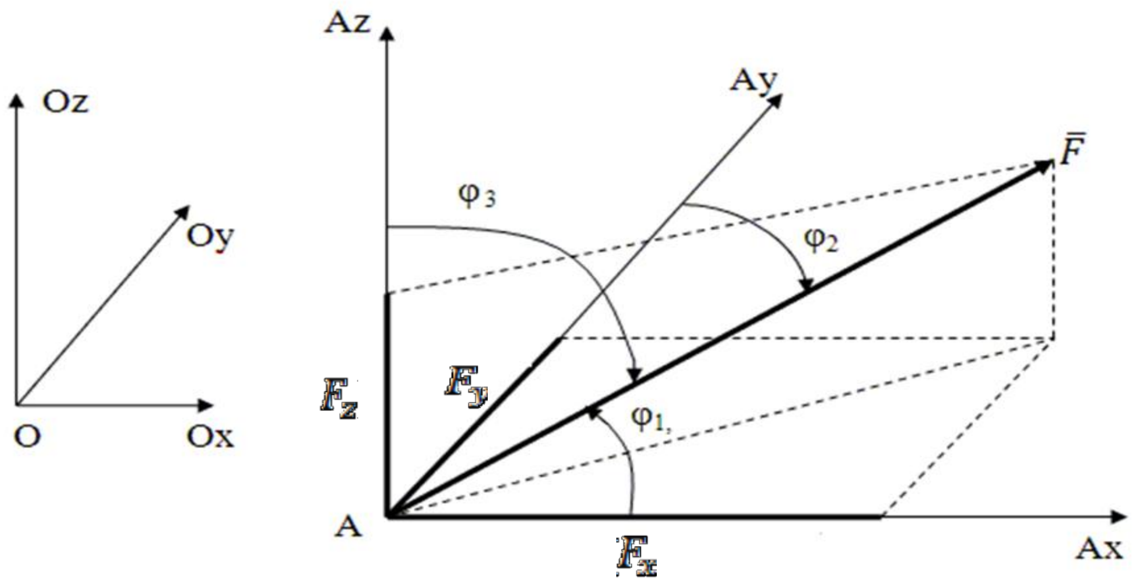


Рис. 1

Аналитически сила представляется через её проекции на оси прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ (рис. 1)

$$\bar{F} = (F_x, F_y, F_z), \tag{1}$$

при этом указываются координаты точки приложения силы.

В курсе математики рассматривались свободные векторы, точка приложения которых не существенна. Определено отношение равенства свободных векторов: два вектора $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$ называются равными $(\bar{a} = \bar{c})$, если они одинаково направлены и равны по модулю, т.е. $a_x = c_x,\ a_y = c_y,\ a_z = c_z$. Для векторов были определены операции векторного сложения и умножения на число. Всё это в известном смысле используется и при рассмотрении сил.

2. Эквивалентные системы сил

Свободное тело – тело, движение которого не ограничено. Если на движение тела наложены ограничения, то оно называется несвободным.

Две системы сил $\{\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_K\}, \{\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_N\}$ называются эквивалентными, если замена одной из них на другую не изменяет движение свободного тела, к которому они прикладываются. При этом используется обозначение

$$\{\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_K\} \sim \{\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_N\}.$$

Система сил $\{\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_N\}$ называется эквивалентной нулю (уравновешенной), если её добавление (отнятие) к действующим на свободное тело силам не изменяет движение этого тела. При этом используется следующее обозначение

$$\{\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_N\} \sim \bar{0}.$$

Если система сил $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N\}$ эквивалентна одной силе $\bar{F},$ т.е.

$$\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N\} \sim \bar{F},$$

то сила $\bar{F}$ называется равнодействующей данной системы сил.

3. Основные задачи статики

В статике рассматриваются задачи о равновесии твердых тел, имеющие большое практическое значение.

Полагая тела твердыми, тем самым абстрагируются (отвлекаются) от свойства материального тела реагировать на силовое воздействие изменением формы. Поэтому задачи о равновесии твердых тел формулируются и решаются в терминах сил, действующих на эти тела.

Основу статики составляет математическая теория, в которой объектом изучения является система действующих на тело сил $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N\}$. Предназначение этой теории заключается в решении следующих задач.

Первая основная задача статики: приведение системы сил $\{\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_N\}$ к наиболее простой эквивалентной системе сил.

Вторая основная задача статики: вывод условий равновесия (эквивалентности нулю) системы сил $\{\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_N\}$.

4. Исходные положения статики

Равновесие тела есть частный случай движения тела. Поэтому вся исходная информация, необходимая для построения теории решения двух основных задач статики, содержится в аксиомах динамики (законах Ньютона). Выделяя эту исходную информацию из аксиом динамики и их логических следствий, представим ее в виде двух следующих утверждений.

Утверждение 1. Силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2$ эквивалентны $(\bar{F}_1 \sim \bar{F}_2)$ тогда и только тогда, когда они равны $(\bar{F}_1 = \bar{F}_2)$ и лежат на одной прямой (рис. 2).

Следовательно, силу можно переносить вдоль линии действия, т.е. сила есть скользящий вектор.

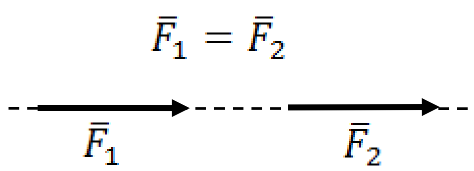


Рис. 2

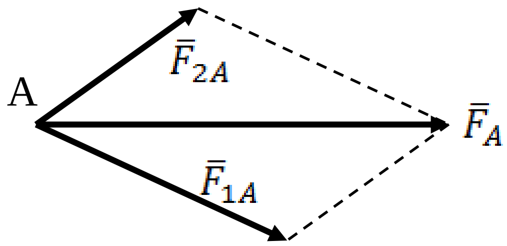


Рис. 3

Утверждение 2. Приложенные в одной точке силы $\bar{F}_{1A}, \bar{F}_{2A}$ имеют равнодействующую $\bar{F}_A$, которая совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 3), т.е.

$$\{\bar{F}_{1A}, \bar{F}_{2A}\} \sim \bar{F}_A, \quad \text{где } \bar{F}_A = \bar{F}_{1A} + \bar{F}_{2A}.$$

Из данных утверждений следует, что система из двух сил, лежащих на одной прямой, противоположно направленных и равных по модулю эквивалентна нулю (уравновешена).

Согласно определению уравновешенной системы сил, при добавлении (отбрасывании) к произвольной системе сил любой уравновешенной системы сил получим систему сил эквивалентную исходной, т.е.

$$\{\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_K\} \sim \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \{\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_N\} \sim \{\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_N, \bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_K\}.$$

При решении задач на равновесие системы взаимодействующих тел дополнительно используют третий закон Ньютона: силы взаимодействия двух тел равны по модулю, лежат на одной прямой и противоположно направлены (рис.4).

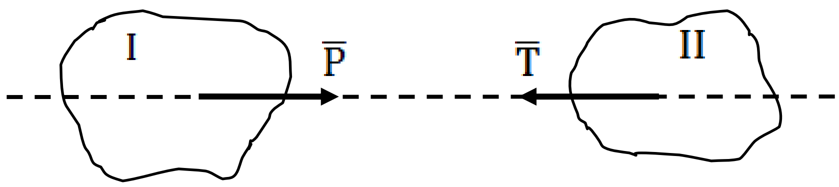


Рис. 4

Содержащиеся в утверждениях 1, 2 знания, по сути, были известны задолго до эпохи Ньютона. Например, задачи на равновесие тела решал ещё древнегреческий учёный Архимед. Следуя историческому пути развития механики, статику часто преподают до динамики. При этом изложенные в данном параграфе исходные положения статики постулируют в той или иной форме.

5. Векторный момент силы относительно точки

Сначала примем во внимание простую физическую модель, легко реализуемую авторучкой и тремя пальцами руки. Пусть стержень OA соединён с неподвижным телом посредством пространственного шарнира O (рис. 5), что позволяет стержню перемещаться в пространстве, сохраняя неподвижной точку O. Если к покоящемуся стержню приложить силу $\overline{F}$, то стержень придёт в движение, которое мгновенно является вращением относительно оси, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости стержня и силы.

Та часть действия силы на материальное тело, которая проявляется в придании телу вращения, называется вращательным эффектом силы. Многовековая практика и многочисленные опыты показали, что величина вращательного эффекта силы прямо пропорциональна F – величине силы и h – расстоянию от центра вращения до линии действия силы.

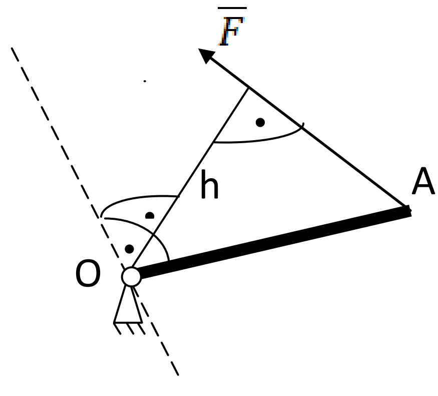


Рис. 5

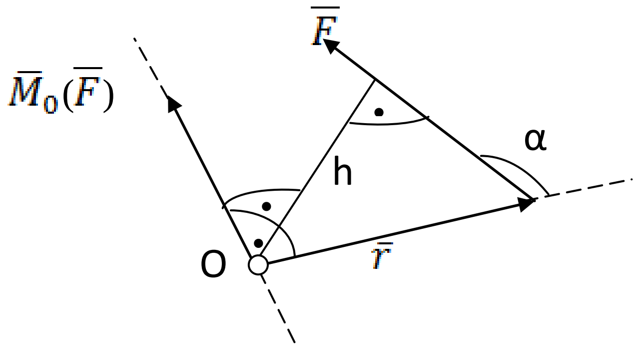


Рис. 6

Теперь оформим математически указанные физические представления. Абстрагируемся от материального тела, на которое действует сила, имея в виду только силу $\overline{F}$ и точку O (рис. 6). Вектор, исходящий из точки O и приходящий в точку приложения силы $\overline{F}$, обозначим через $\overline{r}$. Угол между векторами $\overline{r}$ и $\overline{F}$ обозначим через α .

Основываясь на вышеизложенном, заключаем, что вращательный эффект силы $\overline{F}$ относительно точки O характеризуется:

a) осью вращательно эффекта, которая проходит через точку O перпендикулярно плоскости векторов $\overline{r}$, $\overline{F}$,

b) направлением вращательного эффекта относительно его оси (это направление принято сравнивать с направлением хода часовой стрелки),

c) величиной вращательного эффекта, равной F·h, где F – модуль силы $\overline{F}$, h – плечо силы $\overline{F}$ относительно точки O , т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы $\overline{F}$ ($h = r \cdot \sin\alpha$).

Данная информация о вращательном эффекте силы $\overline{F}$ относительно точки O математически выражается вектором $\overline{M}_0(\overline{F})$ – векторным моментом силы $\overline{F}$ относительно точки O (рис. 6), который

1) перпендикулярен плоскости векторов $\overline{r}$, $\overline{F}$ (тем самым вектор $\overline{M}_0(\overline{F})$ показывает положение в пространстве оси вращательного эффекта, проходящей через точку O),

2) направлен так, что с его конца вращательный эффект виден против хода часовой стрелки,

3) по модулю равен произведению модуля силы и плеча этой силы относительно точки O , т.е. $|\overline{M}_0(\overline{F})| = F \cdot h = |\overline{F}| \cdot |\overline{r}| \cdot \sin\alpha$

Пункты 1) – 3) определяют отображение

$$\overline{r}\,,\overline{F} \;\rightarrow\; \overline{M}_0(\overline{F})\,,$$

называемое векторным произведением векторов $\overline{r}$ и $\overline{F}$, причем используется следующее обозначение

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}\,. \tag{2}$$

Если векторы $\overline{r}$, $\overline{F}$ заданы аналитически, т.е

$$\bar{r} = r_x\bar{i} + r_y\bar{j} + r_z\bar{k}, \qquad \bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k},$$

где $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ – направляющие орты осей правой прямоугольной декартовой системы координат, то аналитическое представление вектора $\bar{M}_0(\bar{F})$ находится по следующему известному из математики правилу

$$\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(r_yF_z - r_zF_y\right)\bar{i} + \left(r_zF_x - r_xF_z\right)\bar{j} + \left(r_xF_y - r_yF_x\right)\bar{k}. \qquad (3)$$

Данная формула (3) используется для вычисления векторного момента $\bar{M}_0(\bar{F})$ в компьютерных программах.

6. Алгебраический момент силы относительно точки

Выделим частный случай, когда все рассматриваемые силы лежат в одной плоскости (плоская система сил). Причём вращательные эффекты сил вычисляются только относительно точек той же плоскости. С плоскостью сил совместим координатную плоскость Oxy (рис. 7). Ось Oz направим перпендикулярно Oxy так, что Oxyz является правой системой координат.

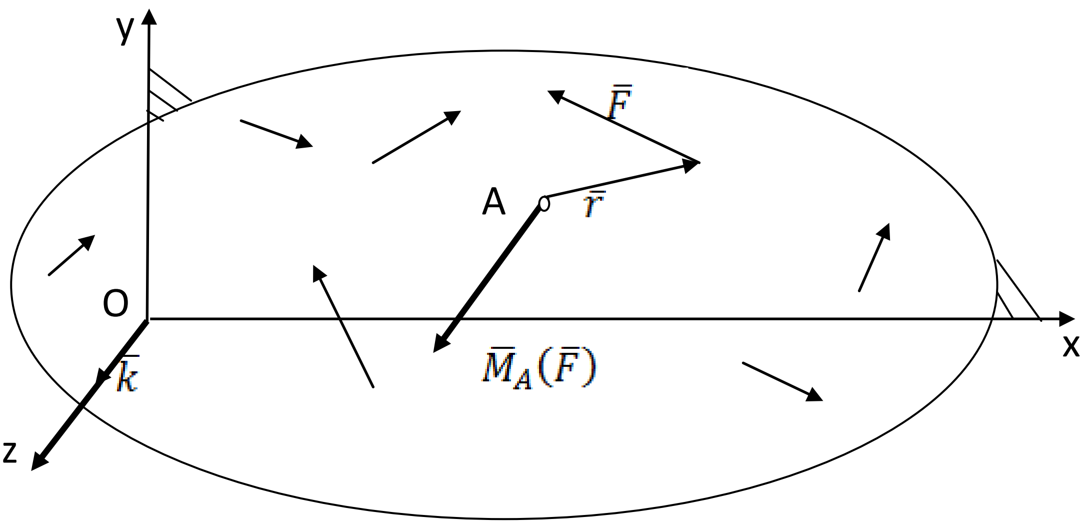


Рис. 7

В данном частном случае векторный момент силы $\bar{F}$ относительно точки A коллинеарен оси Oz для любой силы $\bar{F}$ и любой точки A, лежащих в плоскости Oxy, т.е.

$$\bar{M}_A(\bar{F}) = \left(\text{пр}_z \bar{M}_A(\bar{F})\right)\bar{k},$$

где $\text{пр}_z \bar{M}_A(\bar{F})$ – проекция вектора $\bar{M}_A(\bar{F})$ на ось Oz , $\bar{k}$ – направляющий орт оси Oz . Следовательно, вращательный эффект силы $\bar{F}$ относительно точки A полностью характеризуется скаляром

$$\text{m}_A(\bar{F}) = \text{пр}_z \bar{M}_A(\bar{F}), \tag{4}$$

называемым алгебраическим моментом силы $\bar{F}$ относительно точки A.

Согласно уравнениям (4), (3), имеем

$$\text{m}_A(\bar{F}) = r_x F_y - r_y F_x \ , \tag{5}$$

где r_x, r_y – координаты вектора $\bar{r}$, исходящего из точки A и приходящего в точку приложения силы $\bar{F}$ (рис. 7), F_x, F_y – координаты силы $\bar{F}$. Данная формула (5) используется для вычисления $\text{m}_A(\bar{F})$ в компьютерных программах.

Основываясь на соотношении (4), установим следующее правило непосредственного вычисления $\text{m}_A(\bar{F})$, которое используется при решении задач вручную.

Алгебраический момент силы $\bar{F}$ относительно точки A равен произведению модуля F этой силы и плеча h этой силы относительно точки A, взятому со знаком плюс, если вращательный эффект силы $\bar{F}$ относительно точки A направлен против хода часовой стрелки, и взятому со знаком минус, если вращательный эффект силы $\bar{F}$ относительно точки A направлен по ходу часовой стрелки, т.е.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{m}_A(\bar{F}) = \pm\, \text{F}\cdot\text{h}, \\ \text{правило знаков:} \ \circlearrowleft + \quad \circlearrowright - \ , \end{array}\right. \tag{6}$$

где h есть длина перпендикуляра, опущенного из точки A на линию действия силы $\bar{F}$ (рис. 8).

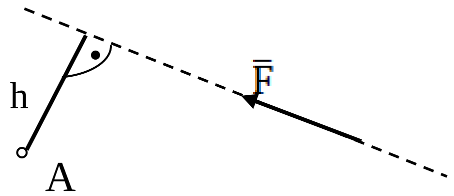


Рис. 8

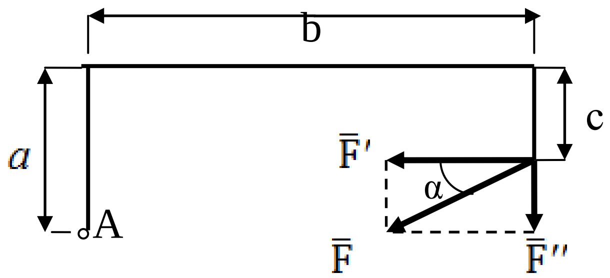


Рис. 9

Замечание. Если при вычислении момента силы затруднительно найти плечо, то нужно разложить силу на составляющие, у которых плечи определяются просто, и вычислить момент исходной силы как сумму моментов этих составляющих. Например (рис.9),

$$m_A(\bar{F}) = m_A(\bar{F}') + m_A(\bar{F}'') = F\cos\alpha \cdot (a - c) - F\sin\alpha \cdot b\,.$$

7. Момент силы относительно оси

Будем основываться на следующей физической модели. Сила $\bar{F}$ приложена к телу, которое может вращаться относительно неподвижной оси (рис.10). По оси вращения тела направим координатную ось Oz.

Та часть действия на тело силы $\bar{F}$, которая проявляется в придании телу вращения относительно оси Oz, называется вращательным эффектом силы $\bar{F}$ относительно оси Oz.

Рассматриваемый вращательный эффект характеризуется его величиной и направлением относительно оси Oz. Эта информация о вращательном эффекте математически выражается скаляром $M_z(\bar{F})$ – моментом силы $\bar{F}$ относительно оси Oz. Модуль скаляра $M_z(\bar{F})$ равен величине вращательного эффекта, а знак $M_z(\bar{F})$ показывает направление вращательного эффекта относительно оси Oz.

Установим как задаются модуль и знак момента $M_z(\bar{F})$, согласуясь с известными определениями (2, 6) моментов $\bar{M}_O(\bar{F})$, $m_A(\bar{F})$.

Разложим силу $\bar{F}$ на составляющие $\bar{F}'$, перпендикулярную оси Oz, и $\bar{F}''$, коллинеарную оси Oz (рис.10). Понятно, что $\bar{F}''$ не придает телу вращение относительно оси Oz, т.е. $M_z(\bar{F}'') = 0$. Следовательно, вращательный эффект силы $\bar{F}$ относительно оси Oz сосредоточен в её составляющей $\bar{F}'$, т.е. $M_z(\bar{F}) = M_z(\bar{F}')$.

Обозначим через A точку пересечения оси Oz с плоскостью, проходящей через силу $\bar{F}'$ и перпендикулярной оси Oz. Многовековая практика и многочисленные эксперименты показали, что величина вращательного эффекта силы $\bar{F}'$ относительно оси Oz прямо пропорциональна модулю F' этой силы и расстоянию h' от точки A до линии действия силы $\bar{F}'$. Поэтому величина вращательного эффекта силы $\bar{F}'$ относительно оси Oz установлена равной $F' \cdot h'$, т.е. $|M_z(\bar{F}')| = F' \cdot h'$.

Таким образом,

$$M_z(\bar{F}) = \pm F' \cdot h', \qquad (7)$$

где знак плюс принято выбирать, когда со стороны положительного направления оси Oz вращательный эффект силы $\bar{F}$ (силы $\bar{F}'$) виден направленным против хода часовой стрелки.

Из формулы (7) следует, что момент относительно оси Oz векторной проекции силы $\bar{F}$ в любую перпендикулярную оси Oz плоскость равен $M_z(\bar{F})$. Это замечание способствует рациональному вычислению $M_z(\bar{F})$.

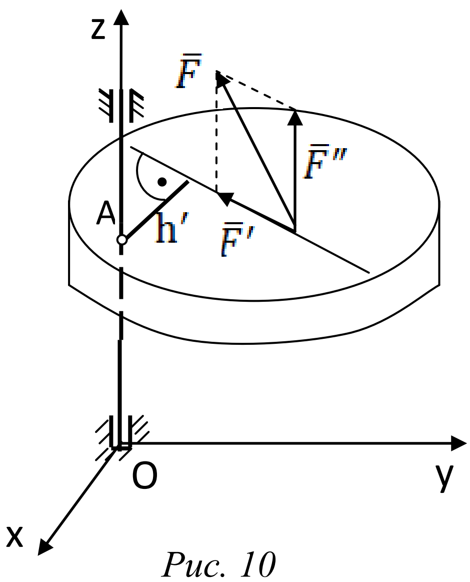


Рис. 10

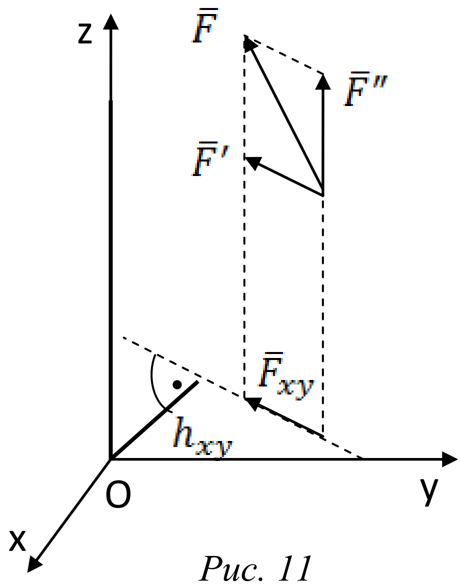


Рис. 11

Формализуем рассматриваемое понятие, абстрагируясь от материального тела, к которому приложена сила. Имеем в виду только силу $\bar{F}$ и произвольную z-ось в пространстве (рис. 11) .

Выберем любую точку O на z-оси и построим координатные оси Ox, Oy так, что Oxyz является правой прямоугольной декартовой системой координат.

Указанные выше физические обоснования, выразившиеся в составлении формулы (7), приводят к следующему определению.

Моментом силы $\bar{F}$ относительно оси Oz называется скаляр $M_z(\bar{F})$, вычисляемый по формуле

$$M_z(\bar{F}) = m_0(\bar{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h_{xy}, \qquad (8)$$

где $\bar{F}_{xy}$ – векторная проекция силы $\bar{F}$ в плоскость Oxy, $m_0(\bar{F}_{xy})$ – алгебраический момент силы $\bar{F}_{xy}$ относительно точки O, F_{xy} – модуль силы, $\bar{F}_{xy}$, h_{xy} – плечо силы $\bar{F}_{xy}$ относительно точки O, знак плюс соответствует случаю, когда со стороны положительного направления оси Oz вращательный эффект силы $\bar{F}_{xy}$ относительно оси Oz виден направленным против хода часовой стрелки.

Пусть сила рассматривается геометрически, т.е. представлена направленным отрезком. Согласно определению (8), чтобы вручную найти момент силы относительно оси надо

1) спроецировать силу в любую плоскость, перпендикулярную оси,

2) вычислить алгебраический момент векторной проекции силы относительно точки пересечения оси с плоскостью, в которую спроецировали силу (при определении знака алгебраического момента надо смотреть в эту плоскость со стороны положительного направления оси).

Выясним, как найти момент силы относительно оси, когда сила задана аналитически. Согласно соотношениям (8), (5), имеем

$$\mathrm{M}_z(\bar{F}) = \mathrm{x}F_y - \mathrm{y}F_x \,,$$

где x , y – абсцисса и ордината точки приложения и силы $\bar{F}_{xy}$ и силы $\bar{F}$, F_x , F_y – проекции на оси Ox, Oy и силы $\bar{F}_{xy}$ и силы $\bar{F}$. Сравнивая данное уравнение с уравнением (3), получим формулу

$$\mathrm{M}_z(\bar{F}) = \text{пр}_z \bar{M}_O(\bar{F}).$$

В данной формуле имя оси не существенно, т.к. ранее отмечалось, что z-ось есть произвольная ось в пространстве. Поэтому, чтобы подчеркнуть общность, представим формулу в виде

$$\mathrm{M}_\ell(\bar{F}) = \text{пр}_\ell \bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{M}_O(\bar{F})\cdot\bar{\ell}\,, \tag{9}$$

где ℓ – произвольная ось в пространстве, $\bar{\ell}$ – направляющий орт ℓ-оси, O – любая точка оси ℓ. Согласно уравнению (9), момент силы $\bar{F}$ относительно произвольной оси ℓ равен проекции на эту ось векторного момента силы $\bar{F}$, вычисленного относительно любой точки O этой оси.

Из уравнений (9), (3) следуют используемые в компьютерных программах выражения для моментов силы $\bar{F}$ = (F_x,F_y,F_z) относительно координатных осей Ox, Oy, Oz :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_x(\bar{F}) &= \mathrm{y}F_z - \mathrm{z}F_y,\\
\mathrm{M}_y(\bar{F}) &= \mathrm{z}F_x - \mathrm{x}F_z,\\
\mathrm{M}_z(\bar{F}) &= \mathrm{x}F_y - \mathrm{y}F_x,
\end{aligned} \tag{10}$$

где x, y, z – координаты точки приложения силы $\bar{F}$.

Пример. Найдём вручную моменты относительно координатных осей силы $\bar{F}$, расположенной на грани прямоугольного параллелепипеда (рис. 12).

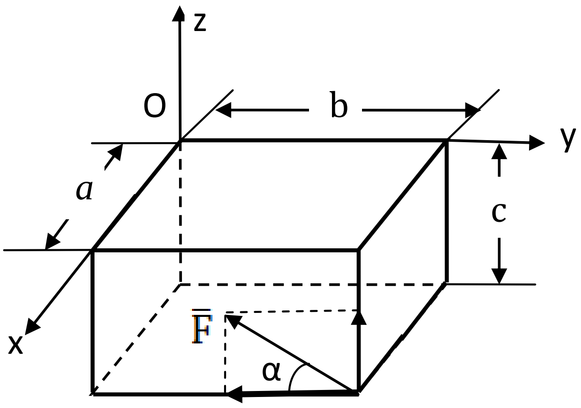


Рис. 12

Дано: a, b, c, $\bar{F} \parallel Oyz$, F, α .

Решение:

$$M_x(\bar{F}) = -F\ \cos\alpha \cdot c + F\ \sin\alpha \cdot b,$$

$$M_y(\bar{F}) = -F\ \sin\alpha \cdot a,$$

$$M_z(\bar{F}) = -F\ \cos\alpha \cdot a.$$

8. Пара сил

Пара сил (пара) – система из двух сил, лежащих на параллельных прямых, противоположно направленных и равных по модулю (рис. 13).

Расстояние h между линиями действия сил пары называется плечом пары сил.

Пара сил не имеет равнодействующую, т.е. пара сил есть неупрощаемая система сил.

Воздействие пары сил на свободное тело состоит в создании вращательного эффекта. Конкретнее говоря, если к покоящемуся свободному телу приложить пару сил, то оно начёт вращаться относительно оси, проходящей через неподвижный центр масс тела и перпендикулярной плоскости пары сил.

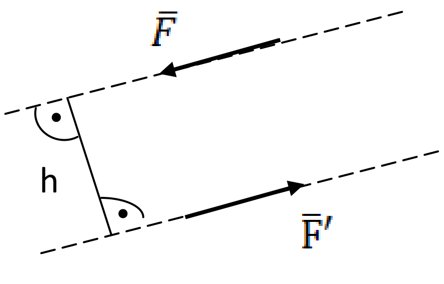


Рис. 13

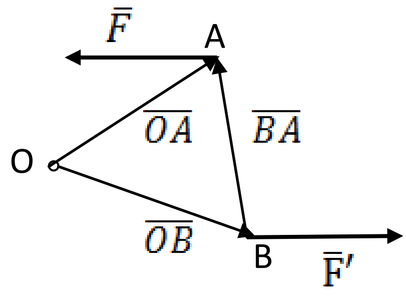


Рис. 14

Вращательный эффект пары сил складывается из вращательных эффектов сил, составляющих пару. Выведем выражение для математической характеристики вращательного эффекта пары сил, т.е. для момента пары сил.

Выберем произвольную точку O в пространстве и найдём сумму векторных моментов сил пары $\{\bar{F}, \bar{F}'\}$ относительно этой точки (рис. 14):

$$\bar{M}_0(\bar{F}) + \bar{M}_0(\bar{F}') = \overline{OA} \times \bar{F} + \overline{OB} \times \bar{F}' = \overline{OA} \times \bar{F} + \overline{OB} \times (-\bar{F}) =$$

$$= (\overline{OA} - \overline{OB}) \times \bar{F} = \overline{BA} \times \bar{F}.$$

Видим, что сумма векторных моментов сил пары относительно точки O не зависит от выбора этой точки.

Определение. Моментом пары сил $\{\bar{F}, \bar{F}'\}$ называется вектор (рис. 15)

$$\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}') = \bar{M}_0(\bar{F}) + \bar{M}_0(\bar{F}') = \overline{BA} \times \bar{F}, \qquad (11)$$

который, согласно формуле (11),

1) перпендикулярен плоскости пары сил (точка приложения этого вектора не определена),
2) направлен так, что с его конца вращательный эффект пары сил виден против хода часовой стрелки,
3) по модулю равен произведению модуля силы пары F и плеча пары h, т.е $|\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}')| = F \cdot h$.

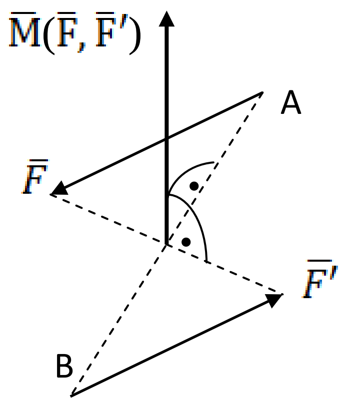


Рис. 15

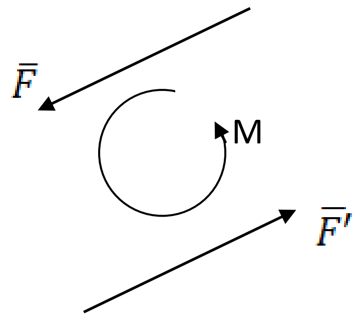


Рис. 16

Момент пары сил часто удобно изображать ориентированной дугой, лежащей в плоскости пары и показывающей направление вращательного эффекта пары сил (рис. 16). Рядом с этой дугой указывается модуль момента пары сил.

Утверждение. Две пары сил эквивалентны тогда и только тогда, когда их векторные моменты равны, т.е.

$$\{\bar{F}_1, \bar{F}_1'\} \sim \{\bar{F}_2, \bar{F}_2'\} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{M}(\bar{F}_1, \bar{F}_1') = \bar{M}(\bar{F}_2, \bar{F}_2'). \qquad (12)$$

Данное утверждение делает явными следующие свойства пары сил (подразумевается, что пара сил всегда расположена в пределах твёрдого тела, на которое она действует).

1. Пару сил можно как угодно перемещать в плоскости ее действия.
2. Пару сил можно переносить в любую параллельную ей плоскость.
3. Можно изменять модуль силы и плечо пары сил, сохраняя постоянным их произведение.

Свойства 1, 2 показывают, что момент пары сил есть свободный вектор. Поэтому момент пары можно располагать произвольно в пределах тела, на которое действует пара.

Согласно утверждению (12), пара сил полностью характеризуется ее моментом. Поэтому часто изображают не саму пару сил, а ее момент. При этом говорят, что на тело действует момент, подразумевая, что на тело действует пара сил.

Понятие момента пары сил весьма полезно, т.к. позволяет выразить механическое воздействие на тело пары сил $\{\bar{F}, \bar{F}'\}$ одним вектором $\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}')$. В терминах моментов пар формулируется и решение двух основных задач статики для системы пар.

Утверждение. Всякая система пар сил эквивалентна одной паре сил, момент которой равен сумме моментов исходных пар, т.е.

$$\{(\bar{F}_k, \bar{F}_k'),\ k = 1, \dots, N\} \sim \{\bar{F},\ \bar{F}'\}, \quad \bar{M}(\bar{F}, \bar{F}') = \sum \bar{M}\,(\bar{F}_k, \bar{F}_k'). \tag{13}$$

Утверждение. Система пар сил эквивалентна нулю (уравновешена) тогда и только тогда, когда сумма моментов этих пар равна нулю, т.е.

$$\{(\bar{F}_k, \bar{F}_k'),\ k = 1, \dots, N\} \sim \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \sum \bar{M}\,(\bar{F}_k, \bar{F}_k') = \bar{0}. \tag{14}$$

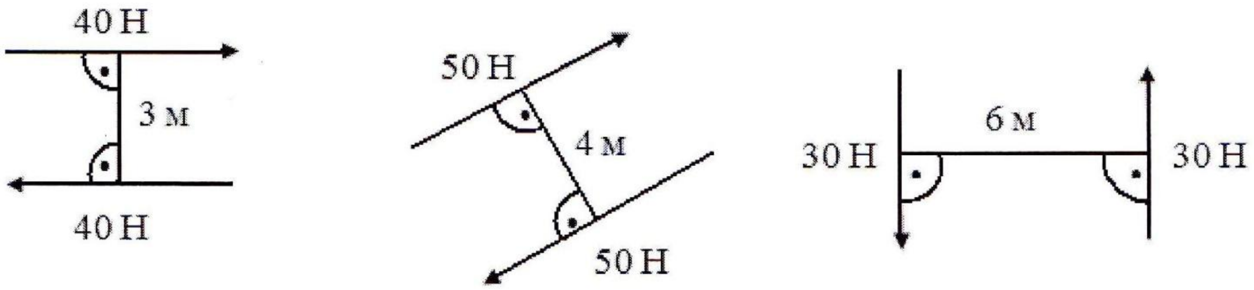
Замечание. В выражениях типа $\sum W_k$ подразумевается, что суммирование проводится по целочисленному индексу k, которой пробегает все свои значения.

Пусть рассматриваемые пары сил лежат в одной плоскости, с которой совместим координатную плоскость Oxy правой прямоугольной декартовой системы координат Oxyz. В этом частном случае векторные моменты всех пар коллинеарны оси Oz . Поэтому каждая пара сил $\{\bar{F},\ \bar{F}'\}$ полностью определяется скаляром

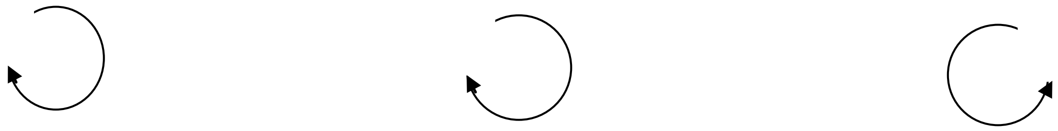
$$M_z(\bar{F}, \bar{F}') = \text{пр}_z\bar{M}\,(\bar{F}, \bar{F}') = \pm\, F \cdot h\,, \tag{15}$$

называемым алгебраическим моментом пары сил. Где F – модуль силы пары, h – плечо пары, знак плюс выбираем, когда вращательный эффект пары сил направлен против хода часовой стрелки (подразумевается, что в плоскость сил Oxy смотрим со стороны положительного направления оси Oz).

Пример. Плоскую систему трёх пар сил приведём к одной паре сил.



Представляем пары сил их моментами:



$M_1 = 120$ Н·м $\qquad$ $M_2 = 200$ Н·м $\qquad$ $M_3 = 180$ Н·м

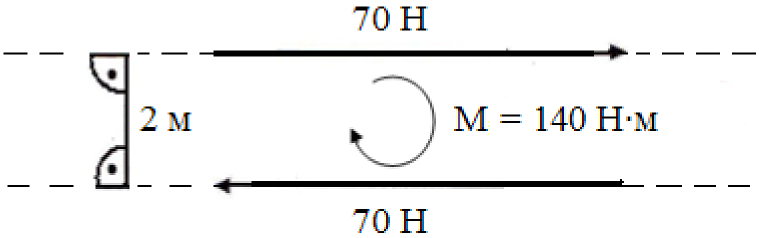
где M_1, M_2, M_3 – модули моментов соответствующих пар. Алгебраические моменты пар сил следующие:

$$M_{1z} = -120 \text{ Н·м}, \qquad M_{2z} = -200 \text{ Н·м}, \qquad M_{3z} = 180 \text{ Н·м}.$$

Находим алгебраический момент результирующей пары сил

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} = -120 - 200 + 180 = -140 \text{ Н·м},$$

после чего изображаем результирующий момент и показываем один из возможных конкретных образов результирующей пары сил.



9. Основная теорема статики

Результат решения первой основной задачи статики (приведение системы сил к простейшему виду) следующий.

Теорема Пуансо. Всякую систему действующих на тело сил $\{\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_N\}$ можно привести относительно произвольной точки O тела (центра приведения) к эквивалентной системе сил, состоящей из силы $\bar{F}_0$, равной сумме исходных сил и приложенной в точке O, и пары сил с моментом $\bar{M}_0$, равным сумме моментов исходных сил относительно точки O, т.е.

$$\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N\} \sim \{\bar{F}_0 \,;\, \bar{M}_0\}, \qquad \bar{F}_0 = \sum \bar{F}_k, \quad \bar{M}_0 = \sum \bar{M}_0\,(\bar{F}_k). \tag{16}$$

Согласно теореме Пуансо, воздействие на твёрдое тело системы сил $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N\}$ можно выразить двумя векторами $\bar{F}_0$, $\bar{M}_0$. Поэтому используются следующие названия, отражающие важность этих векторов.

Главным вектором системы сил $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N\}$ называется вектор $\bar{F}$, равный сумме этих сил, т.е.

$$\bar{F} = \sum \bar{F}_k\,. \tag{17}$$

Замечание. Точка приложения вектора $\bar{F}$ не конкретизирована. Через $\bar{F}_0$ обозначается главный вектор системы сил, приложенный в центре O .

Главным моментом системы сил $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N\}$ относительно центра O называется вектор $\bar{M}_0$, равный сумме моментов этих сил относительно данного центра, т.е.

$$\bar{M}_0 = \sum \bar{M}_0\,(\bar{F}_k)\,. \tag{18}$$

Главный вектор и главный момент важны не только математически, но и физически. Так как определить опытным путём отдельно действующие на тело силы часто невозможно, а главный вектор и главный момент определяются сравнительно легко. Например, рассмотрим вал, находящийся в подшипниках скольжения. При вращении вала на точки его поверхности действуют со стороны подшипника силы трения. Число точек контакта и модули сил трения, как правило, не известны. Не всегда их можно определить и с помощью эксперимента, однако простым измерением находиться сумма моментов всех сил трения относительно оси вращения, т.е. главный момент сил трения.

Связь между элементами приведения системы сил $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N\}$ к простейшему виду относительно разных центров A и B выражается формулами

$$\bar{F}_B = \bar{F}_A = \sum \bar{F}_k\,, \tag{19}$$

$$\bar{M}_B = \bar{M}_A + \overline{BA} \times \bar{F}_A = \bar{M}_A + \bar{M}_B(\bar{F}_A)\,. \tag{20}$$

Пример. Плоскую систему сил $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_8\}$ (рис. 17) приведём к главному вектору и главному моменту относительно центра В. Все силы и точка В заданы графически на равномерной сетке, масштабы указаны на рисунке.

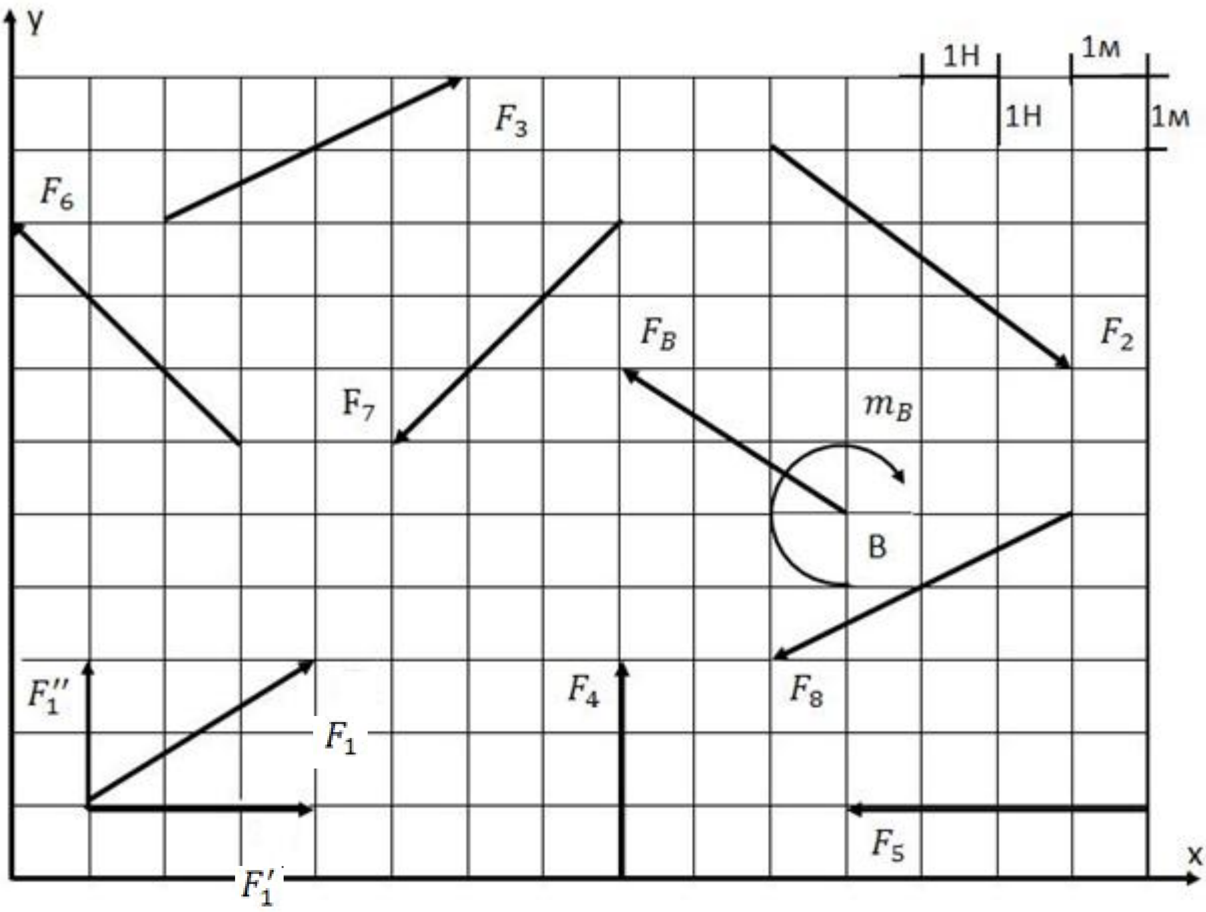


Рис. 17

Введём систему координат как показано на рис. 17. Представим силы аналитически:

$$\bar{F}_1 = (3, 2), \quad \bar{F}_2 = (4, -3), \quad \bar{F}_3 = (4, 2), \quad \bar{F}_4 = (0, 3),$$

$$\bar{F}_5 = (-4, 0), \quad \bar{F}_6 = (-3, 3), \quad \bar{F}_7 = (-3, -3), \quad \bar{F}_8 = (-4, -2).$$

Находим координаты главного вектора данной системы сил:

$$F_x = \sum F_{kx} = 3+4+4+0-4-3-3-4 = -3Н,$$

$$F_y = \sum F_{ky} = 2-3+2+3+0+3-3-2 = 2Н.$$

Находим главный алгебраический момент системы сил относительно центра В , причём алгебраический момент каждой силы $\bar{F}_k$ $(k = 1, \dots, 8)$ вычисляем как сумму моментов её составляющих $\bar{F}'_k$, $\bar{F}''_k$, коллинеарных координатным осям:

$$m_{Bz} = \sum m_B(\bar{F}_k) = \sum(m_B(\bar{F}'_k) + m_B(\bar{F}''_k)) =$$

$$= (3 \cdot 4 - 2 \cdot 10) + (-4 \cdot 5 + 3 \cdot 1) + (-4 \cdot 4 - 2 \cdot 9) + (-3 \cdot 3) + (-4 \cdot 4) +$$

$$+(3 \cdot 1 - 3 \cdot 8) + (3 \cdot 4 + 3 \cdot 3) + (-2 \cdot 3) = -90\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Главный алгебраический момент относительно центра B системы сил $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_8\}$ следующий

$$m_{Bz} = -90\ \text{Н} \cdot \text{м} \qquad (m_B = |m_{Bz}| = 90\ \text{Н} \cdot \text{м}).$$

Изображаем на рис. 17 главный вектор $\bar{F}_B$ и главный момент m_{Bz}. На этом пример завершён.

Обычным упрощением произвольной системы сил является её эквивалентное преобразование к силе и паре сил (моменту). Возможен и другой вариант упрощения систем сил. Произвольная система сил может быть приведена к двум силам, в общем случае не лежащим в одной плоскости.

10. Уравнения равновесия системы сил

Результат решения второй основной задачи статики (вывод условий эквивалентности нулю системы сил) следующий.

Теорема. Для равновесия (эквивалентности нулю) системы сил $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N\}$

необходимо и достаточно, чтобы сумма этих сил равнялась нулю, и чтобы сумма элементов этих сил относительно произвольной точки O пространства

$$\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N\} \sim 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum \bar{F}_k = \bar{0}, \ \ \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k) = \bar{0}. \tag{21}$$

равнялась нулю, т.е.

Данная теорема выводится из теоремы Пуансо (основная теорема статики) с учетом, что сила и пара сил не могут уравновесить друг друга.

Уравнения

$$\sum \bar{F}_k = \bar{0}, \ \ \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k) = \bar{0} \tag{22}$$

называются уравнениями равновесия пространственной системы сил $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N\}$ в векторной форме.

Проецируя векторные уравнения (22) на оси декартовой системы координат Oxyz (рис.18) получаем уравнения равновесия пространственной системы сил в $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N\}$ скалярной форме

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum F_{ky} = 0, \qquad \sum F_{kz} = 0,$$
$$\sum M_x(\bar{F}_k) = 0, \qquad \sum M_y(\bar{F}_k) = 0, \qquad \sum M_z(\bar{F}_k) = 0, \tag{23}$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} - проекции силы $\bar{F}_k$ на оси Ox, Oy, Oz соответственно, $M_x(\bar{F}_k)$, $M_y(\bar{F}_k)$, $M_z(\bar{F}_k)$ – моменты силы $\bar{F}_k$ относительно осей Ox, Oy, Oz соответственно, k=1 , . . , N.

Замечание. Учитывая произвольность выбора точки O , из уравнений (22) следует, что сумма проекций уравновешенной (эквивалентной нулю) системы сил $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N\}$ на любую ℓ - ось пространства равна нулю и сумма моментов этих сил относительно любой ℓ - оси равна нулю, т.е.

$$\sum F_{k\ell} = 0, \quad \sum M_\ell(\bar{F}_k) = 0 . \tag{24}$$

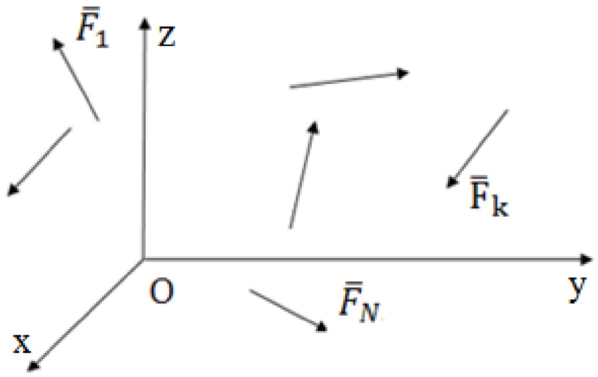


Рис.18

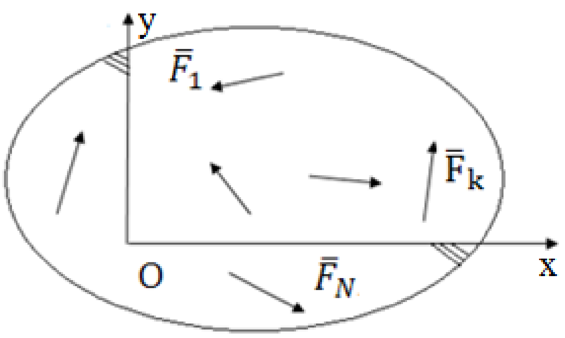


Рис.19

Выделим частный случай, когда $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N$ лежат в одной плоскости (рис. 19) . С плоскостью сил совместим координатную плоскость xy. В этом частном случае общие условия равновесия (22) преобразуются к трем скалярным уравнениям, которые можно представить в следующих формах.

Первая форма уравнений равновесия плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \tag{25}$$

где x-ось, y-ось – любые неколлинеарные оси в плоскости сил, A – произвольная точка в плоскости сил.

Вторая форма уравнений равновесия плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0, \tag{26}$$

где x-ось и точки A, B выбираются произвольно в плоскости сил, лишь бы прямая AB не была перпендикулярна x-оси.

Третья форма уравнений равновесия плоской системы сил:

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0\,, \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0\,, \quad \sum m_C(\bar{F}_k) = 0\,, \tag{27}$$

где точки A, B, C выбираются произвольно в плоскости сил, лишь бы они не лежали на одной прямой.

11. Активные силы и реакции связи

Связь – ограничение на движение тела. Геометрическая связь – ограничение на положение тела в пространстве. В статике фигурируют только геометрические связи.

Несвободное тело – тело, на которое наложены связи. Если связей нет, то тело называется свободным.

Связь можно выразить формально, т.е. некоторым образом указать множество допускаемых связью движений тела.

В классической механике каждая рассматриваемая связь реализуется посредством какого-либо материального тела, которое также принято называть связью (физической). Поэтому можно говорить о механическом воздействии связи (физической) на подчиненное ей тело.

Замечание. Обычно не уточняют формальный или физический смысл придается термину связь, если это ясно из контекста.

Реакции связи – силы, характеризующие механическое действие связи на подчиненное ей тело. Реакции связи возникают в точках контакта тела со связью, когда тело стремится нарушить связь.

Активная сила – сила, не являющаяся реакцией связи. Активные силы обычно заданы. Например, сила тяжести есть активная сила.

Реакции связи определяются связью не полностью, т.к. они зависят и от действующих на тело активных сил. Расчет реакций связей имеет большое практическое значение. В частности, он необходим при прочностных расчетах различных конструкций и их опор.

В статике для отыскания реакций связей служат уравнения равновесия системы всех действующих на покоящееся тело сил. Если этих уравнений статики достаточно, то задача расчета реакций связей называется статически определимой. Именно такие задачи рассматриваются в статике твердого тела. При решении статически неопределимых задач необходимо учитывать деформируемость тела. Статически неопределимые задачи расчета реакций связей рассматриваются в статике деформируемого тела.

12. Некоторые виды связей и их реакции

При описании силового воздействия связи на подчиненное ей тело используются следующие общие соображения.

Если не известна линия действия какой - либо реакции связи, то эту реакцию связи надо разложить на составляющие (удобнее всего – вдоль координатных осей) и далее рассматривать именно эти составляющие.

Если не известно направление реакции связи вдоль ее линии действия, то оно изображается условно. При этом если найденная в результате расчетов величина реакции связи будет отрицательной, то это означает, что направление реакции связи не угадали, т.е. действительное направление реакции связи противоположно показанному на рисунке направлению этой реакции.

Иногда невозможно подробно найти силовое воздействие связи на подчиненное ей тело. Например, когда реакции связи непрерывно распределены на некоторой части тела. В этом случае подлежат определению главный вектор $\bar{R}_0$ и главный момент $\bar{M}_0^R$ реакций связи, где О – принадлежащий телу центр приведения.

Приведем используемые обозначения связей и покажем их реакции. Шарнир обозначаем пустым кружком. Неподвижность тела обозначаем штриховкой.

<u>Плоский случай.</u>

1. Трос, нить, стержень (рис. 20) .

Рассматриваемое тело соединено тросом, нитью, стержнем с некоторым неподвижным телом, которое схематично изображено чертой с штриховкой. Реакции троса и нити направлены, как показано на рисунке. Реакция стержня показана условно (возможно, эта реакция в действительности направлена в обратную сторону).

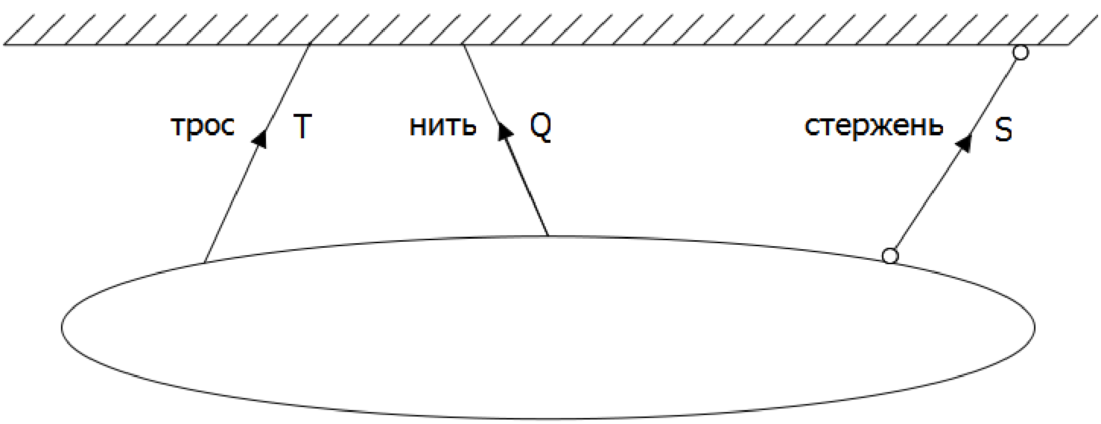


Рис. 20

2. Шарнирно подвижная опора (рис. 21).

Рассматриваемое тело шарнирно соединено с некоторым подвижным телом, которое схематично изображено треугольником с колесиками. Треугольник может перемещаться только вдоль линии, с которой соприкасаются колесики. Реакция связи перпендикулярна линии, на которой расположены колесики. Направление реакции связи показано условно, возможно, в действительности реакция направлена в обратную сторону.

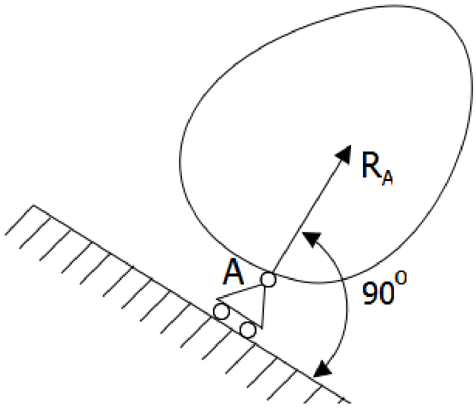


Рис. 21

3. Шарнирно неподвижная опора (рис. 22).

Рассматриваемое тело шарнирно соединено с некоторым неподвижным телом, которое схематично изображено треугольником. Данная связь препятствует перемещению точки A по всем направлениям в xy–плоскости. Направление реакции связи неизвестно, поэтому раскладываем её на составляющие вдоль координатных осей, т.е. $\overline{R}_A = (R_{AX}, R_{Ay})$, и далее рассматриваем именно эти составляющие R_{AX}, R_{Ay} (другие используемые обозначения: $R_{AX} \to x_A, R_{A1}$; $R_{Ay} \to y_A, R_{A2}$). Направление реакций связи показано на рисунке с точностью до обратного.

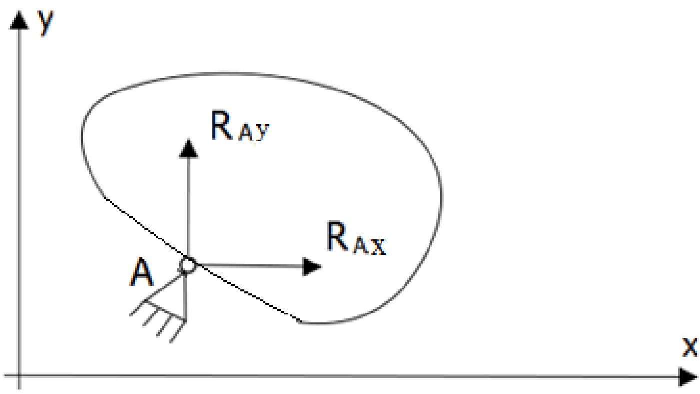


Рис. 22

4. Жесткая заделка (рис. 23).

Рассматриваемое тело жестко соединено с некоторым неподвижным телом. Например, балка заделана в стену дома. Реакции стены непрерывно распределены по части балки, находящейся внутри стены. Согласно теореме Пуансо, реакции стены можно привести относительно точки A (точка пересечения средней линии балки с границей стены) к главному вектору $\overline{R}_A = R_{AX}\bar{\imath} + R_{Ay}\bar{\jmath}$ и главному моменту

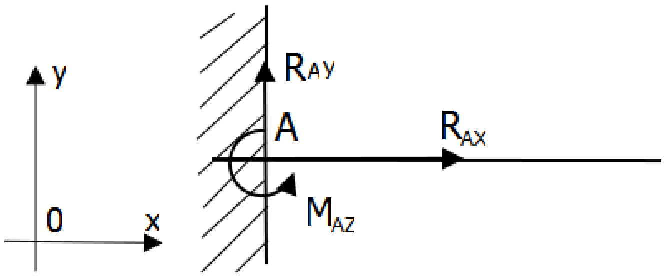


Рис. 23

$\bar{M}_A = M_{AZ}\bar{k}$, где $\bar{\iota}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$ - направляющие орты координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно. Таким образом, в случае жесткой заделки реакции связи следующие : R_{AX} , R_{AY} , M_{AZ} (другие обозначения : $R_{AX} \to x_A, R_{A1}$; $R_{AY} \to y_A, R_{A2}$; $M_{AZ} \to M_R, M_A$). Направление реакций связи показано на рисунке с точностью до обратного.

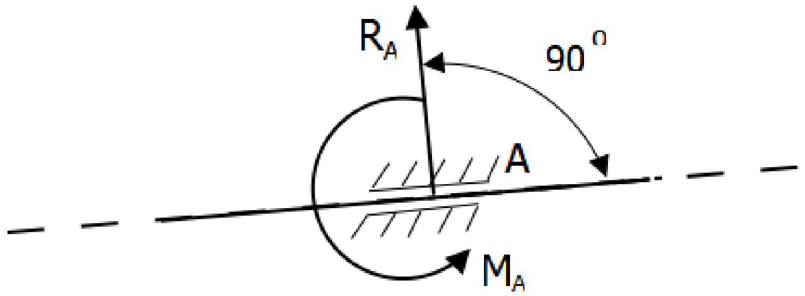


Рис. 24

5. Скользящая заделка (рис. 24).

Балка (ползун и т.д.) может перемещаться только вдоль параллельных прямолинейных направляющих. Согласно теореме Пуансо, реакции направляющих приводятся относительно точки А к главному вектору $\bar{R}_A$, который соответственно связи перпендикулярен оси скользящей заделки, и главному моменту M_{AZ} . Направления реакций скользящей заделки показаны с точностью до обратного.

6. Идеально гладкая поверхность (рис. 25) .

Реакции идеально гладкой поверхности перпендикулярны этой поверхности. Если поверхность рассматриваемого тела также идеально гладкая, то реакция выступа (сила $\bar{N}_3$) перпендикулярна поверхности тела (учитываем третий закон Ньютона).

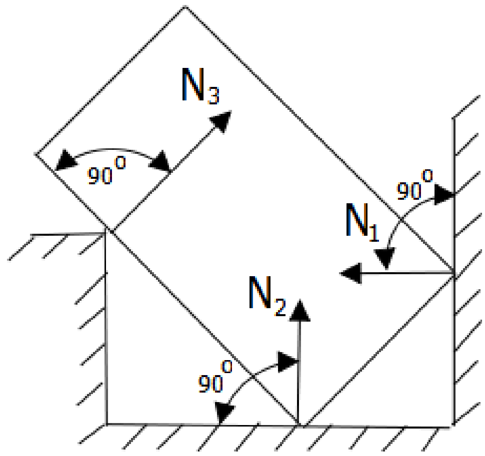


Рис. 25

<u>Пространственный случай.</u>

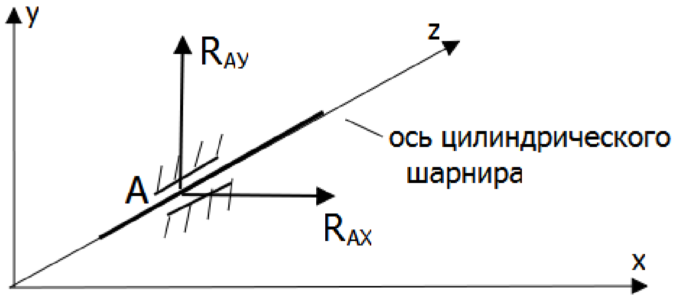


Рис. 26

1. Цилиндрический шарнир (рис. 26) .

Точка А тела может перемещаться только вдоль оси цилиндрического шарнира. Отметим, что цилиндрический шарнир не препятствует вращению тела относительно точки А. К сожалению, в учебниках изображение данной связи аналогично изображению плоской скользящей заделки; надо избегать путаницы. Реакция цилиндрического шарнира $\overline{R}_A$ перпендикулярна его оси. Линия действия реакции не известна, поэтому $\overline{R}_A$ раскладывается на составляющие, т.е. $\overline{R}_A = (R_{AX}\ ,\ R_{AY})$. Другие обозначения: $R_{AX} \to x_A, R_{A1}$; $R_{AY} \to y_A, R_{A2}$. Направления реакций $\overline{R}_{AX}, \overline{R}_{AY}$ изображены на рисунке с точностью до обратного.

2. Шарнирно неподвижная опора (рис. 27).

Рассматриваемое тело шарнирно соединено с некоторым неподвижным телом, которое схематично изображено треугольником. Линия действия реакции связи неизвестна, поэтому реакция связи раскладывается на составляющие, т.е. $\overline{R}_A = (R_{AX}, R_{AY}, R_{AZ})$. Реакции $\overline{R}_{AX}, \overline{R}_{AY}, \overline{R}_{AZ}$ изображены условно, возможно , их действительные направления обратны показанным на рисунке направлениям. Другие используемые обозначения: $R_{AX} \to x_A, R_{A1}$; $R_{AY} \to y_A, R_{A2}$; $R_{AZ} \to z_A, R_{A3}$.

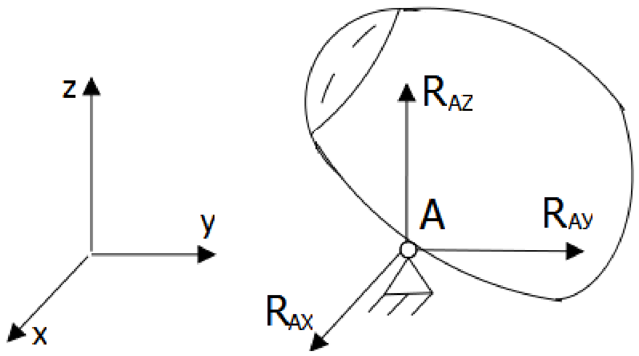


Рис. 27

3. Жесткая заделка (рис. 28) .

Рассматриваемое тело жестко соединено с некоторым неподвижным телом. Например, часть стержня жестко заделана в стену. Согласно теореме Пуансо, непрерывно распределенную по заделанной части стержня реакцию стены приводим относительно точки А к эквивалентной системе сил, состоящей из главного вектора $\overline{R}_A = (R_{AX}, R_{AY}, R_{AZ})$ и главного момента $\overline{M}_A = (M_{AX}, M_{AY}, M_{AZ})$. Так как направление векторов $\overline{R}_A, \overline{M}_A$ неизвестно, то в качестве искомых реакций связи рассматриваем координаты этих векторов. Направления реакций $\overline{R}_{AX}, \overline{R}_{AY}, \overline{R}_{AZ}, \overline{M}_{AX}, \overline{M}_{AY}, \overline{M}_{AZ}$ изображены на рисунке с точностью до обратного.

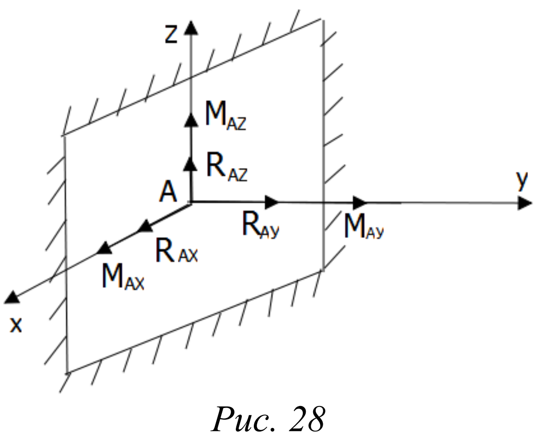


Рис. 28

13. Примеры расчета реакций связей

Пример 1.

Дано: схема конструкции (рис. 29), $\varphi = 30°$, F = 10 кН , $\alpha = 60°$, M=15 кН· м , плотность непрерывно распределенной нагрузки q=16 кН/м, сила тяжести груза P=8 кН. Найти реакции опор.

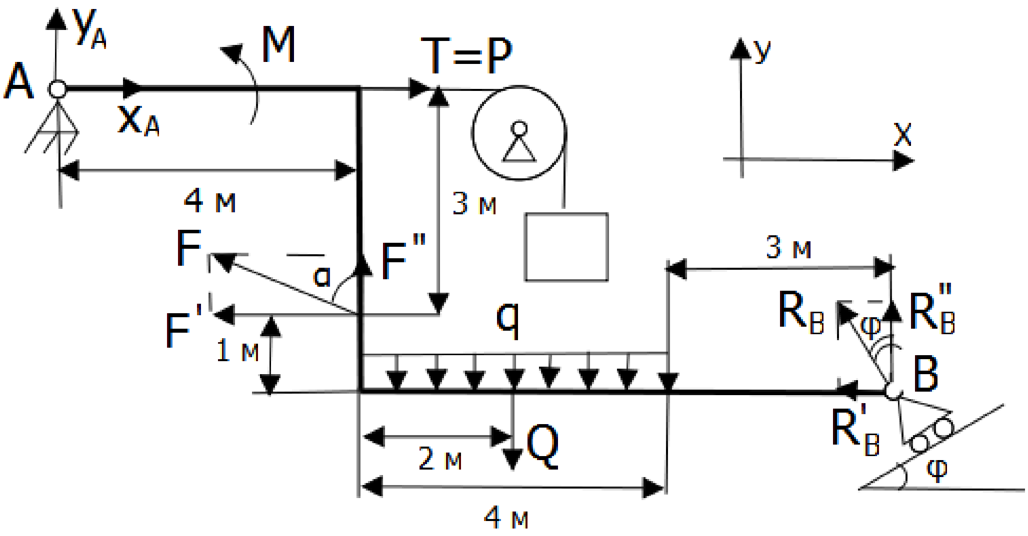


Рис. 29

Решение.

Рассмотрим равновесие конструкции АВ, являющейся твердым телом. Введем систему координат как показано на рисунке.

Укажем все силы, действующие на рассматриваемое тело: заданная сила $\bar{F}$ ($F = |\bar{F}|$), которую разложим на составляющие $\bar{F}'$,$\bar{F}''$; заданный момент $\bar{M}$ ($M = |\bar{M}|$); заданная непрерывно распределенная нагрузка, которую приведем к равнодействующей $\bar{Q}$ ($Q = |\bar{Q}| = 4 \cdot q = 24$ кН, $\bar{Q}$ приложена в центре соответствующего участка); сила $\bar{T}$ со стороны троса ($T = P = 8$ кН, т.к. по умолчанию блок идеально гладкий); составляющие $\bar{x}_A$, $\bar{y}_A$ ($x_A = |\bar{x}_A|$, $y_A = |\bar{y}_A|$) реакции опоры А ; реакция $\bar{R}_B$ ($R = |\bar{R}_B|$) опоры В.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0: \quad x_A + T - F\sin\alpha - R_B\sin\varphi = 0, \tag{a}$$

$$\sum F_{ky} = 0: \quad y_A + F\cos\alpha - Q + R_B\cos\varphi = 0, \tag{b}$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0: M - (F\sin\alpha)\cdot 3 + (F\cos\alpha)\cdot 4 - Q\cdot 6 - \\ -(R_B\sin\varphi)\cdot 4 + (R_B\cos\varphi)\cdot 11 = 0. \tag{c}$$

Решая систему уравнений (a) – (c), находим искомые реакции опор:

(c) $\Rightarrow$ $R_B = 17.94$ кН; (a) $\Rightarrow$ $x_A = 9.63$ кН; (b) $\Rightarrow$ $y_A = 3.47$ кН.

Пример 2.

Дано: схема конструкции, состоящей из двух твердых тел AC и BC, соединенных шарниром C (рис. 30), $F_1 = 8$ кН, $\alpha = 30°$, $M_1 = 20$ кН · м, $\varphi = 60°$, $F_2 = 10$ кН, $M_2 = 12$ кН · м, плотность непрерывно распределенной нагрузки q=16 кН/м. Найти реакции опор и усилия в соединительном шарнире.

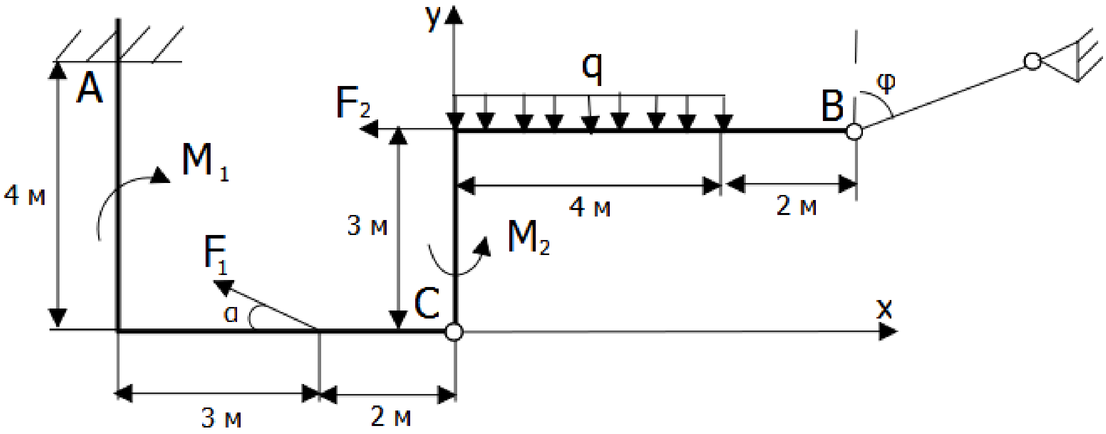


Рис. 30

Решение.

Рассмотрим по отдельности равновесие каждого твердого тела, из которых состоит конструкция. Введем систему координат. Покажем все силы, действующие на рассматриваемые тела (рис. 31) . Характеризуя механическое взаимодействие тел AC и BC, учитываем третий закон Ньютона: силы взаимодействия материальных тел лежат на одной прямой, противоположно направлены и равны по модулю.

$$Q = 4 \cdot q = 4 \cdot 16 = 64 \text{ кН}.$$

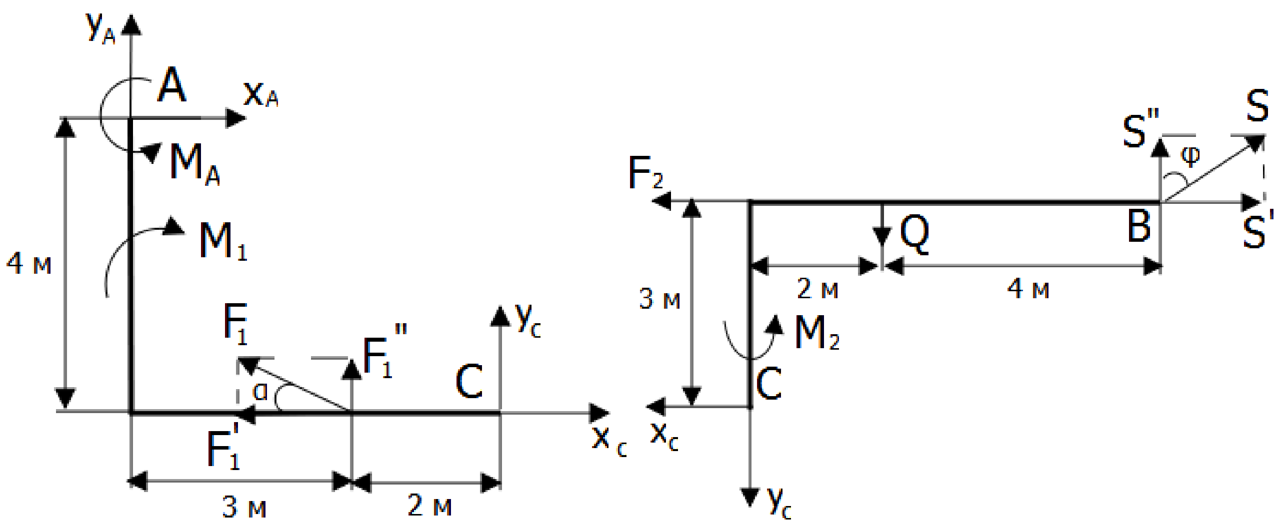


Рис. 31

Составляем уравнения равновесия:

тело AC

$\sum F_{kx} = 0:$ $\quad x_A - F_1 \cos\alpha + x_C = 0,$ (a)

$\sum F_{ky} = 0:$ $\quad y_A + F_1 \sin\alpha + y_C = 0,$ (b)

$\sum m_C(\bar{F}_k) = 0:$ $\quad M_A - x_A \cdot 4 - y_A \cdot 5 - M_1 - (F_1 \sin\alpha) \cdot 2 = 0;$ (c)

тело BC

$\sum F_{kx} = 0:$ $\quad -x_C - F_2 + S\sin\varphi = 0,$ (d)

$\sum F_{ky} = 0:$ $\quad -y_C - Q + S\cos\varphi = 0,$ (e)

$\sum m_C(\bar{F}_k) = 0:$ $\quad M_2 + F_2 \cdot 3 - Q \cdot 2 - (S\sin\varphi) \cdot 3 + (S\cos\varphi) \cdot 6 = 0.$ (f)

Решая систему уравнений (a) – (f), находим шесть искомых величин:

(f) $\Rightarrow$ $S = 213.93$ кН, (e) $\Rightarrow$ $y_C = 42.97$ кН,

(d) $\Rightarrow$ $x_C = 175.27$ кН, (a) $\Rightarrow$ $x_A = -168.34$ кН,

(b) $\Rightarrow$ $y_A = -46.97$ кН, (c) $\Rightarrow$ $M_A = -880.21$ кН $\cdot$ м.

Знак минус показывает, что действительные направления соответствующих реакций связей обратны изображенным на рис. 31 направлениям этих реакций.

Замечание. Второй способ решения задачи следующий. Сначала составляются три уравнения равновесия для всей конструкции в целом как для твердого тела (мысленно полагаем, что соединительный шарнир затвердел). Затем составляются уравнения равновесия для одного из твердых тел, входящих в конструкцию.

Пример 3.

Однородная прямоугольная пластина закреплена в горизонтальной плоскости (рис. 32) . Сила тяжести пластины P. Найти реакции опор.

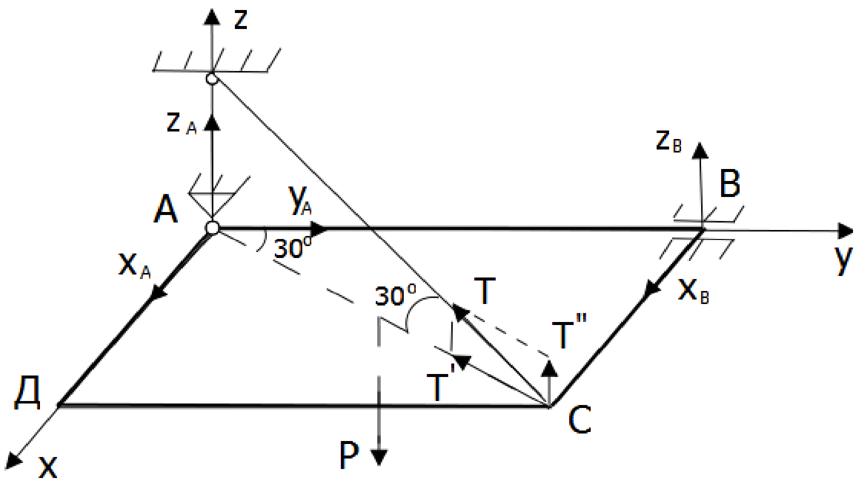


Рис. 32

Решение.

Рассмотрим равновесие пластины АВСД. Введем прямоугольную декартову систему координат Axyz.

Покажем все действующие на пластину силы: $\overline{P}$ – сила тяжести, которая приложена в центре пластины; $\bar{x}_A$, $\bar{y}_A$, $\bar{z}_A$ – реакции шарнирно неподвижной опоры; $\bar{x}_B$, $\bar{y}_B$ – реакции цилиндрического шарнира, $\overline{T}$ – реакция троса, которую разложим на составляющие $\overline{T}'$, $\overline{T}''$.

Составляем уравнения равновесия пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0: \quad x_A + x_B - (T\cos 30°)\sin 30° = 0, \qquad (a)$$

$$\sum F_{ky} = 0: \quad y_A - (T\cos 30°)\cos 30° = 0, \qquad (b)$$

$$\sum F_{kz} = 0: \quad z_A + z_B + T\sin 30° - P = 0, \qquad (c)$$

$$\sum M_x(\overline{F}_k) = 0: \quad z_B \cdot AB + (T\sin 30°)\cdot AB - P\cdot(AB/2) = 0, \qquad (d)$$

$$\sum M_y(\overline{F}_k) = 0: \quad P\cdot(AД/2) - (T\sin 30°)\cdot AД = 0, \qquad (e)$$

$$\sum M_z(\overline{F}_k) = 0: \quad -x_B\cdot AB = 0. \qquad (f)$$

Решая систему уравнений (a) – (f) , находим реакции опор:

$$(f) \Rightarrow x_B = 0; \qquad (e) \Rightarrow T = P; \qquad (d) \Rightarrow z_B = 0;$$

$$(c) \Rightarrow z_A = \frac{P}{2}; \qquad (b) \Rightarrow y_A = \frac{3}{4}P; \qquad (a) \Rightarrow x_A = \frac{\sqrt{3}}{4}P.$$

Библиографический список

1. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики : статика, кинематика, динамика:учебник для вузов по техн.специальностям / А. А. Яблонский, В. М. Никифоров . – 15-е изд., стер. - М. : КНОРУС, 2010. – 603 с. : ил.

2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики : учебник для втузов / С. М. Тарг. – Изд. 18-е, стер.. – М.: Высш. шк., 2008. - 416 с. : ил.

3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : учеб. пособие для вузов. Т. 1: Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон; под ред. Д. Р. Меркина. – 8-е изд., перераб.. – М. : Наука, 1984. – 504 с.

4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пособие для втузов / под общ. ред. А. А. Яблонского. – 13-е изд., стер. – М. : Интеграл-Пресс, 2004. – 382 с.: ил.

Содержание

1. Сила 3
2. Эквивалентные системы сил 4
3. Основные задачи статики 4
4. Исходные положения статики 5
5. Векторный момент силы относительно точки 6
6. Алгебраический момент силы относительно точки 8
7. Момент силы относительно оси 10
8. Пара сил 13
9. Основная теорема статики 16
10. Уравнения равновесия системы сил 19
11. Активные силы и реакции связи 21
12. Некоторые виды связей и их реакции 22
13. Примеры расчета реакций связей 26
Библиографический список 30

Подписано в печать 06.11.2013. Усл. печ. л. 2,0. Тираж 20 экз.
Печать офсетная.   Бумага офисная.   Заказ № _____

Отпечатано: РИО ВоГТУ, г. Вологда, ул. Ленина, 15