

Министерство образования и науки Российской Федерации
Вологодский государственный технический университет

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Некоторые приложения высшей математики
в экономике

*Методические указания к изучению курса для студентов
всех форм обучения направления 080100.62 «Экономика»*

Факультет экономический

Направление подготовки 080100.62 – «Экономика»

Профили подготовки финансы и кредит,
экономика предприятий и организаций,
макроэкономическое планирование и
прогнозирование,
бухгалтерский учет, статистика.

Вологда
2013

Математический анализ. Некоторые приложения высшей математики в экономике: методические указания к изучению курса для студентов всех форм обучения направления 080100.62 «Экономика».- Вологда: ВоГТУ, 2013.- 31 с.

В методических указаниях полно и с большим количеством разнообразных примеров изложены базовые приложения высшей математики в экономике. В работе приведен весь необходимый теоретический материал. Данные методические указания окажут значительную помощь в самостоятельной работе студентов направления «Экономика» по профилям подготовки: **финансы и кредит, экономика предприятий и организаций, макроэкономическое планирование и прогнозирование, бухгалтерский учет, статистика** по изучению курса математического анализа.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГТУ

Составитель О.В. Авдеева, канд. физ.-мат. наук, доцент

Рецензент О.И. Микрюкова, канд. физ.-мат. наук, доцент

В наше время нет необходимости убеждать кого бы то ни было (а тем более будущих экономистов) в том, что математика – это очень важная наука. Не владеющий хотя бы основами математики человек не сможет стать квалифицированным специалистом, какую бы специальность он ни осваивал. Более того, у него будут проблемы даже в повседневном быту.

Широко применяется математика и в экономике. И особенно в современной, рыночной экономике. Действительно, в ее условиях каждой хозяйственной единице надо самостоятельно принимать решение, делать выбор. И если предприятие хочет преуспеть, то выбор этот должен быть хорошо обоснован и просчитан. Поэтому роль математических методов в современной экономике велика и постоянно возрастает.

В этом методическом пособии мы познакомимся с некоторыми наиболее простыми случаями применения математики в экономике.

Линейная модель издержек. Точка безубыточности

При производстве x единиц любой продукции *совокупные издержки* (затраты) $C(x)$ состоят из двух слагаемых – постоянных (фиксированных) и переменных издержек: $C(x)=F+V$.

Постоянные издержки F – это издержки, не зависящие от числа единиц произведенной продукции. Они включают в себя амортизацию, аренду помещения, проценты по займам и т.п.

Переменные издержки V – это издержки, напрямую зависящие от количества произведенной продукции. Они включают в себя стоимость сырья, рабочей силы и т.п.

В простейшем случае переменные издержки прямо пропорциональны x - количеству произведенной продукции. Коэффициент пропорциональности a – это переменные затраты по производству одной единицы продукции. Если обозначить b - фиксированные затраты, то получится уравнение, которое называется *линейной моделью издержек*: $C(x)=b+ax$.

Совокупный доход, или *выручка*, $R(x)$, получаемый предприятием от продажи x единиц продукции, определяется формулой $R(x)=px$, где p - цена единицы товара, $x \geq 0$, $R(0)=0$. Прибыль будет определяться формулой $P(x)=R(x)-C(x)$.

Пример 1. Фиксированные издержки составляют 10 тыс.руб. в месяц, переменные издержки – 30 руб., выручка – 50 руб. за единицу продукции. Составить функцию прибыли и построить ее график.

Решение. $C(x)=F+V$. $F=10000$, $V=30x \Rightarrow C(x)=10000+30x$, $R(x)=50x$. (см. рис.1). Таким образом, прибыль $P(x)=R(x)-C(x)= 50x-30x-10000=20x-10000$. Анализируя полученную функцию, можно сказать, что при малых значениях x прибыль отрицательна, т.е. производство убыточно. При увеличении x при-

быль возрастает, в точке $x=500$ она обращается в нуль (точка безубыточности) и после этого становится положительной.

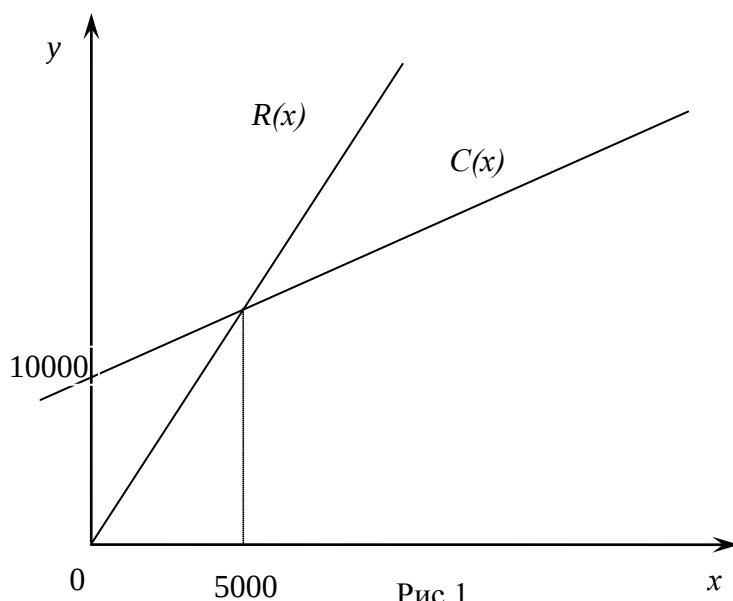


Рис.1

Законы спроса и предложения

Количество товара, которое покупатели приобретут на рынке, зависит от цены на этот товар. Соотношение между ценой и количеством купленного товара называется функцией или *законом спроса* $p=p(x)$. (D)

Количество товара, которое производители выставят на продажу, также зависит от цены на этот товар. Соотношение между ценой и количеством товара, выставленного на продажу, называется *функцией или законом предложения* $x=x(p)$ (S), где x - количество товара, p - цена на этот товар. В простейшем случае эти функции линейны.

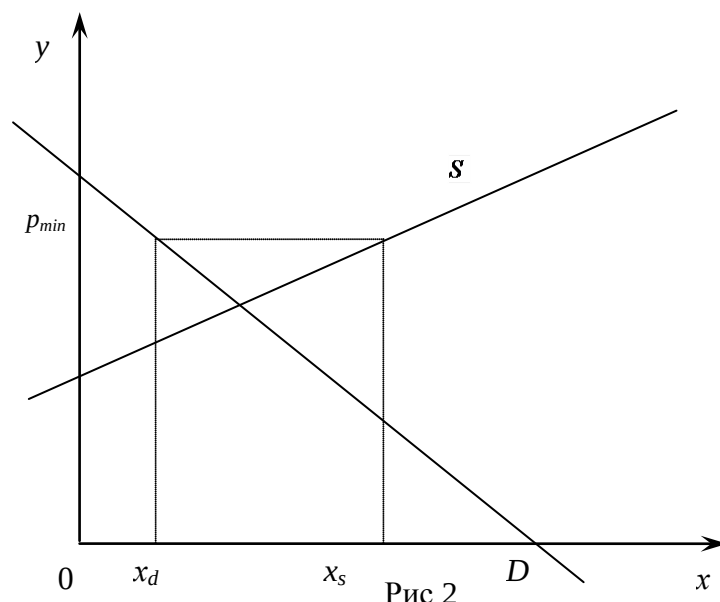
Уравнение спроса можно составить, если заданы две точки, лежащие на его графике. Для этого нужно использовать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Точка пересечения кривых спроса и предложения (x_0, p_0) называется *точкой рыночного равновесия*. Соответственно, p_0 называется *равновесной ценой*, а x_0 - *равновесным количеством* (объемом продаж).

Если известен закон спроса $p(x)$, то совокупный доход $R = xp$ можно выразить через x .

В этих моделях можно легко учесть введение правительством налога t на товар или предоставление субсидии s , чтобы население могло приобрести этот товар по разумной цене.

При использовании линейных моделей предполагается, что спрос определяется только ценой товара на рынке p_c , а предложение – только ценой p_s ,

получаемой поставщиками. Эти цены связаны между собой следующими уравнениями: $p_c = p_s + t$, $p_c = p_s - s$, где t и s – соответственно налог и субсидия на единицу товара. Вместо субсидии иногда вводится минимальная цена. В этом случае правительство скупает излишек продукции, равный $x_s - x_d$ (см. рис.2).



Некоторые налоги, например НДС (налог на добавленную стоимость), пропорциональны цене. В этом случае точка пересечения графика предложения (см. рис.2) с осью OX остается той же, а угол наклона графика к оси OX меняется.

Пример 2. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями

$$\text{спрос } D: p_c = -2x + 12,$$

$$\text{предложение } S: p_s = x + 3.$$

- а) Найти точку рыночного равновесия.
- б) Найти точку равновесия после введения налога, равного 3. Найти увеличение и уменьшение равновесного объема продаж.
- в) Какая субсидия приведет к увеличению объема продаж на 2 единицы?
- г) Вводится пропорциональный налог, равный 20%. Найти новую точку равновесия и доход правительства.
- д) Правительство установило минимальную цену, равную 7. Сколько денег будет израсходовано на скупку излишков ?

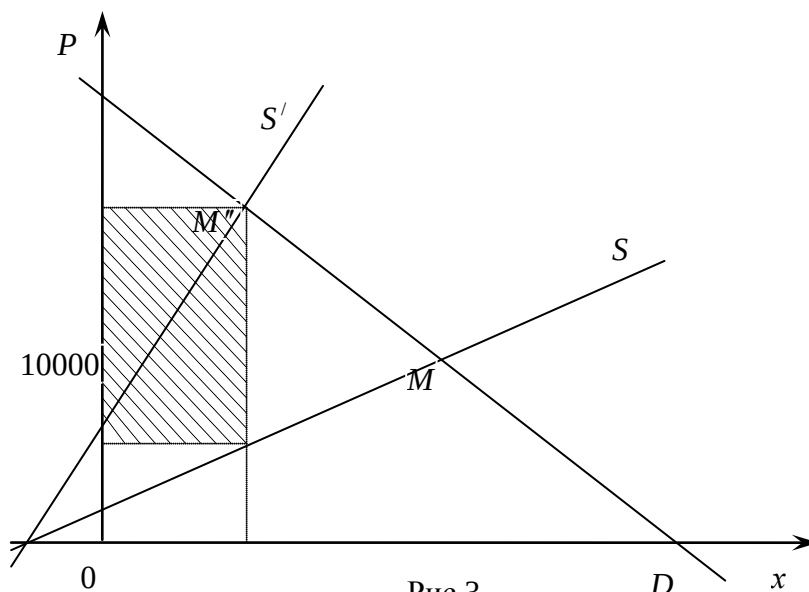


Рис.3

Решение. а) Находим точку равновесия M $x+3=-2x+12 \Rightarrow x=3, p=6$. Точка $M(3,6)$ является точкой равновесия.

б) Если введен налог $t=3$, то система уравнений для определения новой точки равновесия примет вид: спрос $D: p_c = -2x+12$,

$$\text{предложение } S: p_s = x+3,$$

$$p_c = p_s + 3.$$

Откуда имеем следующую систему для определения точки рыночного равновесия: $\begin{cases} p_c = -2x+12, \\ p_c = x+6. \end{cases} \Rightarrow x=2, p=8$. Мы получили новую точку равновесия $M'(2,8)$. Таким образом, после введения налога равновесная цена увеличилась на 2 единицы, а равновесный объем уменьшился на 1 единицу.

в) Если предоставлена субсидия, то система уравнений для определения точки равновесия имеет вид: спрос $D: p_c = -2x+12$,

$$\text{предложение } S: p_s = x+3,$$

$$p_c = p_s - s.$$

Поскольку по условию задачи объем продаж должен увеличиться на 2 единицы, т.е. $x=5$, мы получаем $p_c=2, p_s=5, s=p_s-p_c=3$.

г) Если налог составляют 20%, то вся рыночная цена составляет 120%, из них 100% получают поставщики товара, 20% - государство. Итак, поставщики получают $p_s = \frac{100}{120} p_c = \frac{5}{6} p_c$. Уравнения спроса и предложения преобразуются

следующим образом: $\begin{cases} p_c = -2x + 12, \\ \frac{5}{6} p_c = x + 3. \end{cases} \Rightarrow x = 2\frac{5}{8}, p_c = 6\frac{3}{4}$. Получили новую точку равновесия $M''\left(2\frac{5}{8}, 6\frac{3}{4}\right)$.

Доход правительства R равен площади заштрихованного прямоугольника (см. рис.3) : $R = \frac{1}{6} \cdot 2\frac{5}{8} \cdot 6\frac{3}{4} = 2\frac{61}{64}$.

д) Если установлена минимальная цена, то из уравнений спроса и предложения можно найти объемы спроса и предложения. Разницу между ними скупает правительство. Так как $p=7$, то $x_s = p - 3 = 4$, $x_d = \frac{12-p}{2} = 2,5$. Затраты правительства составят $(x_s - x_d) \cdot p = 10,5$.

Ответ: а) $M(3,6)$; б) $M'(2,8)$. Равновесная цена увеличилась на 2 единицы, а равновесный объем уменьшился на 1 единицу; в) $s=3$; г) $M''\left(2\frac{5}{8}, 6\frac{3}{4}\right)$; $R = 2\frac{61}{64}$; д) 10,5.

Применение дифференциального исчисления

Рассмотрим применение основ математического анализа. Начнем с понятия производной функции. Математический анализ предлагает следующее определение: *производной функцией $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента x , когда последнее произвольным образом стремится к нулю.*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Однако, производной функции можно придать и наглядный *экономический смысл*, причем разносторонний.

А) Непосредственное применение понятия производной функции.

1. Пусть, например, $y = f(t)$ – количество произведенной продукции за время t . Тогда за время Δt , прошедшее с момента t до момента $t + \Delta t$, будет произведено $\Delta y = f(t + \Delta t) - f(t)$ единиц продукции. При этом отношение $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ – это, очевидно, *средняя производительность труда* на промежутке времени $[t; t + \Delta t]$ длительностью Δt . Она выражает среднее количество продукции, произведенной за единицу времени этого промежутка. А тогда предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y' = f'(t) \quad (1)$$

– это так называемая *предельная (истинная) производительность труда в момент времени t* .

2. Пусть x – количество выпускаемой продукции (в некоторых единицах), а y – соответствующие издержки на ее производство (в рублях). То есть y – себестоимость продукции x . Тогда $y = f(x)$ – зависимость себестоимости продукции y от ее объема x .

Если объем продукции вырастет с x до $x + \Delta x$, то есть вырастет на Δx единиц, то ее себестоимость вырастет на $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ рублей. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – средняя себестоимость продукции, приходящаяся на единицу ее производства. А

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x) \quad (2)$$

– так называемая *предельная себестоимость* продукции, определяющая затраты на производство единицы дополнительной продукции, если достигнутый объем производства составляет x единиц.

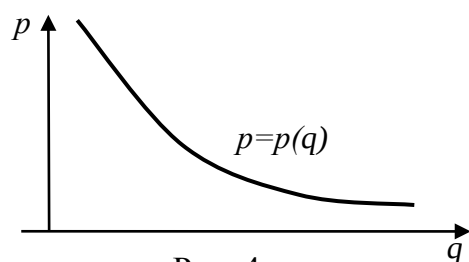


Рис. 4

3. Пусть $p = p(q)$ – так называемая *кривая спроса*, определяющая связь между ценой p единицы товара и спросом q на этот товар (q – количество товара, который может быть продан при цене p за его

единицу) – рис. 4. Кривая спроса, естественно, является убывающей кривой. Ее форма зависит от потребительских свойств товара, от финансового состояния покупателей и от других факторов. При этом

$$R = pq = q \cdot p(q) \quad (3)$$

– суммарный доход от продаж. А

$$\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta q} = R' = [q \cdot p(q)]' \quad (4)$$

– так называемый *предельный доход*. Он определяет доход, полученный от единицы проданной продукции, если эта единица продана дополнительно к объему продаж q .

Эти и другие *предельные величины* широко используются в так называемом *предельном экономическом анализе*. В экономической литературе предельные величины называют также *маржинальными*. При их записи к обычному обозначению величин добавляется буква M . Например, MR – предельный доход R . И так как $R = q \cdot p(q)$, то

$$MR = R' = [q \cdot p(q)]' . \quad (5)$$

Таким образом, если $y = f(x)$ – некоторая функция, имеющая экономический смысл, то $My = y' = f'(x)$ – предельное (маржинальное) значение y в точке x . Оно характеризует скорость изменения величины y при изменении величины x . В частности, оно может быть предельной производительностью труда, предельной себестоимостью продукции, предельным доходом от продаж и т.д.

Пример 3. Опытным путем установлено, что объем q продукции, производимой на некотором предприятии одним среднестатистическим рабочим в течение рабочей смены (8 часов), определяется формулой:

$$q = -0,05t^3 + 0,45t^2 + 5t \quad (0 \leq t \leq 8).$$

Здесь t – время в часах. Требуется установить зависимость $y = y(t)$ производительности труда рабочего от времени и построить график этой зависимости.

Решение.

$$y = q' = -0,15t^2 + 0,9t + 5 \quad (0 \leq t \leq 8)$$

Графиком этой зависимости y от t является парабола с ветвями, направленными вниз (рис.5). Приведенный график показывает, что производительность труда в первые три часа работы возрастает (с 5 до 6,35 единиц продукции в час), а потом монотонно падает, и к концу рабочего дня составляет лишь 2,6 единиц продукции в час.

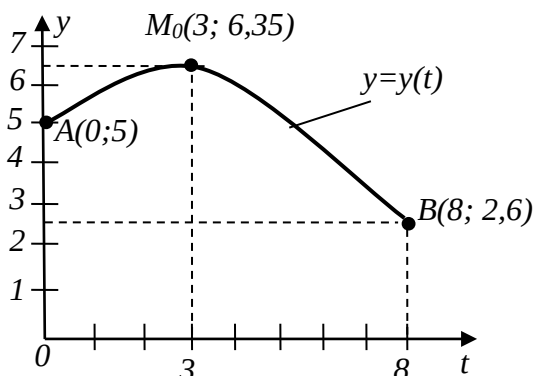


Рис. 5

Б) Через производную функции выражается еще одно важное экономическое понятие – *эластичность функции*.

Определение. Эластичностью $E_x(y)$ функции $y = f(x)$ относительно аргумента x называется предел отношения относительного приращения функции (в %) к относительному приращению аргумента (в %) при приращении аргумента, стремящегося к нулю. То есть

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%}{\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y' . \quad (6)$$

Эластичность функции y относительно ее аргумента x показывает, на сколько процентов изменится функция при изменении ее аргумента на 1 %.

а) Если $|E_x(y)| > 1$, то есть если $E_x(y) > 1$ или $E_x(y) < -1$, то функция $y = f(x)$ считается *эластичной в точке x* .

б) Если $|E_x(y)| < 1$, то есть если $-1 < E_x(y) < 1$, то функция $y = f(x)$ считается *неэластичной в точке x*.

в) Если $|E_x(y)| = 1$, то есть если $E_x(y) = 1$ или $E_x(y) = -1$, то говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x *единичную эластичность*.

Функция, эластичная (неэластичная) в каждой точке x некоторого интервала $(a; b)$ оси ox , называется эластичной (неэластичной) на этом интервале.

Эластичная функция изменяется (растет или убывает) относительно быстрее изменения ее аргумента. Неэластичная функция, наоборот, меняется относительно медленнее изменения ее аргумента. Функция единичной эластичности изменяется с той же относительной скоростью, что и ее аргумент.

Направление изменения функции зависит от знака ее эластичности. В частности, если x и y – положительные, что обычно и бывает в экономических задачах, то знак $E_x(y)$, согласно (6), определяется знаком производной y' функции $y = f(x)$. И если $E_x(y) > 0$, то $y' = f'(x) > 0$. А это значит, что функция $y = f(x)$ растет с ростом x . А если $E_x(y) < 0$, то $y' = f'(x) < 0$, и функция $y = f(x)$ убывает с ростом x .

Свойства эластичности функции.

1. Эластичность функции $y = f(x)$ равна произведению независимой переменной x на так называемый *темп изменения функции* $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$:

$$E_x(y) = x \cdot (\ln y)' = x \cdot T_y . \quad (7)$$

2. Эластичность произведения двух функций равна сумме эластичностей этих функций:

$$E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v) . \quad (8)$$

3. Эластичность частного двух функций равна разности эластичностей этих функций:

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v) . \quad (9)$$

Отметим, что последние два свойства – прямое следствие формулы (7) и свойств логарифма:

$$\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v ; \quad \ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v .$$

4. Эластичность взаимно обратных функций – взаимно обратные величины:

$$E_y(x) = \frac{1}{E_x(y)} . \quad (10)$$

Действительно,

$$E_y(x) = \frac{y}{x} \cdot x' = \frac{y}{x} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}} = \frac{1}{E_x(y)}.$$

Эластичность экономических функций применяется при анализе этих функций. Выясним, например, как влияет эластичность или неэластичность спроса q относительно цены p единицы продукции на суммарный доход от продаж $R = pq$ при условии, что зависимость спроса q на товар от его цены p имеет некоторое уравнение $q = q(p)$. Это уравнение так называемой кривой спроса, которая, очевидно, является убывающей кривой (с увеличением цены p единицы товара спрос q на этот товар, естественно, уменьшается) – см. рис.4.

Подсчитаем предельный (маржинальный) доход от продаж:

$$R' = R'_p = [p \cdot q(p)]' = 1 \cdot q(p) + p \cdot q'(p) = q(p) \left[1 + \frac{p}{q(p)} \cdot q'(p) \right] = q(p) [1 + E_p(q)] \quad (11)$$

где

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{p}{q(p)} \cdot q'(p) \quad (12)$$

– эластичность спроса q относительно цены p . Так как и p , и q неотрицательны, а $q'(p)$, как производная убывающей функции, отрицательна, то $E_p(q) < 0$.

Если спрос эластичен, то есть если $|E_p(q)| > 1$ (а значит, $E_p(q) < -1$), то, согласно (11), $R'_p < 0$. А это значит, что зависимость дохода R от цены p является убывающей. То есть с увеличением цены p единицы продукции суммарный доход R от продаж будет уменьшаться. А с уменьшением цены – наоборот увеличиваться. Но уменьшение цены p автоматически ведет к увеличению спроса q . Таким образом, при эластичном спросе с увеличением спроса q увеличивается и доход R . То есть *при эластичном спросе каждая дополнительно проданная единица продукции приносит дополнительный доход*.

Если спрос неэластичен, то есть если $|E_p(q)| < 1$ (а значит, $-1 < E_p(q) < 0$), то, согласно (11), $R'_p > 0$. То есть зависимость R от p будет возрастающей. Иначе говоря, с увеличением цены p единицы продукции суммарный доход от продаж R будет увеличиваться. А с уменьшением цены – уменьшаться. Но уменьшение цены автоматически ведет к увеличению спроса, то есть к увеличению объема продаж. И при этом, тем не менее, доход R будет уменьшаться! То есть *при неэластичном спросе каждая дополнительно произведенная и проданная единица продукции будет приносить не доход, а убыток*.

Наконец, если $|E_p(q)| = 1$ ($E_p(q) = -1$), то есть если спрос имеет единичную эластичность, то $R'_p = 0$. А это значит, что с изменением цены p (а значит, и с изменением объема продаж q) суммарный доход от продаж R не изменится.

Если изобразить зависимости $q = q(p)$, $R = R(p)$ и $R = R(q)$ графически, то результаты проведенного исследования предстанут в виде:

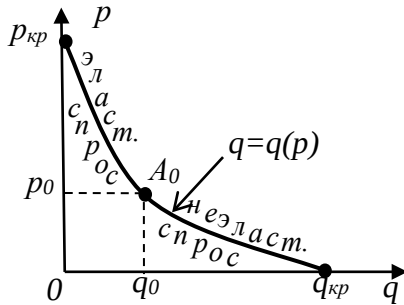


Рис. 6(а)

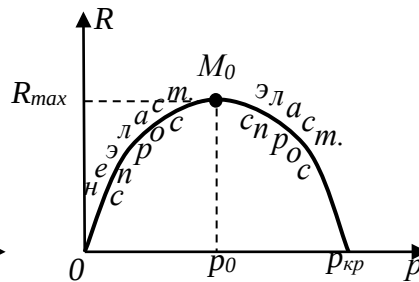


Рис. 6(б)

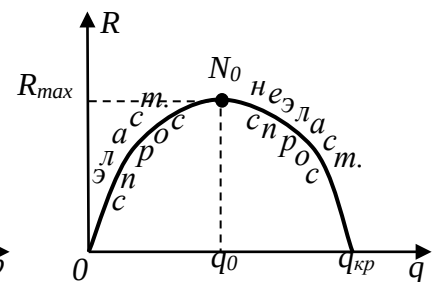


Рис. 6(в)

Здесь p_0 и q_0 — оптимальная цена и оптимальный спрос (объем продаж), обеспечивающие максимум дохода R . Им соответствует единичная эластичность спроса. То есть оптимальная цена p_0 единицы товара может быть найдена из уравнения:

$$E_p(q) = -1 \Leftrightarrow \frac{p}{q(p)} \cdot q'(p) = -1 \Rightarrow p = p_0. \quad (13)$$

А оптимальный спрос q_0 может быть найден из уравнения кривой спроса: $q_0 = q(p_0)$.

Впрочем, если известны явные выражения $R = R(p)$ и $R = R(q)$, то значения p_0 и q_0 проще найти из равенств:

$$R'_p = 0 \Rightarrow p = p_0; \quad R'_q = 0 \Rightarrow q = q_0. \quad (14)$$

Согласно рис. 6(б), дохода не будет вообще ($R = 0$), когда товар ничего не стоит ($p = 0$), или когда цена p достигнет критического значения $p_{кр}$, при котором товар перестанут покупать вообще (этой цене соответствует спрос $q = 0$ — см. рис. 6(а)). А согласно рис. 6(в) доход от продаж товара будет нулевым, если объем продаж q будет нулевым (этому соответствует критическая цена товара $p_{кр}$), или если объем продаж q достигнет некоторого значения $q_{кр}$, которому, очевидно, соответствует нулевая цена $p = 0$ единицы товара. То есть $q_{кр}$ — это тот максимальный объем товара, который покупатели возьмут, если он отдается даром. Имея явные зависимости $R = R(p)$ и $R = R(q)$, можно найти и $p_{кр}$, и $q_{кр}$. Впрочем, естественнее они находятся из уравнения $q = q(p)$ кривой спроса.

Пример 4. Пусть уравнение кривой спроса $q = q(p)$ – линейная убывающая функция $q = a - bp$, где $a > 0$ и $b > 0$. При этом и функция $p = p(q) = \frac{a}{b} - \frac{q}{b}$ – линейная и убывающая. Суммарный доход от продаж $R = pq$ можно выразить двояко:

$$\text{а) } R = R(p) = ap - bp^2; \text{ б) } R = R(q) = \frac{aq}{b} - \frac{q^2}{b}. \quad (15)$$

Графики обеих этих функций – параболы, направленные ветвями вниз, то есть они представляют собой кривые типа тех, что изображены на рисунках 6(б) и 6(в).

Оптимальную цену p_0 и оптимальный спрос q_0 легко найти согласно (14):

$$\text{а) } R'_p = 0 \Rightarrow a - 2bp = 0 \Rightarrow p = p_0 = \frac{a}{2b}; \quad (16)$$

$$\text{б) } R'_q = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{2q}{b} = 0 \Rightarrow q = q_0 = \frac{a}{2}.$$

При этом

$$R_{\max} = p_0 q_0 = \frac{a^2}{4b}. \quad (17)$$

Критические значения $p_{кр}$ и $q_{кр}$ цены и спроса найдем, приравняв доход R к нулю:

$$\text{а) } R = 0 \Leftrightarrow ap - bp^2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0 \text{ и } p_2 = p_{кр} = \frac{a}{b}; \quad (18)$$

$$\text{б) } R = 0 \Leftrightarrow \frac{aq}{b} - \frac{q^2}{b} = 0 \Rightarrow q_1 = 0 \text{ и } q_2 = q_{кр} = a.$$

Эластичность $E_p(q)$ спроса q относительно цены p тоже можно выразить двояко – и через p , и через q :

$$\text{а) } E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{p}{a - bp} \cdot (a - bp)' = \frac{-bp}{a - bp}; \quad (19)$$

$$\text{б) } E_p(q) = \frac{-bp}{a - bp} = \left| \text{учтем, что } p = \frac{a}{b} - \frac{q}{b} \right| = \frac{q - a}{q}.$$

На основании формул (19) легко убедиться в том, что при оптимальной цене $p_0 = \frac{a}{2b}$ (или, что одно и то же, при оптимальном спросе $q_0 = \frac{a}{2}$) эластичность спроса $E_p(q) = -1$, то есть спрос имеет единичную эластичность. При $0 < q < q_0$ ($p_0 < p < p_{кр}$) эластичность $E_p(q) < -1$, то есть спрос будет эластичным. При $q_0 < q < q_{кр}$ ($0 < p < p_0$) имеем $-1 < E_p(q) < 0$, то есть спрос будет неэластичным.

Все установленное выше можно наглядно проиллюстрировать и на кривой спроса $q = a - bp$ (рис. 7).

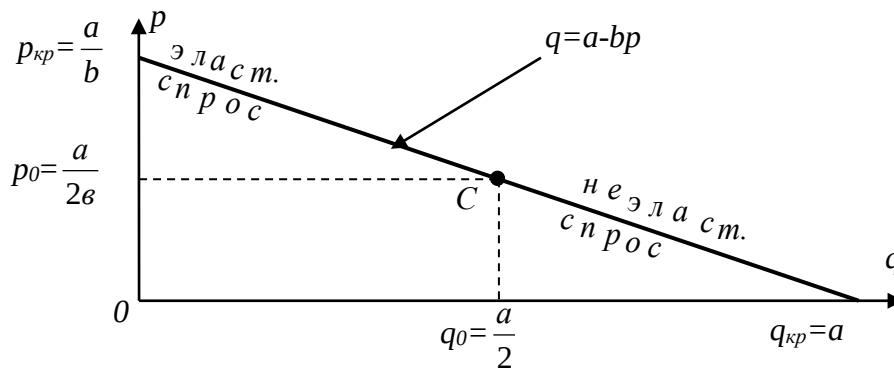


Рис. 7

Пример 5. Найти максимум прибыли Π от продаж данного товара в условиях примера 4.

Решение. Сначала решим задачу в общем виде, как и в примере 4. Отметим, что значение q_0 объема продаж, обеспечивающее максимум дохода от продаж R , еще не обеспечивает максимума прибыли Π от продаж данного товара. Действительно, $\Pi = R - C$, где C — издержки производства (себестоимость товара):

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) . \quad (20)$$

Прибыль $\Pi(q)$ будет максимальной при том q , при котором $\Pi'(q) = 0$:

$$\Pi'(q) = 0 \Leftrightarrow R'(q) = C'(q) . \quad (21)$$

Таким образом, прибыль от производства будет максимальной при том объеме продаж q , при котором предельный доход $R'(q)$ равен предельным издержкам $C'(q)$. А это — известный экономический закон.

Наконец, рассмотрим прибыль Π предприятия, если кроме издержек производства с каждой единицы произведенной продукции берется налог t . Тогда при объеме q произведенной продукции суммарный налог T составит $T = tq$ рублей, а общая прибыль предприятия Π выразится формулой:

$$\Pi = \Pi(q; t) = R(q) - C(q) - tq . \quad (22)$$

Максимум прибыли при заданном налоге t предприятие будет иметь при том объеме продаж q , который соответствует уравнению:

$$\Pi'_q = 0 \Rightarrow R'(q) - C'(q) - t = 0 \Rightarrow q = q(t) . \quad (23)$$

При этом суммарный налог T с проданной продукции составит

$$T = tq = t \cdot q(t) . \quad (24)$$

Можно поставить вопрос: при каком t , то есть при какой ставке налога, суммарный налог T будет максимальным? (в этом заинтересованы налоговые органы). Это будет то значение t , при котором $T' = 0$:

$$T' = [t \cdot q(t)]' = 0 \Rightarrow t = t_0 .$$

Подставляя найденное значение $t = t_0$ в выражение (23) для $q = q(t)$, получим: $q_0 = q(t_0)$. Это тот объем производства, при котором при максимуме суммарной прибыли Π предприятия будет максимальным и суммарный налог T на продукцию этого предприятия.

Теперь рассмотрим вышеизложенное на конкретных функциях.

Пусть $R(q) = 16q - q^2$; $C(q) = q^2 + 1$. Тогда

$$\Pi = \Pi(q; t) = 16q - 2q^2 - 1 - qt ;$$

$$\Pi'_q = 0 \Leftrightarrow 16 - 4q - t = 0 \Leftrightarrow q = q(t) = \frac{16-t}{4} = 4 - \frac{1}{4}t ;$$

$$T = qt = 4t - \frac{1}{4}t^2 ; \quad T' = 0 \Rightarrow 4 - \frac{1}{2}t = 0 \Rightarrow t = t_0 = 8 ;$$

$$q_0 = q(t_0) = 4 - \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 .$$

Таким образом, максимальная прибыль $\Pi_{\max}$ составит:

$$\Pi_{\max} = 16 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 1 - 8 \cdot 2 = 7 .$$

А максимальный налог T составит:

$$T_{\max} = t_0 \cdot q_0 = 8 \cdot 2 = 16 .$$

Интересно сопоставить эти цифры с цифрами при отсутствии налогообложения, то есть при $t = 0$. В этом случае (убедитесь в этом самостоятельно) $q_0 = 4$; $\Pi_{\max} = 31$. Следовательно, уменьшение налогообложения стимулирует выпуск дополнительной продукции и приводит при этом к резкому увеличению прибыли от ее реализации. Отсюда ясно, почему производители прикладывают столько усилий, чтобы снизить ставку налога t .

В) В экономической теории находят применение не только производные первого порядка, но и производные второго порядка.

Один из знаменитых экономических законов – *закон убывающей доходности* – звучит так: с увеличением производства дополнительная продукция, полученная на каждую новую единицу производственного ресурса (например, численности рабочих, капитальных затрат на производство и т.д.) с некоторого значения этого ресурса убывает.

Сформулируем этот закон на языке математики. Пусть $y = f(x)$ – зависимость объема y выпускаемой продукции от используемого на ее производство ресурса x . И пусть Δy – дополнительная продукция, полученная при использовании дополнительного к x ресурса Δx . Тогда:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (25)$$

– продукция, полученная на единицу дополнительного (к x) ресурса. Согласно закону убывающей доходности, эта продукция с некоторого $x = x_0$ убывает. А это значит, что с некоторого $x = x_0$ производная функции (25) отрицательна:

$$(y')' = y'' = f''(x) < 0 \quad (\text{при } x > x_0). \quad (26)$$

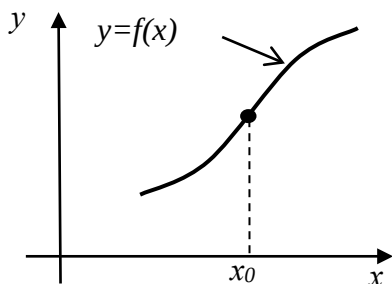


Рис. 8

Вспоминая геометрический смысл второй производной, приходим к выводу, что при $x > x_0$ график функции $y = f(x)$ является выпуклым (а до того, при $x < x_0$, он был вогнутым) – рис. 8. Данное обстоятельство является отправной точкой для дальнейшего исследования указанной зависимости y от x . В частности, для подбора аналитического вида $y = f(x)$ этой зависимости.

Применение интегрального исчисления

А) *Интегрирование* используется для нахождения функций издержек, прибыли, потребления, если известны соответственно функции предельных издержек, предельной прибыли и т.д. Для определения произвольной постоянной интегрирования необходимо дополнительное условие. Так, например, если находится функция издержек, используется то, что ее значение в точке $x=0$, (x – число единиц произвольной продукции) равно значению фиксированных издержек, а при определении функции дохода – то, что её значение в точке $x=0$ равно нулю (очевидно, что доход равен нулю, если не продано ни одного изделия).

Пример 6. Задана функция предельного дохода $R'(x) = 20 - 0.04x$. Найти функцию дохода и закон спроса на продукцию.

Решение. $R(x) = \int (20 - 0.04x) dx = 20x - 0.04 \frac{x^2}{2} + C = 20x - 0.02x^2 + C$. Так как $R(0) = 0$, следовательно, $C = 0$. $\Rightarrow R(x) = 20x - 0.02x^2$ – функция дохода.

Если каждая единица продукции продается по цене p , то доход определяется формулой $R = xp$. Следовательно, деля на x функцию дохода, находим закон спроса $p(x)$: $p = 20 - 0.02x$.

Зная функции изменения производительности труда, издержек, прибыли, потребления и т.д., можно с помощью определенного интеграла определить соответствующие объемы произведенной продукции, полученной прибыли, потребленной продукции и т.д.

Пример 7. Пусть функция $z = f(t)$ описывает изменение производительности труда рабочего, бригады или целого предприятия с течением времени t .

Требуется найти формулу для объема R произведенной продукции с момента времени t_1 до момента времени t_2 , где t_1 и t_2 - заданные числа.

Решение. Если бы производительность труда $z = f(t)$ (количество продукции, производимой в единицу времени) была постоянной, то искомый объем R произведенной продукции мы нашли бы, умножив производительность труда на время работы, то есть нашли бы по формуле $R = z \cdot (t_2 - t_1)$. Но, по условию, производительность труда $z = f(t)$ меняется со временем. Чтобы в этом случае найти искомый объем R произведенной продукции, нужно, очевидно, разбить промежуток времени $[t_1; t_2]$ на бесконечно малые промежутки времени dt , выбрать внутри каждого dt произвольную точку t , найти объем $dR = z(t)dt$ произведенной за время dt продукции и сложить все dR - то есть по существу проделать ту же процедуру, что была проделана в предыдущих трех задачах. В итоге получим формулу

$$R = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt . \quad (27)$$

Эта формула выражает объем продукции, произведенной за время от t_1 до t_2 , через производительность труда $z = f(t)$.

Б) *Определение* коэффициента неравномерности распределения дохода. Этот коэффициент определяется с помощью кривой Лоренца. *Кривая Лоренца* – это график функции $y=f(x)$, где y – доля совокупного дохода, получаемого частью x наиболее низко оплачиваемого населения. Отклонение реального распределения доходов от идеального измеряется отношением L площади между прямой $y=x$ и кривой Лоренца к площади, ограниченной прямыми $y=x$, $x=1$ и осью x , и называется *коэффициентом неравномерности распределения дохода*.

Очевидно, что $0 \leq L \leq 1$. Значение $L=0$ соответствует совершенному распределению доходов.

В) *Кривая обучения* используется для оценки времени, необходимого для производства некоторого дополнительного количества продукции. Пусть $T=F(x)$ – время, измеряемое в человеко-часах, необходимое для производства первых x – единиц продукции. Тогда $f(x) = F'(x)$ приближенно равно времени, необходимому для производства $(x+1)$ -й единицы продукции. Обычно используют функции вида $f(x) = ax^b$, $a > 0$, $-1 \leq b < 0$. Время ΔT , необходимое для производства единиц продукции с номерами от (n_1+1) до n_2 , определяется

формулой:
$$\Delta T = \int_{n_1}^{n_2} f(x)dx .$$

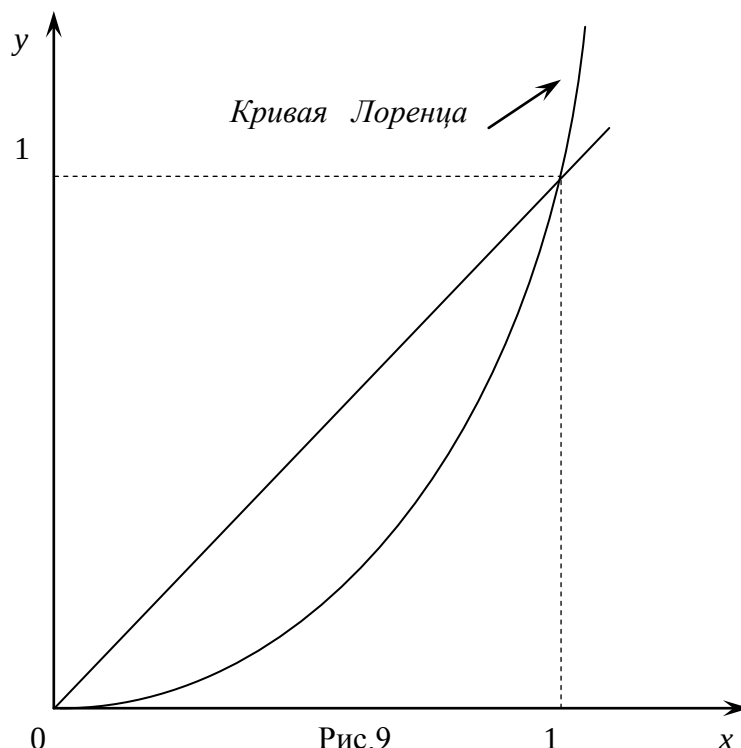


Рис.9

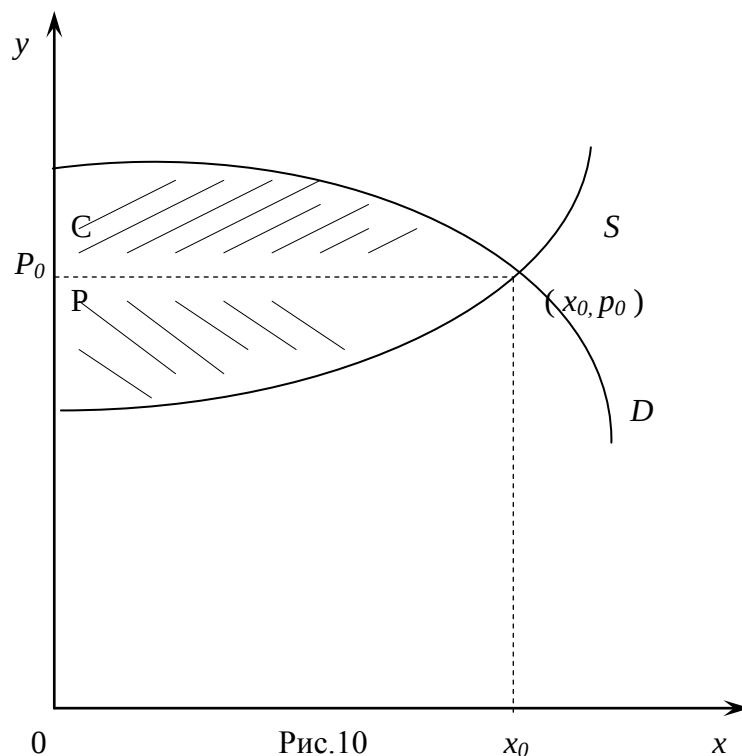
Пример 8. После сборки 100 часов оказалось, что в дальнейшем время убывает в соответствии с формулой $y = 15x^{-0.14}$. Найти время, которое потребуется для сборки ещё 20 часов (т.е. с номера 101 до номера 120).

Решение.
$$\Delta T = \int_{100}^{120} 15x^{-0.14} dx = \frac{15x^{0.86}}{0.86} \Big|_{100}^{120} = \frac{1500}{86} (120^{0.86} - 100^{0.86}) = 8.91.$$

Г) *Выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков.* Пусть $p = f(x)$ - кривая спроса D на некоторый товар и $p = g(x)$ - кривая предложения S ; (x_0, p_0) – точка рыночного равновесия. При этом выигрыш потребителей можно

вычислить по формуле $C(x) = \int_0^{x_0} f(x) dx - p_0 x_0$ - как площадь фигуры, заключенной между кривой спроса D и прямой $p = p_0$.

Аналогично выигрыш поставщиков находится по формуле $P(x) = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x) dx$ - как площадь фигуры, заключенной между прямой $p = p_0$ и кривой предложения S . (см. рис.10).



Пример 9. Известны законы спроса и предложения:

спрос: $p = 116 - x^2$,

предложение: $p = \frac{5}{3}x + 20$.

Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков, если было установлено рыночное равновесие.

Решение. Найдем точку рыночного равновесия:

$$116 - x^2 = \frac{5}{3}x + 20 ;$$

$$3x^2 + 5x - 288 = 0 \Rightarrow x_1 = 9; x_2 = -\frac{32}{3}.$$

Значит точка рыночного равновесия имеет координаты: $x_0 = 9; p_0 = 35 \Rightarrow p_0 x_0 = 315$. Найдем выигрыш потребителей

$$C = \int_0^9 (116 - x^2) dx - 315 = \left(116x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^9 - 315 = 486.$$

Найдем выигрыш поставщиков

$$P = 315 - \int_0^9 \left(\frac{5}{3}x + 20 \right) dx = 315 - \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + 20x \right) \Big|_0^9 = 315 - \frac{5}{6} \cdot 81 - 180 = 67,5.$$

Ответ: $C=486, P=67,5$.

Упражнения

1. Опытным путем установлено, что объем q продукции, производимой на предприятии в течение рабочей смены, определяется формулой:

$$q = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 20t \text{ (ед.)}$$

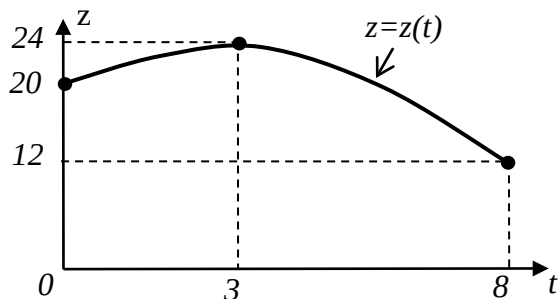


Рис. 11

Здесь $0 \leq t \leq 8$ – рабочее время в часах. Исследовать зависимость $z = z(t)$ производительности труда на этом предприятии от времени и построить график этой зависимости.

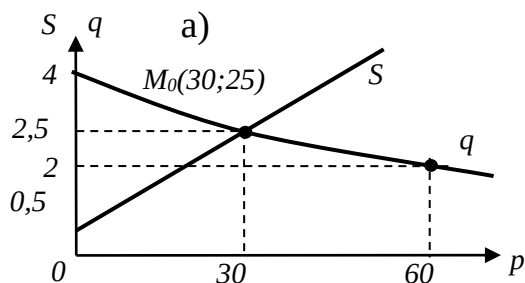
Ответ:

$$z = z(t) = q' = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 20 \text{ (ед./час)}$$

2. Опытным путем установлены уравнения кривых спроса и предложения:

$$q = \frac{p+120}{p+30}; \quad s = \frac{1}{15}p + 0,5.$$

Здесь q и s – это соответственно количества продаваемого и предлагаемого к продаже товара при цене единицы товара p .



а) Построить кривые спроса и предложения.

б) Найти равновесную цену p_0 единицы товара, при которой спрос равен предложению.

в) Найти эластичность спроса и эластичность предложения относительно цены p при этой равновесной цене и

прокомментировать их экономический смысл.

Ответ:

б) $p_0 = 30$; при этом $q = s = 2,5$ (ед.)

$$\text{в) } E_p(q) = \frac{-90p}{(p+120)(p+30)}; \quad E_p(s) = \frac{2p}{2p+15}.$$

При равновесной цене $p_0 = 30$ получаем:

$$E_{p_0}(q) = -0,3; \quad E_{p_0}(s) = 0,8.$$

Это значит, что при увеличении цены p единицы товара на 1% от равновесной цены $p_0 = 30$ (с 30 до 30,3) спрос на товар q уменьшится на 0,3%, а предложение от производителей товара s увеличится на 0,8%. То есть появится товарный излишек в объеме 1,1%.

Обратно, если цена p уменьшится на 1 %, то спрос q увеличится на 0,3 %, а предложение уменьшится на 0,8 %. То есть возникнет товарный дефицит в объеме 1,1 %.

3. Функция издержек производства шин имеет вид $C(x)=30x+2100$. Цена одной шины 60 руб. Найти точку безубыточности. Построить графики.

Ответ. 70.

4. Постоянные издержки при производстве ручных часов составляют 12 тыс.руб. в месяц, а переменные – 300 руб. за одни часы. Цена часов 500 руб. Написать функцию дохода и издержек. Построить графики. Найти точку безубыточности.

Ответ. 60.

5. Мебельная фабрика продает каждый стул по цене 3 тыс.руб. Функция издержек линейная. Издержки составляют 48 тыс. руб. за 10 стульев и 43,2 тыс. руб. за 6 стульев. Составить функцию дохода и издержек. Найти точку безубыточности.

Ответ. 20.

6. Постоянные издержки производства некоторой продукции составляют 125 тыс.руб. в месяц, а переменные – 700 руб. за единицу продукции. Продукция продается по цене 1200 руб. за единицу. Составить функцию прибыли. Определить:

- а) точку безубыточности;
- б) сколько единиц продукции нужно произвести, чтобы прибыль составила 105 тыс. руб. в месяц.

Ответ. а) 250; б) 460.

7. Настольные лампы продаются по цене 1200 руб. каждая. Постоянные издержки составляют 24 тыс.руб. в месяц, а переменные – 800 руб. за лампу.

- а) Найти точку безубыточности, построить график.
- б) Сколько ламп фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 15% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?

Ответ. а) 60; б) 69.

8. Обувная фабрика продает туфли по цене 350 руб. за пару. Издержки составляют 63 тыс. руб. за 100 пар туфель и 60,75 тыс. руб. за 85 пар.

- а) Найти точку безубыточности.

б) Сколько пар туфель фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 10% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?

Ответ. а) 240; б) 264.

9. Издержки производства x единиц продукции определяются функцией $C(x) = 0,1x^2 + 2x + 80$. Цена одной единицы равна 8. Найти точку безубыточности.

Ответ. (20;40).

10. Фабрика продает одну единицу продукции по цене 1,2 руб. Постоянные издержки составляют 300 руб. в день, а переменные – 0,9 руб. за штуку.

а) Найти точку безубыточности.

б) Фабрика может купить новый станок. При этом постоянные издержки возрастут до 360 руб. в день, а переменные снизятся до 0,8 руб. за штуку. Выгодно ли это ?

Ответ. а) 1000; б) 900, да.

11. Найти точку рыночного равновесия для следующих функций спроса и предложения:

а) $p = -\frac{2}{3}x + 6$; $p = \frac{2}{3}x + 2$;

б) $p = -x + 4$; $p = 0,5x + 1$. Построить графики.

Ответ. а) (3,4); б) (2,2).

12. Спрос на некоторый товар равен 10 единицам при цене 300 руб. за штуку и 20 единицам при цене 280 руб. Поставщик согласен продать 8 единиц товара при цене 84 руб. и 5 единиц при цене 60 руб. Найти точку рыночного равновесия.

Ответ. (30;260).

13. При цене 100 руб. покупают 30 единиц некоторого товара, а при цене 140 руб. – только 20 единиц. Поставщик продает 8 единиц товара при цене 150 руб. и 15 единиц при цене 255 руб. Найти точку рыночного равновесия и построить графики.

Ответ. (10;180).

14. Пусть предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями $p = x + 100$; $p = -2x + 250$.

а) Найти точку рыночного равновесия.

б) Был введен налог, равный 10 на единицу продукции. Найти новую точку рыночного равновесия и доход государства от введения этого налога.

в) Налог был удвоен. Найти доход государства. Может ли государство потерять деньги, увеличивая налог ?

г) Правительство предоставило субсидию, равную 5 на единицу продукции. Найти новую точку рыночного равновесия.

Ответ. а) (50;150); б) $\left(\frac{140}{3}; \frac{470}{3}\right)$; $\frac{1400}{3}$; в) $\frac{2600}{3}$; г) $\left(\frac{155}{3}; \frac{440}{3}\right)$.

15. Пусть предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями: $p = 0,5x + 5$; $p = -0,5x + 45$.

а) Найти точку рыночного равновесия.

б) Правительство ввело налог, равный 5. Найти новую точку рыночного равновесия.

в) Была предоставлена субсидия, равная 3 на единицу товара. Найти новую точку рыночного равновесия.

Ответ. а) (40;25); б) (35; 27,5); в) (43; 27,5).

16. Законы спроса и предложения имеют следующий вид:
 $p = -x + 100$; $p = 3x + 20$.

а) Какой налог на единицу продукции приведет к снижению равновесного объема продаж на 2 единицы ?

б) Какой налог на единицу продукции приведет к снижению равновесного объема продаж до 15 единиц ?

в) Правительство выделило сумму денег, равную 384, для предоставления субсидии.

Ответ. а) (20;80); 8; б) 20; в) 16.

17. Законы спроса и предложения имеют следующий вид:
 $p = -2x + 150$; $p = 4x + 30$.

а) Какая субсидия приведет к увеличению равновесного объема продаж на 2 единицы ?

б) Какая субсидия приведет к увеличению равновесного объема продаж до 25 единиц ?

в) Какой налог должно ввести правительство, если хочет получить доход, равный 216 ?

Ответ. а) (20;110); 12; б) 30; в) 12.

18. Пусть спрос и предложение на некоторый товар определяются уравнениями: $4p + x = 34$; $6p - x = 38$.

- а) Найти точку рыночного равновесия и построить графики.
- б) Правительство ввело налог, равный 20%. Найти новую точку равновесия, доход, полученный правительством, и показать его на графике.
- в) Установлена минимальная цена, равная 7,5. Сколько потратит правительство на покупку излишка продукции ?

Ответ. а) (5,2;7,2); б) (2;8); $\frac{8}{3}$; в) 22,5.

19. Законы спроса и предложения имеют следующий вид:
 $2p + 3x = 36$; $5p - 3x = 48$.

- а) Найти точку рыночного равновесия и построить графики.
- б) Правительство ввело налог, равный 25%. Найти новую точку равновесия, доход, полученный правительством, и показать его на графике.
- в) Введена минимальная цена, равная 13. Сколько потратит правительство на покупку излишка продукции ?
- г) Выделена сумма денег, равная 105, для установления минимальной цены. Найти эту цену.

Ответ. а) (4;12); б) $\left(\frac{8}{3};14\right)$; $\frac{112}{5}$; в) $\frac{91}{3}$; г) 15.

20. Монопольный поставщик некоторого товара поставляет такое количество товара, чтобы обеспечить постоянный доход, т.е. закон предложения имеет вид $xp = \text{const} = \frac{16}{3}$. Спрос на этот товар определяется уравнением $x + 3p = 10$.

Найти точки рыночного равновесия и исследовать их устойчивость.

Ответ. $\left(2;\frac{8}{3}\right)$ - устойчива; $\left(8;\frac{2}{3}\right)$ - неустойчива.

21. Законы спроса и предложения на некоторый товар имеют следующий вид: $x + 2p = 8$; $xp = \frac{7}{2}$. Найти точки рыночного равновесия и исследовать их устойчивость.

Ответ. (1;3,5) - устойчива; (7;0,5) - неустойчива;

22. Найти эластичность функции спроса:

- а) $p + 5x = 100$ в точке $p = 50$;
- б) $3p + 4x = 120$ в точках $p = 15$ и $p = 20$;

в) $p^2 + p + 4x = 40$ в точках $p=2$ и $p=4$.

Как увеличение повлияет на выручку? При каких значениях p спрос является эластичным?

Ответ. а) -1 ; б) $-\frac{3}{5}; -1$; в) $-\frac{5}{18}; -1,8$.

23. Найти эластичность функции спроса $xp=5$ в точке $p=10$. Как увеличение цены повлияет на выручку? Какой это тип эластичности?

Ответ. -1 .

24. Для следующих функций спроса найти значения p , при которых спрос является эластичным:

а) $2p + 3x = 12$;

б) $x = 50 \cdot (10 - \sqrt{p})$;

в) $p = ax + b$ ($a < 0, b > 0$).

Ответ. а) $(3; 6)$; б) $\left(\frac{400}{9}; 100\right)$; в) $\left(\frac{b}{2}; b\right)$.

25. Функция спроса имеет вид $p = \sqrt{3600 - x^2}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p=50$.

б) Посчитать приблизительно процентное изменение спроса, если цена выросла на 11%.

Ответ. а) $-\frac{25}{11}$; б) уменьшится на 25%.

26. Уравнение спроса имеет вид $p = 20 - 0.1\sqrt{x}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p=18$.

б) Вычислить приблизительно процентное изменение спроса, если цена уменьшилась на 2%.

Ответ. а) $-\frac{36}{2}$; б) уменьшится на 36%.

27. Уравнение спроса имеет вид $x = 100 \cdot \sqrt{4 - p}$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 24 единицы;

б) 15 единиц.

Ответ. а) $-\frac{7}{18}$ возрастает; б) $-\frac{5}{12}$ убывает.

28. Для следующих функций спроса и предложения найти значение налога на единицу, максимизирующее доход государства.

а) $p = -3x + 124$,
 $p = 2x + 14$.

б) $p = 250 - 2x^2$,
 $p = 700 + 3x$.

Ответ. а) 55; б) 115.

29. Найти значение налога, максимизирующее доход государства, если функции спроса и предложения имеют вид:

а) $p = 800 - 0.5x$,
 $p = 700 + 2x$.

б) $p = 8200 - 5x^2$,
 $p = 700 + 20x^2$.

Ответ. а) 50; б) 5000.

30. Функция предельных издержек имеет вид $C'(x) = 50 + 0.02x$.

а) Найти функцию издержек, если фиксированные издержки составляют 2500 руб. в месяц.

б) Каковы издержки производства 250 изделий в месяц ?

в) Если продукция продается по цене 75 руб. за изделие, сколько нужно произвести и продать, чтобы прибыль была максимальной ?

Ответ. б) 15625; в) 1250.

31. Функция предельных издержек некоторого предприятия имеет вид $C'(x) = 60 - 0.04x + 0.003x^2$.

а) Найти функцию издержек, если издержки производства 100 единиц продукции составляют 7 тыс. руб.

б) Найти фиксированные издержки.

в) Каковы издержки производства 250 единиц продукции ?

г) Если цена составляет 65,5 руб. за единицу продукции, найти максимальное значение прибыли.

Ответ. б) 200; в) 29575; г) 0.

32. Функция предельных издержек имеет вид $C'(x) = 60 + 0.04x$. Фиксированные издержки составляют 1800 руб. в месяц, а цена одного изделия равна 80 руб.

а) Найти переменные издержки.

б) Каковы издержки производства 150 изделий ?

в) Найти приращение прибыли, если объем производства вырос со 150 до 200 изделий.

Ответ. б) 11250; в) 650.

33. Функция предельного дохода некоторого предприятия имеет вид

а) $R'(x) = 20 - 0.02x$; б) $R'(x) = 45 - 0.02x - 0.003x^2$.

Найти функцию дохода. Каково уравнение спроса?

Ответ. а) $p = 20 - 0.01x$; б) $p = 45 - 0.02x - 0.001x^2$.

34. Функция предельной прибыли имеет вид $P'(x) = 25 - 0.004x$. Прибыль предприятия составляет 35.8 тыс. руб., если продано 1200 изделий. Найти функцию прибыли.

Ответ. $p = 25x - 0.002x^2 + 8680$.

35. Функция предельных издержек некоторой продукции имеет вид $C'(x) = 30xe^{0.001x^2}$. Найти функцию издержек, если фиксированные издержки составляют 20 тыс.руб.

Ответ. $C(x) = 15000e^{0.001x^2} + 5000$.

36. Функция предельного дохода имеет вид:

а) $R'(x) = 25 - 0.4x - 0.06x^2$;

б) $R'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 900}}$;

в) $R'(x) = (5 - x)e^{\frac{x}{5}}$.

Найти функцию дохода. Найти закон спроса на продукцию.

Ответ. а) $p = 25 - 0.2x - 0.02x^2$; б) $p = \frac{2/3\sqrt{x^2 + 900} - 20}{x}$; в) $p = 5e^{-x/5}$.

37. Найти функцию потребления, если потребление равно 6 млрд.руб., когда доход равен нулю, а функция предельной склонности к потреблению имеет следующий вид:

а) $\frac{dC}{dy} = 0.5 + \frac{0.2}{\sqrt{y}}$;

б) $\frac{dC}{dy} = 0.4 + \frac{1}{\sqrt{3y + 4}}$;

в) $\frac{dC}{dy} = 0.6 - e^{-2y}$.

Ответ. а) $C(y) = 0.5y + 0.4\sqrt{y} + 6$; б) $C(y) = \frac{2}{3}\sqrt{3y + 4} + 0.4y + 4\frac{2}{3}$;

в) $C(y) = 0.6y + \frac{1}{3}e^{-3y} + 5\frac{2}{3}$.

38. Найти функцию потребления, если потребление равно 4 млрд.руб., когда доход равен нулю, а функция предельной склонности к сбережению имеет следующий вид:

а) $\frac{dS}{dy} = 0,37$;

б) $\frac{dS}{dy} = 0,4 - \frac{1}{\sqrt{2y+9}}$;

в) $\frac{dS}{dy} = 0,3 + e^{-1,6y}$.

Ответ. а) $C(y) = 0.63y + 4$; б) $C(y) = 0.6y + \sqrt{2y+9} + 1$; в) $C(y) = 0.7y + 0.625e^{-1.6y} + 3\frac{3}{8}$.

39. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца:

а) $y = \frac{11}{12}x^2 + \frac{1}{12}x$; б) $y = \frac{9}{10}x^2 + \frac{1}{12}x$.

Какую часть дохода получают 12% наиболее низко оплачиваемого населения? Посчитать коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода.

Ответ. а) 0,0232; $\frac{11}{36}$; б) 0,02496; 0,3.

40. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца:

а) $y = 0,87x^2 + 0,13x$; б) $y = 0,96x^2 + 0,04x$.

Какую часть дохода получают 8% наиболее низко оплачиваемого населения? Посчитать коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода.

Ответ. а) 0,015968; 0,29; б) 0,01008; 0,32.

41. После покраски первых 30 автобусов было обнаружено, что кривая обучения имеет вид: $y = 20x^{-0,312}$. Сколько времени потребуется для покраски следующих 50 автобусов?

Ответ. 290.

42. Для сборки первых 50 CD-плееров (1 единица продукции) понадобилось 70 человеко-часов. В последующем для сборки единицы продукции – 50 плееров – требовалось меньше времени в соответствии с формулой обучения $f(x) = 70x^{-0,24}$.

Найти время, которое потребовалось для производства 5 единиц продукции (250 CD - плееров) после того, как 2 единицы были уже произведены.

Ответ. 248.

43. После производства 100 изделий (1 единица продукции), для которого потребовалось 30 ч., оказалось, что в дальнейшем требуемое время убывает в соответствии с формулой $f(x) = 30x^{-0,14}$. Сколько времени потребуется для производства 400 изделий, после того как 500 будет уже произведено?

Ответ.

44. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = 112 - x^2$. Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 90.

Ответ. 68,79.

45. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = \frac{150}{2x + 5}$. Найти выигрыш потребителей, если равновесное количество товара равно 10.

Ответ. 60,7078.

46. Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, законы спроса и предложения на который имеют следующий вид:

а) $p = 89 - x^2$, $10x - 7p + 210 = 0$;

б) $5p + 2x = 50$, $5p - 6x = 10$;

в) $p = 44 - x^2$, $p = x^2 + 2x + 20$;

г) $p = \frac{120}{x + 2}$, $p = \frac{5}{2}x + 10$.

Ответ. а) 228; б) 5;15; в) 18;27; г) 51,83; 20.

47. Функция совокупных издержек монополии и уравнение спроса на этот товар имеют следующий вид:

а) $C(x) = 900 + 40x + 5x^2$;	б) $C(x) = 400 + 30x + x^2$;
$p = 280 - 4x - 2x^2$.	$p = -\frac{1}{3}x^2 - 3x + 50$.

Найти выигрыш потребителей в точке, где монополия имеет максимальную прибыль.

Ответ. а) 216,67; б) 0,67.

48. Уравнение спроса на некоторую продукцию имеет вид $p = 30 - 0,02x$. Найти среднее значение дохода, если объем продаж возрос с 80 до 150 единиц.

Ответ. $3177\frac{1}{3}$.

49. Функция совокупных издержек производства некоторой продукции имеет вид $C(x) = 1000 + 2x + 0,04x^2$. Найти среднее значение издержек при изменении объема производства от 100 до 200 единиц.

Ответ. $2233\frac{1}{3}$.

50. Кривая обучения при покраске автомобилей имеет вид $f(x) = 10x^{-0,312}$, где $f(x)$ – число человеко-часов, необходимое для покраски $(x+1)$ – го автомобиля. Найти среднее значение времени, необходимое для покраски автомобиля, если:

- а) было покрашено 100 первых автомобилей;
- б) были покрашены автомобили с номерами 401-500.

Ответ. а) 3,43; б) 1,47.

51. Посчитать, какой налог на имущество должно заплатить предприятие, если $k=2\%$, а стоимость имущества (сумма соответствующих счетов баланса) составляла на первое число каждого месяца:

месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
млн.руб	3,5	2,8	4,1	5,2	6,1	3,8	2,6	6,2	7,4	5,1	2,5	3,8	4,6

Ответ. 0,0894.

52. Посчитать, какой налог на имущество должно заплатить предприятие, если $k=1,5\%$, а стоимость имущества (сумма соответствующих счетов баланса) составляла на первое число каждого месяца:

дата	1.01	1.04	1.07	1.10	1.01
млн.руб	11,2	9,8	4,5	10,8	7,6

Ответ. 0,13.

53. Предприятие выпускает видеоаппаратуру. Его доход задается функцией: $R(t) = 40e^{0,25t}$, $0 \leq t \leq 10$. Найти среднее значение дохода на промежутке $[0,10]$.

Ответ. 178,91.

54. Сколько лет нужно продолжать добычу полезных ископаемых до достижения максимального значения прибыли, если скорость изменения издержек и дохода имеет следующий вид:

а) $C'(t) = 3 + 2t$, $R'(t) = 28 - 3t$;

б) $C'(t) = 10 + 3t^{\frac{2}{3}}$, $R'(t) = 46 - t^{\frac{2}{3}}$;

в) $C'(t) = 22 + 4t^{\frac{4}{5}}$, $R'(t) = 134 - 3t^{\frac{4}{5}}$;

Найти максимальное значение прибыли.

Ответ. а) 62,5; б) 388,8; в) 1593.

55. Найти прирост капитала предприятия на данном промежутке времени, если скорость изменения инвестиций имеет следующий вид:

а) $I(t) = 10 + 2\sqrt{t}$, $9 \leq t \leq 16$;

б) $I(t) = 2 + \sqrt[5]{t^2}$, $0 \leq t \leq 1$.

Ответ. а) $119\frac{1}{3}$; б) 2,625.

56. Доход от инвестиций в некоторое производство равен нулю в течение первого года, а затем изменяется по закону $R(t) = 10e^{-0,2(t-1)}$, где t – время в годах. Найти среднее значение дохода от инвестиций в течение первых 5 лет.

Ответ. 5,5.

Библиографический список

1. Исследование операций в экономике: учебн. пособие для вузов / Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; под ред. проф. Н.Ш.Кремера. - М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. - 407с.

2. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум / Н.Ш. Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. - 4-е издание перераб. и доп. - М.: Юрайт, 2012. - 909 с. Серия: Бакалавр, Углубленный курс.

3. Высшая математика для экономистов: курс лекций: учебное пособие для вузов/ под общ.ред. П.С.Геворкяна. – М.: Экономика, 2010. - 351 с. – Высшее образование.

4. Суровцев, Л.К. Математическая экономика: учебное пособие/ Л.К. Суровцев; СПбГУ, экономический факультет. - М.: Экономика, 2011. - 357с. - (Учебники экономического факультета СПбГУ).

Подписано в печать 06.11.2013. Усл. печ. л. . Тираж .
Печать офсетная. Бумага офисная. Заказ № _____

Отпечатано: РИО ВоГТУ, г. Вологда, ул. Ленина, 15