

Министерство образования и науки Российской Федерации
Вологодский государственный университет

Кафедра высшей математики

Некоторые приложения обыкновенных дифференциальных уравнений в экономике

Методические указания для студентов
всех форм обучения

Факультеты: экономический, ЗДО

Направление: 38.03.01 – Экономика

Профили подготовки: финансы и кредит,
экономика предприятий и организаций,
бухгалтерский учет, анализ и аудит

Вологда
2015

Некоторые приложения обыкновенных дифференциальных уравнений в экономике : методические указания для студентов направления 38.03.01 «Экономика» всех форм обучения. – Вологда : ВоГУ, 2015.– 43 с.

В методических указаниях подробно и с большим количеством разнообразных примеров изложены базовые приложения обыкновенных дифференциальных уравнений в экономике. В работе приведен весь необходимый теоретический материал. Данные методические указания окажут значительную помощь в самостоятельной работе студентов направления «Экономика» по профилям подготовки: финансы и кредит, экономика предприятий и организаций, бухгалтерский учет, анализ и аудит по изучению курса математического анализа.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Составители: О.В. Авдеева, канд. физ.-мат. наук, доцент;
О.И. Микрюкова, канд. физ.-мат. наук, доцент

Рецензент: А.Б.Назимов, д-р физ.-мат. наук, профессор

Дифференциальные уравнения являются одним из важнейших разделов математики, который имеет очень большое прикладное значение. Кроме общематематического и теоретического интереса, дифференциальные уравнения находят широкое практическое применение. Например, при решении задач, связанных с электродинамикой, распространением тепла, радиоактивным распадом, оптимальным управлением, экономикой и т.д.

В данном методическом пособии мы вкратце напомним основные понятия теории дифференциальных уравнений, приведем основные методы их решения и рассмотрим применение дифференциальных уравнений в экономике и смежных социальных науках на конкретных примерах.

1. Общие понятия и определения

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) называется соотношение, записанное в виде равенства между малыми изменениями (дифференциалами) двух величин. Одна из этих величин рассматривается как независимая и обозначается в общем случае x . Другая рассматривается как зависимая и обозначается в общем случае y . Если в указанное соотношение входят дифференциалы первого порядка, то оно называется ОДУ первого порядка. В соотношение входят, кроме дифференциалов, сами величины x и y , и различные параметры. С учетом этого ОДУ первого порядка может быть записано так:

$$f_1(x, y)dy = f_2(x, y)dx \text{ или } f_1(x, y)\frac{dy}{dx} = f_2(x, y) \quad (1)$$

Учитывая, что $\frac{dy}{dx} = y'$, то в самом общем виде ОДУ первого порядка может быть записано так:

$$F(x, y, y') = const. \quad (2)$$

Соотношение между дифференциалами более высокого порядка приводят к ОДУ второго, третьего и следующих порядков. Их соответственно можно записать в таком общем виде:

$$\begin{aligned} F(x, y, y', y'') &= const \text{ (ОДУ второго порядка)} \\ F(x, y, y', y'', y''') &= const \text{ (ОДУ третьего порядка)} \\ &\dots\dots\dots \\ F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) &= const \text{ (ОДУ порядка } n \text{)} \end{aligned} \quad (3)$$

Решением ОДУ называется всякая дифференцируемая функция y , которая обращает его в тождество в любой точке своей области определения. Например, решением уравнения $y' - 2x = 0$ будет множество функций $y = x^2 + C$, где C – произвольная константа.

Решение ОДУ, содержащее произвольным константу (константы), называется общим. Частным решением называется решение, полученное из общего при конкретных значениях произвольных. Эти конкретные значения устанавливаются при учёте начальных условий.

Задачей Коши называется нахождение частного решения ОДУ при наличии начальных условий. Для ОДУ первого порядка начальные условия накладываются на саму функцию. Для ОДУ второго порядка начальные условия накладываются на функцию и первую производную и т.д.

График функции, являющейся частным решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой.

Решением ОДУ, которое нельзя получить из общего ни при каких значениях произвольных постоянных, называется особым.

Интегралом дифференциального уравнения называется всякое уравнение, не содержащее производных (дифференциалов) и являющееся следствием исходного дифференциального уравнения.

Как можно понять из исходного определения, ОДУ содержит одну независимую переменную. Если в дифференциальное уравнение входят две или более независимые переменные, оно называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Решить дифференциальное уравнение в квадратурах – значит преобразовать его к такому виду, когда в нем не будет производных (дифференциалов), а также найти его особые решения, которые могут быть потеряны при интегрировании дифференциального уравнения.

В дальнейшем речь будет идти только об обыкновенных дифференциальных уравнениях, для краткости слово «обыкновенные» будем опускать.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка

2.1. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка

Это - дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(x). \quad (4)$$

Решение такого уравнения очевидно: всякая функция y , удовлетворяющая этому уравнению, является первообразной для функции $f(x)$. А значит,

любое частное решение $y = y(x)$ этого уравнения может быть найдено в результате интегрирования функции $f(x)$:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C. \quad (5)$$

Формула (5) представляет собой общее решение уравнения (4). Она содержит в себе все частные решения этого уравнения. Особых решений у уравнения (4) нет.

2.2. Дифференциальные уравнения с разделёнными и разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения вида:

$$f_1(y)dy = f_2(x)dx \quad (6)$$

называются уравнениями с разделёнными переменными. Решение сводится к интегрированию обеих частей уравнения:

$$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx \Rightarrow F_1(y) = F_2(x) + C.$$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными могут быть представлены в одном из двух видов:

$$M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0 \quad (7)$$

или

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y). \quad (8)$$

Для нахождения решения в них разделяют переменные. Для этого обе части уравнения (7) делят на произведение $N_1(y) \cdot M_2(x)$, проверяя условие $N_1(y) \neq 0$. Значения y при которых $N_1(y) = 0$, будут особыми решениями.

Для разделения переменных уравнение (8) преобразуют так:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Если есть значения y , при которых $f_2(y) = 0$, они будут особыми решениями.

После разделения переменных обе части уравнения интегрируются.

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx.$$

В нижеприведенных примерах будем использовать самый простой вид дифференциальных уравнений: дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Пример 1. Эффективность рекламы

Некая фирма подготовила для реализации новый продукт. Для его продвижения в начальный момент была проведена рекламная компания, в результате которой о новинке узнали $\frac{N}{\gamma}$ покупателей. Здесь N – общее число потенциальных покупателей новинки, $\gamma > 1$.

Найдем, как будет меняться число покупателей, знающих о новинке, в зависимости от времени, учитывая, что далее информация о нем распространяется путем общения покупателей друг с другом.

Обозначим $x(t)$ – число покупателей, знающих о новинке в момент времени t . Изменение этой величины будет пропорционально количеству знающих о новинке, также числу покупателей, не знающих о ней, и промежутку времени dt , за которое это изменение происходит:

$$dx = kx(N - x)dt, \quad (9)$$

при этом $x(0) = \frac{N}{\gamma}$.

Разделим переменные и интегрируя, получим $\frac{1}{N} \ln \frac{x}{N - x} = kt + C$.

Учитывая начальные условия, получим зависимость:

$$x = \frac{Ne^{Nkt}}{e^{Nkt} + \gamma - 1} = \frac{N}{1 + (\gamma - 1)e^{-Nkt}}. \quad (10)$$

Уравнение (10) называется уравнением *логистической кривой*.

Упражнение 1. а) При выпуске нового товара на рынок фирма проводит рекламную акцию, в результате которой из общего числа потенциальных покупателей $N=20000$ чел о новинке узнают $N/2$ покупателей. После этого сведения о новом товаре распространяются с помощью передачи информации от одних покупателей другим. Причем изменение числа знающих о новинке x пропорционально как x , так и $N-x$ с коэффициентом пропорциональности $k = 2 \cdot 10^{-6}$ чел/день. Составить уравнение для нахождения зависимости $x(t)$, решить его и найти $x(t_1)$, если $t_1 = 30$ дней.

б) При выпуске нового товара на рынок фирма проводит рекламную акцию, в результате которой из общего числа потенциальных покупателей $N=20000$ чел о новинке узнают $N/3$ покупателей. После этого сведения о новом товаре распространяются с помощью передачи информации от одних покупателей другим. Причем изменение числа знающих о новинке x пропорционально как x , так и $N-x$ с коэффициентом пропорциональности $k = 1 \cdot 10^{-6}$

чел/день. Составить уравнение для нахождения зависимости $x(t)$, решить его и найти $x(t_1)$, если $t_1 = 15$ дней.

в) При выпуске нового товара на рынок фирма проводит рекламную акцию, в результате которой из общего числа потенциальных покупателей $N=20000$ чел о новинке узнают $N/2$ покупателей. После этого сведения о новом товаре распространяются с помощью передачи информации от одних покупателей другим. Причем изменение числа знающих о новинке x пропорционально как и x , так и $N-x$ с коэффициентом пропорциональности $k = 2 \cdot 10^{-6}$ чел/день. Составить уравнение для нахождения зависимости $x(t)$, решить его и найти $x(t_1)$, если $t_1 = 60$ дней.

Пример 2. Изменение численности населения

Изменение численности населения горнорудного поселка с течением времени описывается уравнением $y' = 0.3y(2 - 10^{-4}y)$, где $y=y(t)$, t – время (лет). В начальный момент времени население поселка составляло 500 человек. Каким оно станет через три года?

Разделяя переменные в уравнении $y' = 0.3y(2 - 10^{-4}y)$, приходим к равенству $\frac{dy}{0.3y(2 - 10^{-4}y)} = dt$. Выполняя интегрирование обеих частей этого

равенства, получаем $\ln \left| \frac{y}{2 - 10^{-4}y} \right| = 0.6t + C_1$, или $\frac{y}{2 - 10^{-4}y} = Ce^{0.6t}$.

Значение постоянной C находим из начальных условий: так как $y(0)=500$, то $C \approx 256,4$. Выражая теперь функцию y из $\frac{y}{2 - 10^{-4}y} = Ce^{0.6t}$, по-

лучаем $y = \frac{512,8e^{0,6t}}{1 - 0,02564e^{0,6t}}$. Тогда $y(3) = \frac{512,8e^{1,8}}{(1 - 0,02564e^{1,8})} \approx 2685$.

Ответ: примерно 2685 человек.

Упражнение 2. В поселке с населением 3000 человек распространение эпидемии гриппа (без применения экстренных санитарно-профилактических мер) описывается уравнением $\frac{dy}{dt} = 0,001y(3000 - y)$, где y – число заболевших в момент времени t ; t – число недель. Сколько больных будет в поселке через две недели, если в начальный момент было трое больных.

Упражнение 3. Известно, что рост числа $y=y(t)$ жителей некоторого района описывается уравнением $\frac{dy}{dt} = \frac{0,2y}{m}(m - y)$, где m - максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1% от максимального. Через какой промежуток времени число жителей составит 80% от максимального ?

Упражнение 4. а) Численность населения $y(t)$ некоторой страны удовлетворяют дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dt} = 0,2y(1 - 10^{-4}y)$, где время t измеряется в годах. В начальный момент времени население составляло 1000 чел. Через сколько лет население возрастает в 4 раза ?

б) Численность населения $y(t)$ некоторой страны удовлетворяют дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dt} = 0,5y(1 - 10^{-6}y)$, где время t измеряется в годах. В начальный момент времени население составляло 10 тыс. чел. Через сколько лет население возрастает в 10 раз ?

Упражнение 5. В городе с населением 4000 чел. Распространение эпидемии подчиняется уравнению $\frac{dy}{dt} = 0,001y(4000 - y)$, где y – число заболевших в момент времени t . Через какое время заболеет 90% населения, если в начальный момент болело 2% населения ?

Упражнение 6. а) Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый момент времени его фактической стоимости. Известна начальная стоимость $A_0 = 10000$ руб и стоимость в момент времени $t_1 = 1$ год $A_1 = 8000$ руб. Найти стоимость оборудования в момент времени $t_2 = 2$ года.

б) Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый момент времени его фактической стоимости. Известна начальная стоимость $A_0 = 12000$ руб и стоимость в момент времени $t_1 = 1$ год $A_1 = 9000$ руб. Найти стоимость оборудования в момент времени $t_2 = 2$ года.

в) Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый момент времени его фактической стоимости. Известна начальная стоимость $A_0 = 15000$ руб и стоимость в момент времени $t_1 = 1,5$ года $A_1 = 12000$ руб. Найти стоимость оборудования в момент времени $t_2 = 3$ года.

Упражнение 7. а) Некоторое вещество преобразуется в другое со скоростью, пропорциональной количеству непреобразованного вещества. По истечении времени $t_1 = 5$ мин первого вещества было $m_1 = 40$ г, по истечении времени $t_2 = 15$ мин - $m_2 = 10$ г. Найти массу вещества в начале процесса.

б) Некоторое вещество преобразуется в другое со скоростью, пропорциональной количеству непреобразованного вещества. По истечении времени $t_1 = 3$ мин первого вещества было $m_1 = 28$ г, по истечении времени $t_2 = 9$ мин - $m_2 = 7$ г. Найти массу вещества в начале процесса.

в) Некоторое вещество преобразуется в другое со скоростью, пропорциональной количеству непреобразованного вещества. По истечении времени $t_1 = 5$ мин первого вещества было $m_1 = 90$ г, по истечении времени $t_2 = 10$ мин - $m_2 = 10$ г. Найти массу вещества в начале процесса.

Пример 3. Спрос и предложение.

Как известно, спрос и предложение – экономические категории товарного производства, возникающие и функционирующие на рынке, в сфере товарного обмена. При этом спрос – представленная на рынке потребность в товарах, а предложение – продукт, который есть на рынке или может быть доставлен на него. Одним из экономических законов товарного производства является закон спроса и предложения, который заключается во взаимозависимости спроса и предложения и их объективном стремлении к соответствию. В простейших ситуациях спрос на товар (предложение товара) предполагается зависящим лишь от его цены. В более сложных случаях в расчет принимается также зависимость спроса (предложения) от скорости изменения цены.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в течение некоторого (достаточно продолжительного) времени крестьянин продает на рынке фрукты (например, яблоки), причем продает их после уборки урожая, с недельными перерывами. Тогда, при имеющихся у крестьянина запасах фруктов недельное предложение будет зависеть как от ожидаемой цены в наступающей неделе, так и от предполагаемого изменения цены в последующие недели. Если в наступающей неделе предполагается, что цена упадет, а последующие недели повысятся, то предложение будет сдерживаться при условии превышения ожидаемого повышения цен над издержками хранения. При этом предложение товара в ближайшую неделю будет тем меньшим, чем большим предполагается в дальнейшем повышение цены. И наоборот, если в наступающей неделе цена будет высокой, а затем ожидается ее падение, то предложение увеличится тем больше, чем большим предполагается понижение цены в дальнейшем.

Если обозначить через p цену на фрукты в наступающей неделе, а через p' - так называемую тенденцию формирования цены (производную цены во времени), то как спрос, так и предложение будут функциями указанных величин. При этом, как показывает практика, в зависимости от разных факторов спрос и предложение могут быть различными функциями цены и тенденции формирования цены. В частности, одна из таких функций задается линейной зависимостью, математически описываемой соотношением $y = ap' + bp + c$, где a, b, c – некоторые вещественные постоянные. А тогда, если, например, в рассматриваемой задаче цена на фрукты вначале составляла 1 р за 1 кг, через t недель она была уже $p(t)$ р за 1 кг, а спрос q и предложение s определялись соответственно соотношениями $q = 4p' - 2p + 39$, $s = 44p' + 2p - 1$, то для того чтобы спрос соответствовал предложению, необходимо выполнение равенства $4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1$. Отсюда приходим к дифференциальному уравнению $\frac{dp}{p-10} = -\frac{dt}{10}$, интегрируя которое, находим: $\ln|p-10| = -\frac{t}{10} + \ln C$, значит $|p-10| = Ce^{-\frac{t}{10}} \Rightarrow p = 10 \pm Ce^{-\frac{t}{10}}$. Учтем начальные условия $p=1$ при $t=0$: $1 = 10 \pm C \Rightarrow C = \mp 9$. Окончательно получаем $p = 10 \mp 9e^{-\frac{t}{10}}$. Так как $\lim_{t \rightarrow \infty} p = 10$, имеет место устойчивость. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} p = \infty$, то равновесная цена растет и имеет место инфляция. Таким образом, если требовать, чтобы между спросом и предложением все время сохранялось равновесие, необходимо, чтобы цена изменялась в соответствии с полученной формулой.

Упражнение 8. Функции спроса и предложения имеют вид:

$$y = 25 - 2p + 3\frac{dp}{dt}, \quad x = 15 - p + 4\frac{dp}{dt}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p=9$.

б) Найти $\lim_{t \rightarrow \infty} p$. Является ли равновесная цена устойчивой?

в) Построить график зависимости равновесной цены от времени.

Упражнение 9. Функции спроса и предложения имеют вид:

$$y = 19 + p + 4\frac{dp}{dt}, \quad x = 28 - 2p + 3\frac{dp}{dt}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p=20$.

б) Найти $\lim_{t \rightarrow \infty} p$. Является ли равновесная цена устойчивой ?

в) Построить график зависимости равновесной цены от времени.

Упражнение 10. Функции спроса и предложения имеют вид:

$$y = 50 - 2p - 4 \frac{dp}{dt}, \quad x = 70 + 2p - 5 \frac{dp}{dt}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p=10$.

б) Найти $\lim_{t \rightarrow \infty} p$. Является ли равновесная цена устойчивой?

в) Построить график зависимости равновесной цены от времени.

Упражнение 11. Функции спроса и предложения имеют вид:

$$y = 30 - p - 4 \frac{dp}{dt}, \quad x = 20 + p + \frac{dp}{dt}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени.

б) Является ли равновесная цена устойчивой ?

в) Построить график зависимости равновесной цены от времени.

Упражнение 12. Функции спроса и предложения имеют вид:

$$y = 100 - p - 2 \frac{dp}{dt}, \quad x = 140 + p - 3 \frac{dp}{dt}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p=5$.

б) Найти $\lim_{t \rightarrow \infty} p$. Является ли равновесная цена устойчивой ?

в) Построить график зависимости равновесной цены от времени.

Упражнение 13. Функции спроса и предложения имеют вид:

$$y = 54 - 4p - 3 \frac{dp}{dt}, \quad x = 26 + 3p + 2 \frac{dp}{dt}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p=6$.

б) Найти $\lim_{t \rightarrow \infty} p$. Является ли равновесная цена устойчивой ?

в) Построить график зависимости равновесной цены от времени.

Упражнение 14. Функции спроса и предложения имеют вид:

$$y = 100 - 3p + 4 \frac{dp}{dt}, \quad x = 120 + 2p + \frac{dp}{dt}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p=10$.

б) Найти $\lim_{t \rightarrow \infty} p$. Является ли равновесная цена устойчивой ?

в) Построить график зависимости равновесной цены от времени.

В некоторых случаях представляет интерес функция спроса при данной эластичности. Эластичность – эта мера реагирования одной переменной величины на изменение другой. Эластичность функции приближенно показывает, на сколько процентов изменится одна переменная в результате изменения другой переменной на 1% и определяется с помощью соотношения $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'_x$

или $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$. Эластичность функции применяется при анализе спроса и предложения от цены (ценовая эластичность). Она показывает реакцию спроса или предложения на изменение цены и определяет, на сколько процентов приближенно изменится спрос или предложение при изменении цены на 1%.

Если эластичность спроса $|E_x(y)| > 1$, то спрос считается эластичным, если $|E_x(y)| = 1$ - нейтральным (с единичной эластичностью), а если $|E_x(y)| < 1$ - неэластичным относительно цены.

Если известна эластичность спроса на некоторый товар, то можно найти функцию спроса.

Пример 4. Эластичность $E_p(y) = -\frac{1}{3}$ для любых значений p . Найти функцию спроса.

Воспользуемся определением эластичности $E_p(y) = \frac{p}{y} \frac{dy}{dp}$. Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{p}{y} \frac{dy}{dp} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3 \frac{dy}{y} = -\frac{dp}{p}$. Интегрируем и получаем уравнение спроса: $3 \int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dp}{p} \Rightarrow 3 \ln|y| = -\ln|p| + \ln C \Rightarrow py^3 = C$. Для определения C нужна дополнительная информация.

Упражнение 15. Найти функцию спроса $y=y(p)$, если эластичность $E_p(y)$ постоянна и задана цена p при некотором значении имеет следующий вид:

а) $E_p(y) = -\frac{1}{2}$, $p=5$ при $y=2$;

б) $E_p(y) = -3$, $p=2$ при $y=27$.

в) $E_p(y) = -2$, $p=10$ при $y=4$.

г) $E_p(y) = -\frac{4}{5}$, $p=15$ при $y=1$.

д) $E_p(y) = -2$, $p=3$ при $y = \frac{1}{6}$.

Упражнение 16. Найти функцию спроса, если известно значение цены p при некотором спросе y и эластичность имеет следующий вид.

а) $E_p = \frac{y-100}{y}$, $0 < y < 100$, $p = 90$ при $y=10$.

б) $E_p = \frac{p}{p-20}$, $0 < p < 20$, $p = 18$ при $y=1$.

в) $E_p = \frac{y-300}{y}$, $0 < y < 300$, $p = 36$ при $y=12$.

г) $E_p = \frac{p}{p-40}$, $0 < p < 40$, $p = 10$ при $y=3$.

3. Применение дифференциального уравнения естественного роста в экономической динамике

В природе и обществе встречаются многочисленные процессы, в ходе которых некоторые величины изменяются по следующему закону: в течении любого промежутка времени фиксированной длительности Δt значение величины меняется в одно и то же число раз. Процессы, в которых некая величина увеличивается за равные промежутки времени в одно и то же число раз называют процессами естественного роста. Если допустить, что значение величины $y(t)$ меняется в одно и то же число раз не в течение промежутка фиксированной длины Δt , а мгновенно, то мы приходим к процессу, при котором скорость изменения величины $v(t)$ в момент времени t пропорциональна значению этой величины в тот же момент времени. Уравнение, описывающее этот процесс, можно записать так: $v(t) = ky(t)$. Так как $v(t) = y'(t)$, то получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $y'(t) = ky(t)$, которое называют дифференциальным уравнением естественного роста. (Впервые его получил Якоб Бернулли в 1695 год).

Рассмотрим использование этого уравнения в разных задачах.

Пример 5. Истощение ресурсов Земли или рост народонаселения

Рассмотрим задачу, волнующую многих людей в 21 веке, а именно: истощение ресурсов производства продуктов. Запас ресурсов ограничен, часть этих ресурсов невозполнима. Например, часть пахотных земель ежегодно выходит из обращения как за счет естественных причин (эрозия почв, их засоление, заболачивание и т.п.), так и за счет варварского хозяйствования человека и техногенных катастроф. Таким образом, человеку необходимо знать как долго земля еще сможет прокормить все увеличивающееся население планеты. Определим, в каком году будет достигнут предел, после которого планета не сможет производить необходимое для поддержания всех людей сытыми количество пищи.

Возьмем достоверные условия: в настоящее время для обеспечения пищей одного человека необходима площадь 0,1 га. На земном шаре 4000 млн га пахотной земли. Поэтому население земли, если не учитывать новых источников пищи, не должно превышать 40 млрд человек.

Когда будет достигнут этот предел насыщения населения, если оно непрерывно растет со скоростью 1,8% в год?

Используем для решения задачи *дифференциальное уравнение естественного роста*

$$y'(t) = ky(t). \quad (11)$$

Решая уравнение естественного роста: $\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = kdt$, находим его интеграл: $\ln|y| = kt + \ln C$. Откуда общим решением является показательная функция: $y(t) = Ce^{kt}$, где k – *мальтузианский коэффициент линейного роста*. (показательная функция в данном виде была предложена Томасом Мальтусом (1798) для прогнозирования роста населения Земли).

Т.к. ежегодный прирост величины $y(t)$ составляет $p\%$ - то скорость изменения величины составит $\frac{p}{100}y(t)$, следовательно, коэффициент $k = \frac{p}{100}$ (см. (11)). Подставляем параметры и выводим формулу для нахождения нашей задачи.

$$Y(t) = y_0 e^{\frac{pt}{100}}. \quad (12)$$

За t_0 возьмем 1999 год, когда население земли составляло $y_0 = 6 \cdot 10^9$ человек. Тогда подставив значения, имеем: $Y(t) = 6 \cdot 10^9 e^{0,018t}$. Ищем такое t ,

при котором население Земли достигнет критического уровня: $Y(t) = 40 \cdot 10^9 = 6 \cdot 10^9 e^{0,018t}$. Получаем $e^{0,018t} \approx 6,667 \Rightarrow t = 105$ лет.

Ответ: Примерно в 2104 году мир достигнет насыщения.

Данный год рассчитан при условии того темпа роста, который наблюдался в 20-веке и начале 21-ого, т.е. если человечество сможет начать регулировать рождаемость, то этот страшный год можно будет передвинуть на более позднюю дату, либо будут найдены новые источники ресурсов или более совершенные технологии.

Упражнение 17. Известно, что рост количества бактерий в сосуде удовлетворяет уравнению $y'(t) = ky(t)$ с постоянной $k = pm = 0,2$. Пусть в начальный момент времени количество бактерий составляло 1% от максимально возможного значения m . За какое время количество бактерий достигнет 80% от максимального?

Пример 6. Рост денежного вклада в банке

Еще издавна человека интересовал вопрос, какова была бы сумма его вклада, если бы он его вложил очень-очень давно, скажем в начале нашей эры? Задача решается без дополнительных условий, таких как денежные реформы, например смена валюты, изменение ставки процента, изменения обеспеченности ресурсами и товаром и т.д.

Зададим конкретные условия: в какую сумму обратилась бы копейка, если ее вложили в сберегательный банк в первый год нашей эры под 5% годовых?

Предполагается, что денежные реформы не проводятся, а приращение производится непрерывно!

Зададим начальную формулу: $Y'(t) = 0.05y(t)$. Используем показательную функцию, предложенную Мальтусом: $Y(t) = Ce^{kt}$. Подставляем начальные значения: $Y(2000) = 1 \cdot e^{0,05 \cdot 2000}$. Получаем: $Y(t) = 2,688 \cdot 10^{43}$ коп.

Ответ: $2,688 \cdot 10^{41}$ рублей.

Получилось настолько большое число, что не существует его названия! Речь идет о сумме, которая намного превосходит все денежные запасы земного шара.

Почему до сих пор не происходило приближение к столь большой величине? Потому, что ни один вклад не лежит столь долго.

Пример 7. Правило величины 70

Часто в средствах массовой информации мы слышим, что инфляция выросла или снизилась по сравнению с предыдущим периодом. Что такое инфляция и как она выражается? Инфляция – это повышение общего уровня цен. Во время сильной инфляции происходит дисбаланс в экономической, политической, социальной жизни общества.

Для удобного расчета количества лет t необходимых для удвоения общего уровня цен, было выведено правило величины 70.

Через сколько лет удвоится уровень цен, если инфляции составляет $p\%$ в год?

Правило величины 70 выглядит так: $T=70/p$. При инфляции в 7,3% в 2012 $T=70/7,3 \approx 9,6$ лет. При инфляции в 12% уровень цен удвоится примерно через $(70/12)$ шесть лет. Правило величины 70 может быть использовано и в случае, когда нужно установить, сколько потребуется времени, чтобы удвоились личные сбережения в Сбербанке.

Но как же вывели такую закономерность? Используя показательную функцию $Y(t) = y_0 e^{\frac{pt}{100}}$ (см. задачу истощения ресурсов Земли), получаем что $2y_0 = y(t)$. Следовательно, подставив значения мальтузианского коэффициента $k=p/100$, получаем: $2y_0 = y_0 e^{(pt/100)}$. Выразим: $t = (100 \cdot \ln 2)/p$. Тк. $\ln 2 \approx 0,7$, то $T \approx 70/p$.

Если бы нам необходимо было найти тот момент времени, когда произойдет утроение цен, то мы под значение логарифма, вместо числа 2 подставим число 3 и получим $T \approx 110/p$. Нами было найдено, что через 9,6 лет уровень цен увеличится вдвое, другими словами говорят, что за это время покупательная способность денег снизилась, деньги обесценились - утратили половину своей реальной стоимости.

Пример 8: Изменение объема продукции, реализованной к моменту времени t

Пусть $y=y(t)$ - объем продукции, реализованной к моменту времени t . Предположим, что цена на данный товар остается постоянной (в пределах рассматриваемого промежутка времени). Тогда функция $y=y(t)$ удовлетворяет тому же уравнению $y'(t) = ky(t)$, где $k=mpl$, m – норма инвестиций, p – продажная цена, l – коэффициент пропорциональности между величиной инвестиций и скоростью выпуска продукции.

Рассмотрим задачу: выяснить, по истечении какого промежутка времени объем реализованной продукции удвоится по сравнению с первоначальным, если значение коэффициента пропорциональности k в уравнении $y'(t) = ky(t)$ равно 0,1. На сколько процентов следует увеличить норму инвестиций, чтобы промежуток времени, необходимого для удвоения объема реализованной продукции уменьшился на 20%.

Решим уравнение $y'(t) = ky(t)$. Получим $y = y_0 e^{k(t-t_0)}$, где $y_0 = y(t_0)$. Полагая $t_0 = 0, k = 0.1, y = 2y_0$, приходим к равенству $2y_0 = y_0 e^{0.1t}$. Откуда $t = 10 \ln 2 \approx 6,93$ (ед.времени). Полагая теперь $t_1 = 0.8t$, получаем, $k_1 = \frac{k}{0.8} = 1.25k$, т.е. норму инвестиций следует увеличить на 25%.

Ответ: $t \approx 6,93$ (ед.времени), норму инвестиций следует увеличить на 25%.

Упражнение 18. Найти зависимость $y=y(t)$ объема реализованной продукции от времени, предполагая, что цена p на товар задается функцией $p(y) = (7 + 2^{-y}) \cdot y^{-1}$, норма инвестиций $m=0,8$, коэффициент пропорциональности $l=0,5$, значение $y(0)=1$.

Упражнение 19. Предполагая, что цена p на товар задается функцией $p(y) = (5 + 3 \cdot e^{-y}) \cdot y^{-1}$, норма инвестиций $m=0,6$, коэффициент пропорциональности $l=0,4$, значение $y(0)=1$, найти зависимость $y=y(t)$ объема реализованной продукции от времени.

Упражнение 20. В условиях ненасыщаемости рынка найти объем производства по истечении 6 месяцев, если в начальный момент времени объем производства $y_0 = y(0) = 24$ (усл.ед.), при норме инвестиций 0,6, продажной цене равной 0,15 (усл.ед.) и $l=0,4$.

Пример 9. Задача о кредитовании

Пусть заимодавец платит кредитору $p\%$ от занятой суммы y_0 за год; сколько он должен уплатить за год на каждую единицу занятой суммы, если проценты нарастают непрерывно?

Поскольку проценты нарастают непрерывно, то скорость $y'(t)$ изменения величины долга $y(t)$ в момент времени t пропорциональна значению этой величины в тот же момент времени. Следовательно, закон изменения долга описы-

вается дифференциальным уравнением $y'(t) = ky(t)$. Найдем общее решение этого уравнения. Разделяя переменные в уравнении $y'(t) = ky(t)$, имеем $\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = kdt$, находим его интеграл: $\ln|y| = kt + \ln C$. Откуда общим решением является показательная функция: $y(t) = Ce^{kt}$. Поскольку ежегодный прирост величины $y(t)$ составляет $p\%$, то скорость изменения величины составляет $p/100$ от $y(t)$ и коэффициент $k = p/100$. Кроме того, по условию задачи $y(0) = y_0$. Поэтому сумма, которую займодавец должен уплатить кредитору от занятых y_0 денежных единиц за t лет, составит $y(t) = y_0 e^{\frac{pt}{100}}$. От каждой единицы занятой суммы займодавец обязан уплатить $y(t) = e^{\frac{pt}{100}}$. А за год эта сумма составит $y(1) = e^{\frac{pt}{100}}$ денежных единиц.

4. Применение теории дифференциальных уравнений в непрерывных моделях экономики

Рассмотрим некоторые примеры применения теории дифференциальных уравнений в непрерывных моделях экономики, где независимой переменной является время T . Такие модели достаточно эффективны при исследовании эволюции экономических систем на длительных интервалах времени; они являются предметом исследования экономической динамики.

Пример 10. Модель естественного роста выпуска

Будем полагать, что некоторая продукция продается по фиксированной цене P . Обозначим через $Q(T)$ количество продукции, реализованной на момент времени T ; тогда на этот момент времени получен доход, равный $PQ(T)$. Пусть часть указанного дохода расходуется на инвестиции в производство реализуемой продукции, т.е.

$$I(t) = mPQ(t) \quad (13),$$

где коэффициент пропорциональности m - норма инвестиции (постоянное число), $0 < m < 1$. (другими словами величина инвестиций составляет фиксированную часть дохода)

Если исходить из предположения о ненасыщаемости рынка (или о полной реализации производимой продукции), то в результате расширения производства будет получен прирост дохода, часть которого опять будет использована для расширения выпуска продукции. Это приведет к росту скорости вы-

пуска (акселерации), причем скорость выпуска пропорциональна увеличению инвестиций, т. е.

$$Q'(t) = l \cdot I(t). \quad (14)$$

где $1/l$ — норма акселерации. Подставив в (14) формулу (13), получим

$$Q'(t) = kQ, \quad k = lmP. \quad (15)$$

Дифференциальное уравнение (15) представляет собой уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Общее решение этого уравнения имеет вид $Q = Ce^{kt}$, где C — произвольная постоянная.

Пусть в начальный момент времени $T = T_0$ зафиксирован (задан) объем выпуска продукции Q_0 . Тогда из этого условия можно выразить постоянную C : $Q_0 = Ce^{kt} \Rightarrow C = Q_0 e^{-kt}$. Отсюда получаем решение задачи Коши для этого уравнения:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)}. \quad (16)$$

Заметим, что математические модели обладают свойством общности. Так, из результатов биологических опытов следует, что процесс размножения бактерий также описывается уравнением (15). Процесс радиоактивного распада подчиняется закономерности, установленной формулой (16).

Пример 11. Рост выпуска в условиях конкуренции

В этой модели мы снимем предположение о ненасыщаемости рынка, поскольку на практике условие насыщаемости рынка может быть принято только для достаточно узкого временного интервала. Пусть $P = P(Q)$ — убывающая функция, т. е. с увеличением объема продукции на рынке цена на нее падает: $dP/dQ < 0$. Теперь из формул (13)-(15) мы получаем нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно Q с разделяющимися переменными:

$$Q' = \alpha P(Q)Q, \quad \alpha = lm. \quad (17)$$

Поскольку все сомножители в правой части этого уравнения положительны, то $Q' > 0$, т. е. функция $Q(T)$ возрастающая.

Характер возрастания функции определяется ее второй производной. Из уравнения (17) получаем:

$$Q'' = \alpha \left[Q'P(Q) + Q \frac{dP}{dQ} Q' \right] = \alpha Q' \left(P + \frac{dP}{dQ} Q \right) = \alpha Q' P \left(1 + \frac{dP}{dQ} \cdot \frac{Q}{P} \right).$$

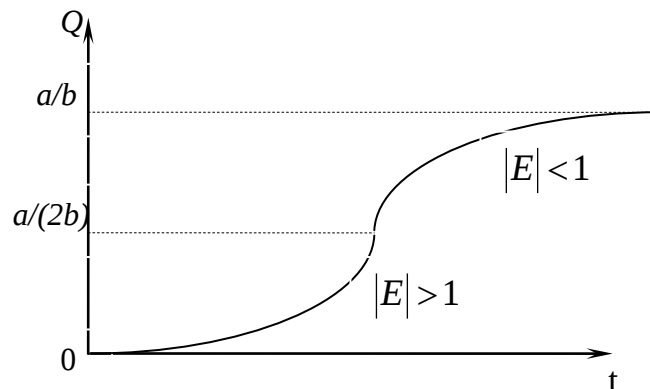
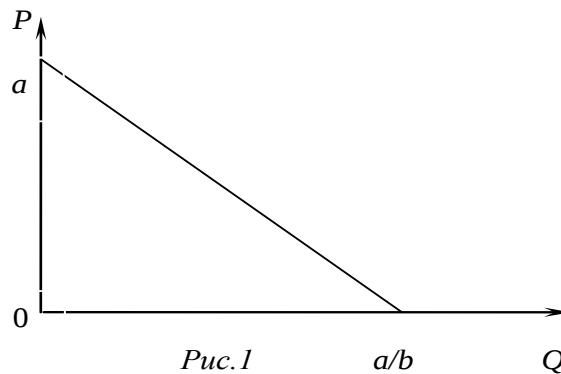
Это равенство можно преобразовать, введя эластичность спроса

$E(P) = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$, так как $\frac{dQ}{dP} < 0$, а значит, и $E < 0$, окончательно получаем

$$Q'' = \alpha Q' P \left(1 - \frac{1}{|E|} \right). \quad (18)$$

Из уравнения (18) следует, что $Q'' > 0$ при эластичном спросе, т. е. когда $|E| > 1$, и график функции $Q(T)$ имеет направление выпуклости вниз, что означает прогрессирующий рост. При неэластичном спросе $|E| < 1$, и в этом случае $Q'' < 0$ — направление выпуклости функции $Q(T)$ вверх, что означает замедленный рост (насыщение).

Для простоты примем зависимость $P(Q)$ в виде линейной функции $P(Q) = a - bQ$, $a > 0$, $b > 0$, (рис.1).



Тогда уравнение (17) имеет вид

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q, \quad (19),$$

откуда

$$Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \quad (20)$$

Из соотношений (19) и (20) получаем: $Q' = 0$ при $Q = 0$ и при $Q = a/b$. Также $Q'' > 0$ при $Q < a/(2b)$ и $Q'' < 0$ при $Q > a/(2b)$; таким образом, $Q=a/(2b)$ - точка перегиба графика функции $Q=Q(T)$. Приведенный на рис. 2, график этой функции (одной из интегральных кривых дифференциального уравнения (19)) носит название *логистической кривой*.

Аналогичные кривые характеризуют и другие процессы, например размножение бактерий в ограниченной среде обитания, динамику эпидемий внутри ограниченной общности биологических организмов и др.

Рассмотрим в качестве иллюстрации вышесказанного конкретную задачу. Найти выражение для объема реализованной продукции $y=y(t)$, если известно, что кривая спроса $p(y)=2-y$, норма акселерации $1/l=2$, норма инвестиций $m=0.5$, $y(0)=0.5$.

В этом случае уравнение (17) принимает вид $y' = (2 - y)y$ или $\frac{dy}{(2-y)y} = dt$. Выполняя почленное интегрирование, получаем $\ln \left| \frac{y-2}{y} \right| = -2t + C_1$ или $\frac{y-2}{y} = Ce^{-2t}$, где $C = \pm e^{C_1}$. Учитывая, что $y(0)=0.5$, получаем, что $C=3$. Выражая теперь y , окончательно имеем $y = \frac{2}{1+3e^{-2t}}$. График данной функции схематично изображен на рис. 3.

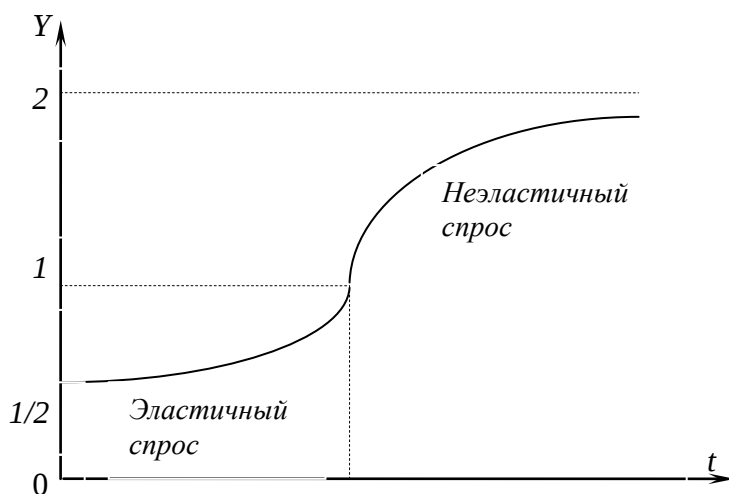


Рис. 3

В данном случае эластичность спроса задается функцией $E_p(y) = \frac{y-2}{y}$ и условие $E_p(y) = \frac{p}{y} \frac{dy}{dp} = \frac{y-2}{y}$, определяющее положение точки перегиба на кривой, дает $y=1$.

5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

5.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Это – уравнения вида

$$y' + p(x)y = 0. \quad (21)$$

Линейным оно называется потому, что и неизвестная функция y , и её производная y' входят в это уравнение линейно (в первой степени) - аналогично тому, как входят x и y в линейную функцию $y = kx + b$. А добавка «однородное» связана с тем, что правая часть уравнения (21) представляет собой нуль. Если же правая часть будет не равна нулю, то такое уравнение будет называться линейным неоднородным.

Уравнение (21) является заодно и уравнением с разделяющимися переменными вида при $f_1(x) = -p(x)$ и $f_2(y) = y$. Из этого следует схема его решения. (см. ранее)

5.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Это - уравнения вида

$$y' + p(x)y = f(x). \quad (22)$$

Теорема: Общее решение уравнения (22), содержащее все его частные решения, может быть получено по формуле

$$y = Cy_0(x) + y_*(x), \quad (23)$$

где $Cy_0(x)$ – общее решение линейного однородного уравнения (21), а $y_*(x)$ – какое-либо частное решение линейного неоднородного уравнения (22).

Согласно формуле (23), определяющей структуру общего решения линейного неоднородного уравнения (22), получение этого общего решения равносильно решению двух частных проблем.

Проблема 1: решить линейное однородное дифференциальное уравнение (21) и получить его общее решение.

Проблема 2: найти (или подобрать) какое - либо частное решение $y_* = y_*(x)$ неоднородного уравнения (22).

Схема решения первой из этих проблем указана выше. А вторую проблему для произвольной функций $f(x)$ можно решить так называемым *методом вариации произвольной постоянной*.

Суть этого метода в следующем. Будем искать частное решение $y_* = y_*(x)$ неоднородного дифференциального уравнения (22) в виде

$$y_* = C(x)y_0(x). \quad (24)$$

То есть в виде, аналогичном виду общего решения линейного однородного уравнения (21), только с заменой произвольной константы C на неизвестную функцию $C(x)$. Находя из (24) y'_*

$$y'_* = C'(x)y_0(x) + C(x)y'_0(x). \quad (25)$$

и подставляя в уравнение (22) вместо y и y' выражения (24) и (25) для y_* и y'_* , получим:

$$C'(x)y_0(x) + C(x)[y'_0(x) + p(x)y_0(x)] = f(x). \quad (26)$$

Учитывая, что $y_0(x)$ - одно из частных решений линейного однородного уравнения (21), получаем, что квадратная скобка в (26) равна нулю. Значит, (26) принимает вид:

$$C'(x)y_0(x) = f(x). \quad (27)$$

Отсюда находим $C'(x)$, а по ней и $C(x)$:

$$C'(x) = \frac{f(x)}{y_0(x)} \Leftrightarrow C(x) = \int \frac{f(x)}{y_0(x)} dx = F(x) + C =$$

=| отбрасываем C , чтобы получить конкретную функцию

$$C(x)| = F(x). \quad (28)$$

Подставляя найденную функцию $C(x)$ в формулу (24), получим искомое частное решение $y_* = y_*(x)$ неоднородного уравнения (22). А затем, по формуле (23), получим и общее решение этого уравнения.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = y \operatorname{tg} x + 2 \sin x. \quad (29)$$

Решение. Данное уравнение

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 2 \sin x \quad (30)$$

имеет вид (22) при $p(x) = -\operatorname{tg} x$ и $f(x) = 2 \sin x$, то есть является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Следовательно, его общее решение, содержащее все его частные решения, может быть найдено по формуле (23). Найдем оба слагаемых этой формулы. Для этого решим следующие две проблемы.

Проблема 1. Решим соответствующее неоднородному уравнению (30) однородное уравнение

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0 \quad (31)$$

и найдем его общее решение $y = Cy_0(x)$.

$$\begin{aligned} y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0 &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{tg} x dx \Leftrightarrow \ln|y| = -\ln|\cos x| + C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln|y| + \ln|\cos x| = C \Leftrightarrow \ln|y \cos x| = C \Leftrightarrow |y \cos x| = e^C \Leftrightarrow y \cos x = \pm e^C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y \cos x = C \Leftrightarrow y = \frac{C}{\cos x} \Leftrightarrow y = Cy_0(x), \text{ где } y_0(x) = \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } y = Cy_0(x) = \frac{C}{\cos x} \quad (y_0(x) = \frac{1}{\cos x}) \quad (32)$$

- общее решение линейного однородного уравнения (31).

Проблема 2. Найдем частное решение $y_* = C(x)y_0(x)$ линейного неоднородного уравнения (30). Функция $y_0(x)$ уже найдена. А функцию $C(x)$ найдем по схеме (38):

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \frac{f(x)}{y_0(x)} dx = \int \frac{2 \sin x}{\frac{1}{\cos x}} dx = \int 2 \sin x \cos x dx = \int \sin 2x dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2x + C = | \text{отбросим } C | = -\frac{1}{2} \cos 2x. \end{aligned} \quad (33)$$

Итак,

$$y_* = C(x)y_0(x) = -\frac{\cos 2x}{2 \cos x} \quad (34)$$

- частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (30).

А теперь по формуле (23) с учетом (32) и (34) запишем и искомое общее решение линейного неоднородного уравнения (30):

$$y = \frac{C}{\cos x} - \frac{\cos 2x}{2 \cos x}. \quad (35)$$

Рассмотрим еще один способ решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций от x :

$$y = u(x)v(x). \quad (36).$$

Одну из этих функций можно взять произвольной, другая определится на основании уравнения $y' + p(x)y = f(x)$.

Дифференцируя обе части равенства (36) находим: $\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$.

Подставляя полученное выражение производной $\frac{dy}{dx}$ в уравнение

$$y' + p(x)y = f(x) \quad \text{получим} \quad u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + p(x)uv = f(x) \quad \text{или}$$

$$u \left(\frac{dv}{dx} + p(x)v \right) + v \frac{du}{dx} = f(x). \text{ Выберем функцию } v(x) \text{ такой, что } \frac{dv}{dx} + p(x)v = 0.$$

Разделяя переменные в этом дифференциальном уравнении относительно функции $v(x)$, находим $\frac{dv}{v} = -p(x)dx$. Интегрируя, получаем

$-\ln|C_1| + \ln|v| = -\int p(x)dx$ или $v(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx}$. Так как нам достаточно какого-нибудь отличного от нуля решения уравнения $y' + p(x)y = f(x)$, то за функцию $v(x)$ возьмем: $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$, где $\int p(x)dx$ - какая-нибудь первообразная.

Очевидно, что $v(x) \neq 0$.

Подставляя найденное решение $v(x)$ в уравнение $y' + p(x)y = f(x)$ с учетом $\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0$, получаем $v(x) \frac{du}{dx} = f(x)$ или $\frac{du}{dx} = \frac{f(x)}{v(x)}$, откуда

$$u(x) = \int \frac{f(x)}{v(x)} dx + C. \text{ Подставляя } u(x) \text{ и } v(x) \text{ в формулу (36), окончательно по-}$$

$$\text{лучаем } y = v(x) \left[\int \frac{f(x)}{v(x)} dx + C \right] \text{ или } y = v(x) \int \frac{f(x)}{v(x)} dx + Cv(x).$$

Пример 12. Найти функцию дохода $Y = Y(t)$, если известно, что величина потребления задаётся функцией $C = 2t$, коэффициент капиталоемкости прироста дохода $b = \frac{1}{2}$, $Y(0) = 2$.

Решение: Известно, что функция дохода равна $Y(t) = I(t) + C(t)$, где $I(t)$ – сумма инвестиций, $C(t)$ – величина потребления. А также имеет место дифференциальное уравнение $bY'(t) = I(t)$, где b – коэффициент капиталоемкости

прироста дохода. По условию задачи составим дифференциальное уравнение:

$$Y(t) = \frac{1}{2}Y'(t) + 2t, \text{ или } y'(t) - 2y(t) = -4t.$$

Итак, функция дохода удовлетворяет линейному неоднородному уравнению первого порядка. Будем искать его решение в виде $Y(t) = u(t)v(t)$.

Тогда $y' = u'v + v'u$, подставим в уравнение $u'v + v'u - 2uv = -4t$, откуда

$$u'v + u(v' - 2v) = -4t \Rightarrow \begin{cases} u(v' - 2v) = 0 \\ u'v = -4t \end{cases}. \text{ Решаем первое уравнение системы}$$

$\frac{dv}{v} = 2dt$. $\int \frac{dv}{v} = \int 2dt \Rightarrow \ln v = 2t \Rightarrow v = e^{2t}$. Подставим полученное значение функции v во второе уравнение: $u'e^{2t} = -4t \Rightarrow du = -\int 4te^{-2t} dt$, интегрируя по частям, получаем $u = 2te^{-2t} + e^{-2t} + C$. Таким образом, общее решение $y = uv$ или $y = (2te^{-2t} + e^{-2t} + C)e^{2t} = Ce^{2t} + 2t + 1$. Используя начальные условия $Y(0) = 2$, найдём C : $2 = C + 1$ или $C = 1$. Итак, функция дохода имеет вид $y = e^{2t} + 2t + 1$.

6. Дифференциальные уравнения второго порядка

6.1. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Вначале кратко вспомним метод решения дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Имеем линейное однородное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (37)$$

где p и q – постоянные действительные числа. Чтобы найти общий интеграл этого уравнения, достаточно, как было показано выше, найти два линейно независимых частных решения.

Будем искать частные решения в виде

$$y = e^{kx}, \text{ где } k - \text{const}; \quad (38)$$

тогда

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Подставляя полученные выражения производных в уравнение (37), находим: $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Так как $e^{kx} \neq 0$, то, значит,

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (39)$$

Следовательно, если k будет удовлетворять уравнению (37), то e^{kx} будет решением уравнения (37). Уравнение (39) называется *характеристическим уравнением* по отношению к уравнению (37).

Характеристическое уравнение есть квадратное уравнение, имеющее два

корня: $k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$

Возможны следующие случаи:

- 1) k_1 и k_2 – действительные и при том не равные между собой числа ($k_1 \neq k_2$);
- 2) k_1 и k_2 – действительные равные числа ($k_1 = k_2$).
- 3) k_1 и k_2 – комплексные числа;

Рассмотрим каждый случай отдельно.

- 1) Корни *характеристического уравнения действительны* и различны: ($k_1 \neq k_2$). В этом случае частными решениями будут функции

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Эти решения линейно независимы, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const}.$$

Следовательно, общий интеграл имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Пример. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}, \quad k_1 = 1, k_2 = -2.$$

Общий интеграл есть $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

- 2) Корни *характеристического уравнения действительны* и равные: ($k_1 = k_2$). Одно частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$ получается на основании предыдущих рассуждений. Нужно найти второе частное решение линейно независимое

с первым (функция $y_2 = e^{k_2 x}$ тождественно равна $y_1 = e^{k_1 x}$ и поэтому не может рассматриваться в качестве второго частного решения).

Будем искать второе частное решение в виде: $y_2 = u(x)e^{k_1 x}$, где $u(x)$ – неизвестная функция, подлежащая определению.

Дифференцируя, находим

$$y_2' = u'e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u' + k_1 u),$$

$$y_2'' = u''e^{k_1 x} + 2k_1 u'e^{k_1 x} + k_1^2 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u).$$

Подставляя выражения производных в уравнение (37), получаем

$$e^{k_1 x} [u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 u + pk_1 + q)u] = 0.$$

Так как k_1 – кратный корень характеристического уравнения, то $k_1^2 + pk_1 + q = 0$. Кроме того, $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ или $2k_1 = -p$, $2k_1 + p = 0$.

Следовательно, для того чтобы найти $u(x)$, надо решить уравнение $e^{k_1 x} u'' = 0$ или $u'' = 0$. Интегрируя, получаем $u = Ax + B$. В частности, можно положить $A=1, B=0$; Тогда $u=x$. Таким образом, в качестве второго частного решения можно взять:

$$y_2 = x e^{k_1 x}.$$

Это решение линейно независимо с первым, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const.}$$

Поэтому общим интегралом будет функция

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x).$$

Пример. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0$.

Находим корни характеристического уравнения: $k_1 = k_2 = 2$. Общим интегралом будет $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

3) Корни *характеристического уравнения* комплексные. Так как комплексные корни входят попарно сопряженными, то обозначим:

$$k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i,$$

где $\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$

Частные решения можно записать в форме

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x} \quad (40)$$

- это комплексные функции действительного аргумента, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (37). Перепишем комплексные решения (40) в виде суммы действительной и мнимой части.

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Очевидно, что если какая-либо комплексная функция действительного аргумента $y = u(x) + iv(x)$ удовлетворяет уравнению (37), то этому уравнению удовлетворяют функции $u(x)$ и $v(x)$. Тогда частными решениями уравнения (37) будут действительные функции

$$\bar{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \bar{y}_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Эти функции линейно независимы, т.к. $\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \operatorname{ctg} \beta x \neq \operatorname{const}.$

Следовательно, общее уравнение (37) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y = C_1 \bar{y}_1 + C_2 \bar{y}_2 = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0$.

Находим корни характеристического уравнения:

$k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i$. Следовательно, общий интеграл :

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

6.2. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (специальная правая часть)

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \quad (41)$$

Структура общего решения такого уравнения определяется следующей теоремой:

Теорема. Общее решение неоднородного уравнения (41) представляется как сумма какого-нибудь частного решения этого уравнения y^* и общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (42)$$

Пусть имеем уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (43)$$

где p и q – действительные числа.

У таких уравнений частное решение иногда бывает возможно найти проще, не прибегая к интегрированию. Эта возможность зависит от вида правой части. Рассмотрим два случая:

1) Пусть правая часть уравнения (43) представляет собой произведение показательных функций на многочлен, т.е. имеет вид

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}, \quad (44)$$

где $P_n(x)$ – многочлен n -й степени. Тогда возможны следующие частные случаи:

а) Число α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

В этом случае частное решение нужно искать в виде

$$y^* = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x} = Q_n(x) e^{\alpha x}. \quad (45)$$

Действительно, подставляя y^* в уравнение (44) и сокращая все члены на множитель $e^{\alpha x}$, будем иметь:

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x). \quad (46)$$

$Q_n(x)$ – многочлен степени n , $Q_n'(x)$ – многочлен степени $n-1$, $Q_n''(x)$ – многочлен степени $n-2$. Таким образом, слева и справа от знака равенства стоят многочлены n – ой степени. Приравнявая коэффициенты при одинаковых

степенях x (число неизвестных коэффициентов равно $n+1$), получим систему $n+1$ уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$.

б) Число α есть простой (однократный) корень характеристического уравнения.

Если бы в этом случае частное решение мы стали искать в форме (45), то и в равенстве (46) слева получился бы многочлен степени $n-1$, так как коэффициент при $Q_n(x)$, т.е. $(\alpha^2 + p\alpha + q)$, равен нулю, а многочлены $Q'_n(x)$ и $Q''_n(x)$ имеют степень, меньшую чем n . Следовательно, ни при каких $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ равенство (46) не было бы тождеством. Поэтому в рассматриваемом случае частное решение нужно брать в виде многочлена $(n+1)$ -й степени, но без свободного члена. (так как свободный член этого многочлена исчезнет при дифференцировании).

$$y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}.$$

в) Число α есть двукратный корень характеристического уравнения. Тогда в результате подстановки в дифференциальное уравнение функции $y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}$ степень понижается на две единицы. Действительно, если α - корень характеристического уравнения, то $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$; кроме того, так как α является двукратным корнем, то $2\alpha = -p$ (так как по теореме Виета сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при неизвестном в первой степени, взятому с обратным знаком). Таким образом, $2\alpha + p = 0$.

Следовательно, в левой части равенства (46) остается $Q''_n(x)$, т.е. многочлен $(n-2)$ -й степени. Для того, чтобы в результате подстановки получить многочлен степени n , следует частное решение искать в виде произведения $e^{\alpha x}$ на многочлен $(n+2)$ -й степени. При этом свободный член этого многочлена и член в первой степени исчезнут при дифференцировании; поэтому их можно не включать в частное решение.

Итак, в случае, когда α является двукратным корнем характеристическим уравнения, частное решение можно брать в форме

$$y^* = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 3y = x$.

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Так как правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $x e^{0x}$ (т.е. $P_1(x) e^{0x}$), а 0 в показателе степени не является корнем характеристического уравнения $k^2 + 4k + 3 = 0$, то частное решение будем искать в форме

$$y^* = Q_1(x) e^{0x} = A_0 x + A_1.$$

Подставляя это выражение в заданное уравнение, будем иметь

$$4A_0 + 3(A_0 x + A_1) = x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим

$$3A_0 = 1, \quad 4A_0 + 3A_1 = 0,$$

откуда

$$A_0 = \frac{1}{3}, \quad A_1 = -\frac{4}{9}.$$

Следовательно,

$$y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

Общее решение $y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$.

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Так как правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $(x^2 + 1)e^{3x}$ (т.е. $P_2(x)e^{3x}$), а 3 в показателе степени не является корнем характеристического уравнения $k^2 + 9 = 0$, то частное решение будем искать в форме

$$y^* = Q_2(x) e^{0x} = (Ax^2 + Bx + C) e^{3x}.$$

Подставляя это выражение в заданное уравнение, будем иметь

$$[9(Ax^2 + Bx + C) + 6(2Ax + B) + 2A + 9(Ax^2 + Bx + C)]e^{3x} = (x^2 + 1)e^{3x}.$$

Сокращая на e^{3x} и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим

$$18A=1, \quad 12A+18B=0, \quad 2A+6B+18C=1,$$

откуда $A=\frac{1}{18}, B=-\frac{1}{27}, C=\frac{5}{81}$. Следовательно, частное решение

$$y^* = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x}$$

и общее решение $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x}$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$.

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\bar{y} = C_1 e^{6x} + C_2 e^x.$$

Так как правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $(x-2)e^x$ (т.е. $P_1(x)e^{1x}$), а коэффициент 1 в показателе степени является простым корнем характеристического уравнения $k^2 - 7k + 6 = 0$, то частное решение будем искать в форме

$$y^* = xQ_1(x)e^x = x(Ax + B)e^x.$$

Подставляя это выражение в заданное уравнение, будем иметь

$$[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx)]e^x = (x-2)e^x$$
 или

$$(-10Ax - 5B + 2A)e^x = (x-2)e^x.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим

$$-10A=1, \quad -5B+2A=-2,$$

откуда $A=-\frac{1}{10}, B=\frac{9}{25}$. Следовательно, частное решение

$$y^* = x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^x$$

и общее решение $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^x$.

Переходим ко второму случаю, второму виду правой части.

2) Пусть правая часть уравнения (27) имеет вид

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Тогда форма частного решения определяется так:

а) если число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (3.4.5) следует искать в виде

$$y^* = U(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

где $U(x)$ и $V(x)$ - многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

б) если число $\alpha + i\beta$ есть корень характеристического уравнения, то частное решение уравнения (10) следует искать в виде

$$y^* = x[U(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)e^{\alpha x} \sin \beta x],$$

где $U(x)$ и $V(x)$ - многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

При этом указанные формы частных решений сохраняются и в тех случаях, когда в правой части уравнения (43) один из многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно равен нулю, т.е. когда правая часть имеет вид $P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ или $Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Пример. Найти общий интеграл линейного неоднородного уравнения $y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет корни $k_1 = -1 + 2i$; $k_2 = -1 - 2i$. Поэтому общий интеграл соответствующего однородного уравнения

$$\bar{y} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y^* = A \cos x + B \sin x,$$

где A и B – постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Подставляя y^* в заданное уравнение, будем иметь

$$-A \cos x - B \sin x + 2(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) = 2 \cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим два уравнения для определения A и B :

$$-A + 2B + 5A = 2, \quad -B - 2A + 5B = 0,$$

откуда $A = 2/5, B = 1/5$. Общее решение данного уравнения:

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

Пример. Найти общий интеграл линейного неоднородного уравнения $y'' + 4y = \cos 2x$.

Решение. Характеристическое уравнения $k^2 + 4 = 0$ имеет корни $k_1 = 2i; k_2 = 2i$. Поэтому общий интеграл соответствующего однородного уравнения

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в форме

$$y^* = x(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} (y^*)' &= 2x(-A \sin 2x + B \cos 2x) + (A \cos 2x + B \sin 2x), \\ (y^*)'' &= 4x(-A \cos 2x - B \sin 2x) + 4(-A \sin 2x + B \cos 2x). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения производных в данное уравнение и приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, получаем систему уравнений для определения A и B : $4B = 1, -4A = 0$, откуда $A = 0, B = \frac{1}{4}$.

Таким образом, общий интеграл данного уравнения

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

Перейдем к применению вышеизложенной теории в экономике.

Пример 13. Модель рынка с прогнозируемыми ценами

Рассмотрим модель рынка с прогнозируемыми ценами. В простых моделях рынка спрос и предложение обычно полагают зависящими только от текущей цены на товар. Однако спрос и предложение в реальных ситуациях зависят еще и от тенденции ценообразования и темпов изменения цены. В моделях с непрерывными и дифференцируемыми по времени T функциями эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными функции цены $P(T)$.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть функции спроса D и предложения S имеют следующие зависимости от цены P и ее производных:

$$\begin{aligned} D(t) &= 3P'' - P' - 2P + 18, \\ S(t) &= 4P'' + P' + 3P + 3 \end{aligned} \quad (47)$$

Принятые в (47) зависимости вполне реалистичны: поясним это на слагаемых с производными функции цены.

1. Спрос "подогревается" темпом изменения цены: если темп растет ($P'' > 0$), то рынок увеличивает интерес к товару, и наоборот. Быстрый рост цены отпугивает покупателя, поэтому слагаемое с первой производной функции цены входит со знаком минус.

2. Предложение в еще большей мере усиливается темпом изменения цены, поэтому коэффициент при P'' в функции $S(T)$ больше, чем в $D(T)$. Рост цены также увеличивает предложение, потому слагаемое, содержащее P' , входит в выражение для $S(T)$ со знаком плюс.

Требуется установить зависимость цены от времени. Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством $D = S$, приравняем правые части уравнений (47). После приведения подобных получаем

$$P'' + 2P' + 5P = 15. \quad (48)$$

Соотношение (48) представляет линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $P(T)$. Как было установлено выше, общее решение такого уравнения состоит из суммы какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$P'' + 2P' + 5P = 0. \quad (49)$$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 2k + 5 = 0$.

Его корни — комплексно-сопряженные числа: $k_{1,2} = -1 \pm 2i$, и, следовательно, общее решение уравнения (49) дается формулой $P(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В качестве частного решения неоднородного уравнения (48) возьмем решение $P = P_{st}$ — постоянную величину как *установившуюся* цену. Подстановка в уравнение (48) дает значение $P_{st} = 3$. Таким образом, общее решение уравнения (48) имеет вид

$$P(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t). \quad (50)$$

Нетрудно видеть, что $P(T) \rightarrow P_{st} = 3$ при $T \rightarrow \infty$, т. е. все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $P = 3$ и колеблются около нее. Это означает, что все цены стремятся к установившейся цене P_{st} с колебаниями около нее, причем амплитуда этих колебаний затухает со временем.

Приведем частные решения этой задачи в двух вариантах:

Вариант 1. Пусть в начальный момент времени известна цена, а также тенденция ее изменения: $t = 0; P = 4; P' = 1$.

Подставляя первое условие в формулу (50), получаем $P(0) = C_1 + 3 = 4$, откуда $C_1 = 1$, т. е. имеем

$$P(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + C_2 \sin 2t). \quad (51)$$

Дифференцируя, имеем отсюда $P'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 - 2)\sin 2t]$.

Теперь реализуем второе условие задачи Коши: $P'(0) = 2C_2 - 1 = 1$, откуда $C_2 = 1$. Окончательно получаем, что решение задачи Коши имеет вид $P(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t)$.

Или в более удобной форме: $P(t) = 3 + e^{-t} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$.

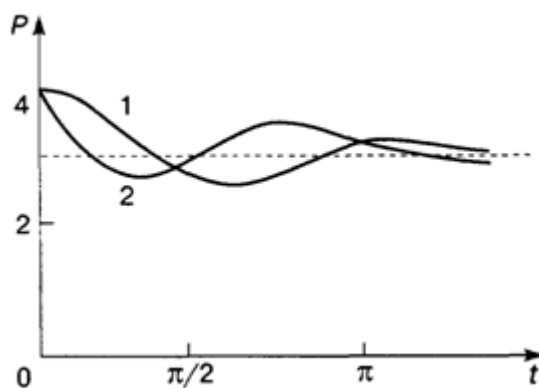


Рис. 4

Вариант 2. Пусть в начальный момент времени известны цена и спрос: $t = 0; P = 4; D = 16$.

Поскольку первое начальное условие такое же, как и в предыдущем случае, то имеем и здесь решение (51). Тогда производные функции $P(T)$ выражаются формулами: $P'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t]$;

$$P''(t) = -e^{-t}[(4C_2 + 3)\cos 2t - (3C_2 - 5)\sin 2t].$$

Отсюда $P'(0) = 2C_2 - 1$ и $P''(0) = -4C_2 - 3$. Подставляя эти равенства во второе условие задачи, т. е. $D(0) = 16$, имеем с учетом вида $D(T)$ из первой формулы (47): $C_2 = -1$. Итак, решение данной задачи имеет вид $P(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t)$.

Или в более удобной форме: $P(t) = 3 + e^{-t} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$ (51)

Интегральные кривые, соответствующие задачам 1 и 2, изображены на рис. 4.

Упражнение 21. Найти динамику цены P на товар, если прогноз спроса и предложения описывается следующими соотношениями:

а) $D(t) = P'' - 2P' - 2P + 10, S(t) = 2P'' + 2P' + 4P + 4;$

б) $D(t) = P'' - 2P' - 6P + 36, S(t) = 2P'' + 4P' + 4P + 6;$

в) $D(t) = P'' + 4P' + 2P + 8, S(t) = 2P'' + 2P' + 3P + 6.$

7. Различные примеры решения экономических задач с помощью дифференциальных уравнений

Пример 14. Динамическая модель Кейнса

Рассмотрим простейшую балансовую модель, включающую в себя основные компоненты динамики расходной и доходной частей экономики. Пусть $Y(t)$, $E(t)$, $S(t)$, $I(t)$ — соответственно национальный доход, государственные расходы, потребление и инвестиции. Все эти величины рассматриваются как функции времени t . Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} Y(t) = S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \\ I(t) = k(t)Y'(t) \end{cases} \quad (52)$$

где $a(t)$ — коэффициент склонности к потреблению ($0 < a(t) < 1$), $b(t)$ — автономное (конечное) потребление, $k(t)$ — норма акселерации. Все функции, входящие в уравнения (52), положительны.

Поясним смысл уравнений (52). Сумма всех расходов должна быть равной национальному доходу — этот баланс отражен в первом уравнении. Общее потребление состоит из внутреннего потребления некоторой части национального дохода в народном хозяйстве и конечного потребления — эти составляющие показаны во втором уравнении. Наконец, размер инвестиций не

может быть произвольным: он определяется произведением нормы акселерации, величина которой характеризуется уровнем технологии и инфраструктуры данного государства, на предельный национальный доход.

Будем полагать, что функции $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$ и $E(t)$ заданы — они являются характеристиками функционирования и эволюции данного государства. Требуется найти динамику национального дохода, или Y как функцию времени t .

Подставим выражения для $S(t)$ из второго уравнения и для $I(t)$ из третьего уравнения в первое уравнение. После приведения подобных получаем дифференциальное неоднородное линейное уравнение первого порядка для функции $Y(t)$:

$$Y' = \frac{1-a(t)}{k(t)}Y - \frac{b(t)+E(t)}{k(t)}. \quad (53)$$

Существует достаточно сложная формула общего решения этого уравнения. Мы проанализируем более простой случай, полагая основные параметры задачи a , b и k постоянными числами. Тогда уравнение (53) упрощается до линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$Y' = \frac{1-a}{k}Y - \frac{b+E}{k}. \quad (54)$$

Как известно, общее решение неоднородного уравнения есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. В качестве частного решения уравнения (54) возьмем так называемое *Равновесное* решение, когда $Y' = 0$, т. е.

$$Y_p = \frac{b+E}{1-a}. \quad (55)$$

Нетрудно видеть, что эта величина положительна. Общее решение однородного уравнения дается формулой $\tilde{y} = Ce^{\left(\frac{1-a}{k}t\right)}$, так что общее решение уравнения (54) имеет вид

$$Y(t) = \frac{b+E}{1-a} + Ce^{\left(\frac{1-a}{k}t\right)}. \quad (56)$$

Интегральные кривые уравнения (54) показаны на рис. 5. Если в начальный момент времени $Y_0 < Y_p$, то $C = Y_0 - Y_p < 0$ и кривые уходят вниз от равновесного решения (54), т. е. национальный доход со временем падает при заданных параметрах задачи A , B , k и E , так как показатель экспоненты в (56)

положителен. Если же $Y_0 > Y_p$, то $C > 0$ и национальный доход растет во времени — интегральные кривые уходят вверх от равновесной прямой $Y = Y_p$. Точка $Y = Y_p$ представляет собой точку неустойчивого равновесия.

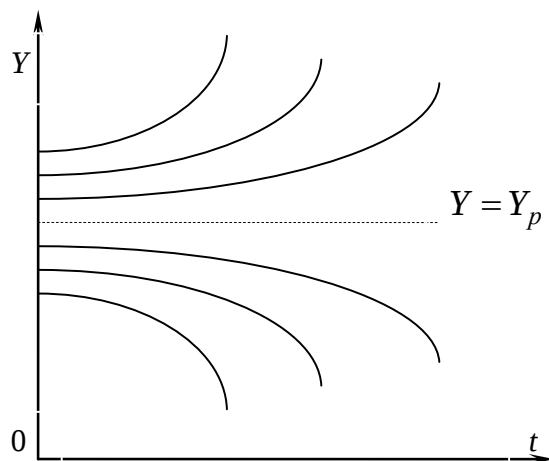


Рис. 5

Пример 15. Рост выпуска дефицитной продукции

Найти закон роста выпуска дефицитной продукции в условиях ненасыщаемости рынка.

Обозначим через $y(t)$ количество продукции, произведенной в момент времени t . Будем предполагать, что продукция продается по фиксированной цене p и моментально реализуется. Тогда в момент времени t доход составит $py(t)$. Поскольку предприятие получает прибыль от реализации своей продукции в течении долгого времени, то ему выгодно расширять производство. Пусть на инвестиции $i(t)$ в производство расходуется m -я часть указанного дохода, т. е. $i(t) = \frac{p}{m} y(t)$.

В результате расширения производства будет получен прирост дохода, m -я часть которого опять будет использована для расширения выпуска продукции. Это приведет к росту скорости выпуска, причем скорость выпуска $y'(t)$ пропорциональна увеличению инвестиций, т. е. $y'(t) = ai(t)$. Подставив

$y'(t) = ai(t)$ в $i(t) = \frac{p}{m} y(t)$, получим дифференциальное уравнение естественного

роста $y'(t) = ky(t)$, $k = \frac{ap}{m}$. Решением его является экспоненциальная функция

$y = Ce^{kt}$, которая показывает, как быстро можно добиться огромных объемов

выпуска дефицитной продукции, если постоянно направлять часть дохода в расширение производства.

Харрод и Домар считали, что можно добиться устойчивого роста не только объемов выпуска дефицитной продукции предприятия, но и также всей мировой рыночной экономики. Харрод считал, что устойчивый темп роста производства обеспечивается естественным ростом населения и естественным ростом производительности труда. Третьим фактором роста Харрод считал размеры накопления капитала, норма накопления которого должна быть постоянной.

Библиографический список

1. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов / А.М. Ахтямов. – Москва: Физматлит, 2004. – 464 с.
2. Красс, М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – Москва: Дело, 2003 – 688 с.
3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов : учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н. Ш. Кремер и др.; под ред. Н. Ш. Кремера. – Москва: Юнити-Дана, 2007. – 479 с.
4. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В.В. Амелькин. – Москва: Наука, 1987.-160 с.
5. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера . – 2-е изд., перераб. – Москва: Юрайт , 2010 . – 430 с.
6. Орехов, Н. А. Математические методы и модели в экономике : учеб. пособие для вузов по эконом. специальностям / Н. А. Орехов, А. Г. Левин, Е. А. Горбунов; под ред. Н. А. Орехова . – Москва: Экзамен, 2004 . – 302 с.

Оглавление

1. Общие понятия и определения	3
2. Дифференциальные уравнения первого порядка	4
2.1. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка	4
2.2. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными	5
3. Применение дифференциального уравнения естественного роста в экономической динамике	13
4. Применение теории дифференциальных уравнений в непрерывных моделях экономики	18
5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка	22
5.1. Линейные однородные дифференциальные ур. 1-го порядка.....	22
5.2. Линейные неоднородные дифференциальные ур. 1-го порядка.....	22
6. Дифференциальные уравнения второго порядка.....	26
6.1. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.....	26
6.2. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (специальная правая часть)	30
7. Различные примеры решения экономических задач с помощью дифференциальных уравнений.....	38

Подписано в печать 5.03.2015.	Усл. печ. л. 2,7	Тираж 20 экз.
Печать офсетная.	Бумага писчая.	Заказ № _____.

Отпечатано: РИО ВоГУ, г. Вологда, ул. С. Орлова, 6