Министерство образования и науки Российской Федерации
Вологодский государственный университет

Кафедра экономической теории, учета и анализа

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Методические указания и задания
по теме «Балансовые модели»

Факультет экономический

Специальность: 08.05.02 – экономика и управление на предприятии (машиностроение)

Направление подготовки: 38.03.01 (080100.62) - экономика

Профиль подготовки: бухгалтерский учет, анализ и аудит

Вологда
2014

УДК: 330.44 (076)

Моделирование производственных систем, математическое моделирование в экономике: методические указания и задания по теме «Балансовые модели» / сост.: Л.В. Ярыгина - Вологда: ВоГУ, 2014. – 11 с.

В методических указаниях рассмотрены модель межотраслевого баланса и модель Леонтьева, описаны методы определения валовой продукции отраслей. Методические указания содержат варианты заданий для практического закрепления изложенного материала.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Составитель Л.В. Ярыгина, канд. экон. наук, доцент кафедры ЭТУ и А

Рецензент С.А. Клещ, канд. экон. наук, доцент кафедры Э и М

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Межотраслевой баланс

Межотраслевой баланс представляет собой таблицу, описывающую баланс производства и распределения продукции в народном хозяйстве. Существуют различные варианты межотраслевого баланса: в натуральном выражении, стоимостном выражении, в натурально-стоимостном выражении, в трудовых измерителях. Каждый из них может быть отчётным или плановым. Также межотраслевые балансы подразделяются на статические и динамические.

Пусть экономическая система представлена в виде совокупности n отраслей. Общий вид статического межотраслевого баланса в стоимостном выражении следующий (табл. 1).

Таблица 1

Схема межотраслевого баланса

Отрасли	1	2	…	n	Итого	Конечная продукция	Валовая продукция
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	y_2	x_2
…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	y_n	x_n
Итого	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{n} x_{in}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i$
Условно-чистая продукция	v_1	v_2	…	v_n	$\sum_{j=1}^{n} v_j$	-	-
Всего	x_1	x_2	…	x_n	$\sum_{j=1}^{n} x_j$	-	-

В схеме межотраслевого баланса по методологии СНС выделяют три основные части (квадранты): внутренний (I квадрант), боковое или правое крыло (II квадрант), нижнее крыло (III квадрант). (IV квадрант не разрабатывается.)

I квадрант отражает промежуточное потребление. Его образуют элементы, находящиеся на пересечении первых $(n+1)$ строк и $(n+1)$ столбца. Величина x_{ij} $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n})$ показывает текущие производственные затраты продукции i-ой отрасли в j-ой отрасли за рассматриваемый период времени (обычно за год).

Рассмотрим i-ю строку. Величины $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ описывают поставки продукции i-ой отрасли на текущее производственное потребление в отраслях экономической системы, а $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ характеризует суммарное текущее производственное потребление продукции i-ой отрасли за год. Рассмотрим теперь j-й столбец. Величины $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}$ описывают потребление j-ой отраслью сырья, материалов, топлива, энергии, полученных из отраслей экономической системы, а $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ равна суммарным текущим производственным затратам j-ой отрасли за год. Величина $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ – промежуточный продукт народного хозяйства.

В правой части межотраслевого баланса (II квадрант) приводятся конечная и валовая продукции отраслей. Под конечным потреблением понимается потребление, не связанное с текущим производственным потреблением. Сюда включаются накопление и возмещение выбытия основных фондов, прирост запасов, личное потребление населения, расходы продукции на содержание государственного аппарата и оборону, на обслуживание населения, а также сальдо экспорта и импорта продукции. Валовой выпуск i-ой отрасли (x_i) определяется как сумма продукции этой отрасли, идущей на производственное потребление, и конечной:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad (i = \overline{1, n}).$$

В $(n+1)$-ой строке II квадранта приводятся суммарная конечная и суммарная валовая продукции отраслей.

III квадрант межотраслевого баланса расположен под I квадрантом. Он отражает стоимостную структуру валового продукта отраслей. В первой строке этого раздела приводится условно-чистая продукция отраслей. Для j-ой отрасли условно-чистая продукция (v_j) равна разности между валовой продукцией данной отрасли и её суммарными текущими производственными затратами:

$$v_j = x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \quad (j = \overline{1, n}).$$

В $(n+1)$-м столбце III квадранта записаны суммарная условно-чистая и суммарная валовая продукции отраслей.

Таким образом, если рассматривать данные межотраслевого баланса по вертикали, то по столбцам показывается стоимостная структура выпуска продукции отдельных отраслей, который состоит из промежуточного потребления и валовой добавленной стоимости. По горизонтали (по строкам) приводится распределение продукции отраслей на промежуточное потребление и конечное использование.

Добавим также, что в СНС предусмотрены две схемы составления межотраслевого баланса. В первой анализируется выпуск продукции отраслей, понимаемых как совокупность заведений, т.е. подразделений предприятий, находящихся в одном месте и занятых производством относительно однородной продукции. Такие отрасли называют «хозяйственными» отраслями. Они производят помимо основной продукции некоторый объём вторичной продукции. Во второй схеме анализируются потоки товаров, сгруппированных по «чистым» отраслям. «Чистые» отрасли представляют собой группы однородных товаров и услуг, независимо от того, в какой «хозяйственной» отрасли они произведены. С теоретической точки зрения разработка межотраслевых балансов по схеме «чистых» отраслей более предпочтительна.

Модель Леонтьева

Постановка задачи. Рассматривается экономическая система, состоящая из n отраслей. В каждой отрасли выпускается единственный продукт; в каждой отрасли имеется единственная технология производства. Известно: количество продукции каждой отрасли, необходимое для текущего производственного потребления отраслями экономической системы при выпуске в них единицы продукции; конечная продукция каждой отрасли. Требуется определить валовую продукцию отраслей.

Условные обозначения:

n – количество отраслей экономической системы,

i – номер отрасли, поставляющей продукцию,

j – номер отрасли, потребляющей продукцию,

a_{ij} – количество продукции i-й отрасли, потребляемой в j-й отрасли при выпуске j-й отраслью единицы продукции (коэффициенты прямых затрат[1]),

y_i – конечная продукция i-й отрасли;

x_i – валовая продукция i-й отрасли.

[1] Коэффициенты прямых затрат можно рассчитать на основе межотраслевого баланса: $a_{ij}= x_{ij}/x_j$ $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, n})$.

Введём также матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - матрица прямых затрат, $$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$ - вектор конечной продукции системы; $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - вектор валовой продукции системы.

Математическая модель:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ \dots + a_{1n} \cdot x_n + y_1 = x_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ \dots + a_{2n} \cdot x_n + y_2 = x_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ \dots + a_{nn} \cdot x_n + y_n = x_n \end{cases} \tag{1}$$

или в векторно-матричной форме

$$AX + Y = X. \tag{2}$$

Отметим, что элементы a_{ij}, y_i, x_i $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, n})$ в моделях (1) и (2) неотрицательны. Это следует из их экономического смысла.

Определение валовой продукции отраслей

Валовую продукцию отраслей экономической системы можно рассчитать, решив систему линейных уравнений (1) или векторно-матричное уравнение (2). При этом можно найти точные и приближённые значения валовых выпусков.

Для решения системы уравнений (1) сначала следует привести её к виду:

$$\begin{cases} (a_{11} - 1) \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ \dots + a_{1n} \cdot x_n = -y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + (a_{22} - 1) \cdot x_2 + \ \dots + a_{2n} \cdot x_n = -y_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ \dots + (a_{nn} - 1) \cdot x_n = -y_n. \end{cases} \tag{1'}$$

Видим, что имеем систему линейных уравнений $n \times n$. Далее для определения значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно использовать аппарат линейной алгебры (например, метод Гаусса, правило Крамера).

Также разработаны итерационные методы, позволяющие из системы уравнений (1) найти приближённые значения валовой продукции отраслей. Суть их в следующем.

За начальное (нулевое) приближение значений валовой продукции можно принять значения объёмов конечной продукции, т.е. $x_1^{(0)} = y_1, x_2^{(0)} = y_2, ..., x_n^{(0)} = y_n$. В качестве следующего приближения (первая итерация) значений валовой продукции принимаются значения, которые определяются из уравнений системы (1), если в них в левых частях подставить значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полученные на нулевой итерации:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + \ldots + a_{1n} \cdot y_n + y_1 = x_1^{(1)}, \\ a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + \ldots + a_{2n} \cdot y_n + y_2 = x_2^{(1)}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1} \cdot y_1 + a_{n2} \cdot y_2 + \ldots + a_{nn} \cdot y_n + y_n = x_n^{(1)}. \end{cases} \tag{1а}$$

На второй итерации в левые части уравнений системы (1) вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подставляют значения этих переменных, рассчитанные на первой итерации, и т.д. В результате на k-ой итерации получается:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1^{(k-1)} + a_{12} \cdot x_2^{(k-1)} + \ldots + a_{1n} \cdot x_n^{(k-1)} + y_1 = x_1^{(k)}, \\ a_{21} \cdot x_1^{(k-1)} + a_{22} \cdot x_2^{(k-1)} + \ldots + a_{2n} \cdot x_n^{(k-1)} + y_2 = x_2^{(k)}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1} \cdot x_1^{(k-1)} + a_{n2} \cdot x_2^{(k-1)} + \ldots + a_{nn} \cdot x_n^{(k-1)} + y_n = x_n^{(k)}. \end{cases} \tag{1б}$$

Доказано, что если максимальная сумма абсолютных величин коэффициентов a_{ij} по строкам в системе уравнений (1) меньше единицы, то итерационный процесс сходится.

Сходимость рассмотренного выше итерационного процесса можно ускорить, воспользовавшись методом Зейделя. За начальное (нулевое) приближение значений валовой продукции снова берут значения объёмов конечной продукции: $x_1^{(0)} = y_1, x_2^{(0)} = y_2, ..., x_n^{(0)} = y_n$. Далее значение переменной x_1 на первой итерации вычисляют также как и в первом методе, а при определении значения переменной x_2 во второе уравнение системы (1) вместо x_1 подставляют только что найденное значение $x_1^{(1)}$, вместо $x_2, \ldots, x_n$ – значения, принятые на нулевой итерации. Для расчёта x_3 на первой итерации в третье уравнение системы (1) вместо x_1 подставляют $x_1^{(1)}$, вместо x_2 - $x_2^{(1)}$, вместо x_3, …, x_n – значения, принятые на нулевой итерации, и т.д.:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + \ldots + a_{1n} \cdot y_n + y_1 = x_1^{(1)}, \\ a_{21} \cdot x_1^{(1)} + a_{22} \cdot y_2 + \ldots + a_{2n} \cdot y_n + y_2 = x_2^{(1)}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1} \cdot x_1^{(1)} + a_{n2} \cdot x_2^{(1)} + \ldots + a_{nn} \cdot y_n + y_n = x_n^{(1)}. \end{cases} \tag{1в}$$

Таким образом, для определения валовых выпусков на k-ой итерации применяют следующие формулы:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1^{(k-1)} + a_{12} \cdot x_2^{(k-1)} + \ldots + a_{1n} \cdot x_n^{(k-1)} + y_1 = x_1^{(k)}, \\ a_{21} \cdot x_1^{(k)} + a_{22} \cdot x_2^{(k-1)} + \ldots + a_{2n} \cdot x_n^{(k-1)} + y_2 = x_2^{(k)}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1} \cdot x_1^{(k)} + a_{n2} \cdot x_2^{(k)} + \ldots + a_{nn} \cdot x_n^{(k-1)} + y_n = x_n^{(k)}. \end{cases} \tag{1г}$$

Векторно-матричное уравнение (2) разрешается относительно вектора валовой продукции:

$$(E - A)^{-1} \cdot Y = X. \tag{2'}$$

Матрица $(E - A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат, а её элементы называют коэффициентами полных затрат. Можно показать, что $(E - A)^{-1}$ существует, и при этом значения валовых выпусков не будут отрицательны. Матрица $(E - A)^{-1}$ вычисляется методами, изучаемыми линейной алгеброй. Также для её определения можно воспользоваться равенством $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots A^k + \ldots$, справедливость которого доказана. Правая часть приведённого равенства – матрица, представленная в виде суммы неограниченного числа матриц. Таким образом, чтобы вычислить приближённо элементы матрицы полных затрат, достаточно взять сумму первых k членов рассмотренного ряда:

$$(E - A)^{-1} \approx E + A + A^2 + A^3 + \ldots A^k. \tag{3}$$

Примечание. Матрицы $A^2, A^3, \ldots, A^k$ вычисляются последовательно, учитывая что $A^{m+1} = A^m \cdot A$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что сфера материального производства подразделяется на три большие отрасли: сельское хозяйство, промышленность и прочие отрасли. Изготовленная в этих отраслях продукция используется для производственного потребления, а также на непроизводственное потребление и накопление (таблицы 2, 3).

Таблица 2

Производство и распределение продукции в отчётном году (млрд. д. е.)

Распределение / Производство	Сельское хозяйство	Промышленность	Прочие отрасли материального производства	Непроизводственное потребление и накопление	Всего распределено продукции
Сельское хозяйство	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	x_1
Промышленность	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	x_2
Прочие отрасли материального производства	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	x_3

Таблица 3

Исходные данные по вариантам

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_{11}	*12,0*	*10,0*	*12,0*	*8,4*	*10,5*	*10,0*	*11,2*	*9,0*	*10,6*	*9,4*
x_{12}	*20,0*	*30,0*	*18,0*	*18,0*	*20,0*	*25,0*	*21,0*	*17,8*	*19,6*	*24,4*
x_{13}	*0*	*0*	*0,2*	*0*	*0,3*	*0,2*	*0,5*	*0*	*0,4*	*0*
x_{21}	*8,0*	*5,0*	*8,0*	*10,5*	*8,4*	*8,0*	*7,0*	*6,5*	*9,6*	*9,2*
x_{22}	*60,0*	*90,0*	*72,0*	*72,0*	*60,0*	*62,5*	*65,0*	*73,0*	*82,5*	*80,4*
x_{23}	*5,0*	*5,0*	*4,0*	*5,8*	*6,0*	*4,0*	*6,3*	*5,4*	*7,0*	*6,2*
x_{31}	*4,0*	*2,5*	*4,0*	*4,2*	*4,2*	*4,0*	*0*	*3,6*	*4,8*	*3,4*
x_{32}	*0*	*3,0*	*2,4*	*2,4*	*0*	*2,5*	*0,3*	*1,6*	*2,6*	*2,0*
x_{33}	*2,5*	*0*	*1,0*	*2,9*	*3,0*	*1,0*	*1,5*	*2,1*	*0*	*1,6*
y_1	*8,0*	*10,0*	*9,8*	*15,6*	*11,2*	*4,8*	*12,0*	*13,6*	*14,5*	*15,6*
y_2	*127,0*	*200,0*	*156,0*	*151,7*	*125,6*	*175,5*	*183,0*	*170,0*	*198,0*	*206,0*
y_3	*18,5*	*18,5*	*12,6*	*19,3*	*22,8*	*12,5*	*17,5*	*21,0*	*23,6*	*16,6*
y_1^n	*10,0*	*10,5*	*11,5*	*17,0*	*12,5*	*5,5*	*14,0*	*15,4*	*16,8*	*18,3*
y_2^n	*145,0*	*210,0*	*160,0*	*152,5*	*127,0*	*177,0*	*192,0*	*186,5*	*210,0*	*216,7*
y_3^n	*19,0*	*20,0*	*12,8*	*20,5*	*24,0*	*14,0*	*19,0*	*23,0*	*25,8*	*20,2*

Требуется:

а) рассчитать матрицу прямых затрат;

б) определить вектор валового выпуска продукции отраслей в плановом году;

в) построить межотраслевой баланс в плановом году;

г) найти приближённое решение задания б), решив систему уравнений межотраслевого баланса одним из итерационных методов;

д) найти приближённое решение задания б), вычислив матрицу полных затрат итерационным методом, ограничившись четырьмя членами разложения.

3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Заполнить таблицу 2, используя исходные данные из таблицы 3 в соответствии с вариантом.

2. Рассчитать коэффициенты прямых затрат на основе данных таблицы 2 по формуле $a_{ij} = x_{ij}/x_j$ ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$).

3. Составить систему уравнений (1) и найти её решение. Также можно определить валовую продукцию отраслей по формуле (2').

4. Построить межотраслевой баланс в плановом году по форме таблицы 1.

5. Найти приближённые значения валовых выпусков отраслей из системы уравнений (1) при помощи любого из рассмотренных итерационных методов.

6. Вычислить матрицу полных затрат по формуле (3), т.е. $(E - A)^{-1} \approx E + A + A^2 + A^3$, и рассчитать значения валовых выпусков отраслей по формуле (2').

4. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Орлова, И. В. Экономико-математическое моделирование: практ. пособие по решению задач / И. В. Орлова. – Москва: Вузовский учебник: ВЗФЭИ, 2005. – 143 с.

2. Теория систем и системный анализ в управлении организациями: справочник: учеб. пособие для вузов/ под ред. В. Н. Волковой, А. А. Емельянова. - Москва: Финансы и статистика, 2006. – 845 с.

3. Федосеев, В. В. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебник для бакалавров/ В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, И. В. Орлова; под ред. В. В. Федосеева. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юрайт, 2013. - 328 с.

4. Исследование операций и принятие решений в экономике : сборник задач и упражнений: учеб. пособие/ В. П. Невежин, С. И. Кружилов, Ю. В. Невежин; [под общ. ред. В. П. Невежина]. - Москва: Форум, 2012. – 399 с.

5. Красс, М. С. Математические методы и модели для магистрантов экономики: учеб. пособие/ М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. - 2-е изд., доп. - Санкт-Петербург [и др.]: Питер, 2010. – 496 с.

Подписано в печать 30.10.2014.	Усл. печ. л. 0,7	Тираж экз.
Печать офсетная.	Бумага писчая.	Заказ №____.

Отпечатано: РИО ВоГУ, г. Вологда, ул. С. Орлова, 6