

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВПО «ВОЛОГОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УТВЕРЖДАЮ



06 сентября 2011г.

Рабочая программа дисциплины (модуля)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Специальность
050201 «Математика»

Форма обучения
ЗАОЧНАЯ

Вологда
2011

•

[illegible]

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины (модуля) «Математическая логика» являются развитие навыков логического мышления, знакомство с рядом результатов этой науки, полученных в XX веке, раскрытие смысла и значения задач логической и алгоритмической природы. Многие из изучаемых в данном курсе вопросов имеют также общефилософский и мировоззренческий оттенок. Следует отметить, что помимо умения мыслить логически, что является одним из минимальных требований, курс математической логики обеспечивает знакомство с вопросами оснований математики, прежде всего в аксиоматическом аспекте.

Программа дисциплины «Математическая логика» состоит из следующих разделов: логика высказываний, логика предикатов, формализованные математические теории, проблемы оснований математики, элементы теории алгоритмов.

2. Место дисциплины в общей системе подготовки специалиста

Дисциплина «Математическая логика» относится к циклу ДПП, читается на базе школьного математического образования, и ее знание необходимо для успешного изучения большинства последующих математических дисциплин.

3. Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

– Знать:

понятие высказывания, формулы, тавтологии,
понятие выполнимой, ложной и общезначимой формулы,
понятие булевой функций,
аксиомы исчисления высказываний,
понятие вывода в исчислении высказываний,
понятие предиката, формулы исчисления предикатов.

– Уметь:

решать задачи на построение таблиц истинности,
производить упрощение логических формул,
находить конъюнктивную и дизъюнктивную нормальные формы,
строить простейшие выводы исчисления высказываний,
записывать математические утверждения на языке логики предикатов,
доказывать основные теоремы курса.

– Владеть:

навыками решения практических задач,
навыками необходимыми для доказательств основных теорем курса.

4. Извлечение из ГОС ВПО специальности (126 ЧАСОВ)

Введение. Дедуктивный характер математики. Предмет математической логики, ее роль в вопросах обоснования математики. Тенденции в развитии современной математической логики.

Логика высказывания. Логические операции над высказываниями. Язык логики высказываний, формулы. Истинностные значения формул. Равносильность. Равносильные преобразования формул. Представление истинностных функций формулами. Тавтологии – законы логики. Принципы построения исчислений высказываний (гильбертовского или генценовского типа). Классическое и конструктивное (интуиционистское) исчисления. Аксиомы, правила вывода. Доказуемость формул. Выводимость из гипотез. Производные правила. Теорема дедукции. Характеристики исчислений высказываний – непротиворечивость, полнота, разрешимость и связанные с ними теоремы. Независимость аксиом, правил вывода. Законы исключенного третьего и снятия двойного отрицания – законы классической

логики. Эффективные и неэффективные доказательства.

Логика предикатов. Предикаты и кванторы. Язык логики предикатов. Термы и формулы. Языки первого порядка. Интерпретации. Значение формулы в интерпретации. Равносильность. Общезначимость и выполнимость формул. Проблема общезначимости, неразрешимость ее в общем случае. Применение языка логики предикатов для записи математических предложений, построение отрицаний предложений.

Формализованные математические теории. Теории первого порядка. Аксиомы теории, правила вывода. Доказательства в теории. Характеристики теорий: непротиворечивость, полнота, разрешимость. Непротиворечивость исчисления предикатов. Модели теорий. Теорема о полноте для теорий. Формальная арифметика. Теоремы Геделя о неполноте. Формализация теории множеств. Обзор результатов о непротиворечивости и независимости в основаниях теории множеств. Проблемы оснований математики. Парадоксы теории множеств. Проблема непротиворечивости математики. Программа Гильберта. Метод формализации. Конструктивное направление в математике.

5. Структура и содержание дисциплины «Математическая логика»

5.1 Общая трудоемкость дисциплины составляет 126 часов.

№ п/п	Название темы	Лекции (час)	Практические занятия	Самостоятельная работа
	Введение. Предмет математической логики. Логика высказываний. Логические операции над высказываниями. Язык логики высказываний, формулы. Истинностные значения формул.	2	1	10
	Равносильность.	1	1	4
	Принцип двойственности.			4
	Конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы. Проблема разрешения.	1	1	10
	Совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальные формы.	1		10
	Построение формул по матрице истинности. Релейно-контактные схемы.			6
	Семантическое следствие.			6
	Принципы построения исчислений высказываний (гильбертовского или генценовского типа). Классическое и конструктивное (интуиционистское) исчисления.			4
	Аксиомы, правила вывода.	1		4
	Характеристики исчислений высказываний – непротиворечивость, полнота, разрешимость и связанные с ними теоремы.			6
	Независимость аксиом, правил вывода.			4
	Логика предикатов.	2	1	10
	Языки первого порядка.			6

	Применение языка логики предикатов для записи математических предложений, построение отрицаний предложений.			6
	Формализованные математические теории. Теории первого порядка.			6
	Модели теорий. Теорема о полноте для теорий. Формальная арифметика. Теоремы Геделя о неполноте.	1		10
	Формализация теории множеств. Обзор результатов о непротиворечивости и независимости в основаниях теории множеств.			4
	Проблемы оснований математики.	1		2
	Итого (час)	10	4	112

5.2. Содержание дисциплины

1. Введение. Предмет математической логики.
2. Логика высказываний. Логические операции над высказываниями. Язык логики высказываний, формулы. Истинностные значения формул.
3. Равносильность. Равносильные преобразования формул. Представление истинностных функций формулами. Тавтологии – законы логики.
4. Принцип двойственности. Общезначимые, выполнимые, ложные формулы.
5. Конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы. Проблема разрешения.
6. Совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальные формы. Единственность СДНФ и СКНФ.
7. Построение формул по матрице истинности. Релейно-контактные схемы.
8. Семантическое следствие. Разрешимость языка логики высказываний.
9. Принципы построения исчислений высказываний (гильбертовского или генценовского типа). Классическое и конструктивное (интуиционистское) исчисления.
10. Аксиомы, правила вывода. Доказуемость формул. Выводимость из гипотез. Производные правила. Теорема дедукции.
11. Характеристики исчислений высказываний – непротиворечивость, полнота, разрешимость и связанные с ними теоремы.
12. Независимость аксиом, правил вывода. Законы исключенного третьего и снятия двойного отрицания – законы классической логики. Эффективные и неэффективные доказательства.
13. Логика предикатов. Высказывательные формы и предикаты. График предиката. Булевы операции над предикатами и их графиками. Кванторы, свободные и связанные переменные. Язык логики предикатов. Термы и формулы.
14. Языки первого порядка. Интерпретации. Значение формулы в интерпретации. Равносильность. Общезначимость и выполнимость формул. Проблема общезначимости, неразрешимость ее в общем случае.
15. Применение языка логики предикатов для записи математических предложений, построение отрицаний предложений.
16. Формализованные математические теории. Теории первого порядка. Аксиомы теории, правила вывода. Доказательства в теории. Характеристики теорий: непротиворечивость, полнота, разрешимость. Непротиворечивость исчисления предикатов.
17. Модели теорий. Теорема о полноте для теорий. Формальная арифметика. Теоремы Геделя о неполноте.
18. Формализация теории множеств. Обзор результатов о непротиворечивости и независимости в основаниях теории множеств.

19. Проблемы оснований математики. Парадоксы теории множеств. Проблема непротиворечивости математики. Программа Гильберта. Метод формализации. Конструктивное направление в математике.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

"1. Лихтарников Л.М. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения: учеб. пособие/ Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. – СПб. [и др.]: Лань, 2009.-288 с. всего 5 экз.

2. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие для вузов по специальности 050201 ""Математика""/ В. И. Игошин. – М.: Академия, 2008.-448 с. всего 20 экз.

"б) дополнительная литература:

1. Клини С.К. Математическая логика: [учеб. пособие]/ С. К. Клини; пер. с англ. Ю. А. Гастева; под ред. Г. Е. Минца; предисл Ю. А. Гастева и Г. Е. Минца. – М.: ЛКИ, 2008.-480 с.

2. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов по специальностям в области 090100- "Информационная безопасность"/ М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников [и др.]. – СПб. [и др.]: Лань, 2008.-112 с.

3. Тимофеева И.Л. Математическая логика: курс лекций: учеб. пособие для вузов по специальности 032100-математика/ И. Л. Тимофеева. – М.: Книжный дом "Университет", 2007.-304 с.

4. Ершов Ю.Л. Математическая логика: учеб. пособие/ Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2005.-336 с.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО)

<http://www.mccme.ru>

2. Общероссийский математический портал Math_Net.Ru

<http://www.mathnet.ru>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Освоение дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» предполагает использование для проведения лекционных занятий академической аудитории, оснащенной необходимыми техническими средствами (компьютер, проектор, экран).

8. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины:

Контрольная работа : «Алгебра высказываний»

1. Составить таблицу истинности для формулы:

$$p \Rightarrow q \vee p \vee r \& q .$$

2. Упростите следующие формулы:

А) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (z \Rightarrow y)$;

Б) $(p \Rightarrow q) \& (\neg p \vee t \& s \vee q) \& (\neg p \vee q)$;

В) $(x_1 \& \dots \& x_n) \& (x_1 \vee \dots \vee x_n \Rightarrow \neg y) \& y .$

3. *Штрихом Шеффера* двух высказываний a и b называется новое высказывание, обозначаемое $a|b$, которое ложно только тогда, когда оба данные высказывания истинны. Составить таблицу истинности штриха Шеффера и выразить его через основные операции

над высказываниями. Доказать, что все основные операции над высказываниями можно выразить через штрих Шеффера.

4. Найти для данной формулы КНФ, ДНФ и двойственную:

$$(x \vee \neg y \Rightarrow x \& z) \Rightarrow \neg(x \Rightarrow \neg x) \vee y \& \neg z.$$

5. Составить РКС для формулы и упростить ее, если это возможно:

$$(x \& \neg y) \vee z \vee (x \vee \neg y) \& z.$$

6. Комитет состоит из пяти человек. Решение выносится большинством голосов. Если председатель голосует «против», то решение не принимается. Построить такую схему, чтобы, голосуя «за», каждый из пяти человек нажимал бы на кнопку, и в случае принятия решения зажигалась бы сигнальная лампочка.

Контрольная работа : «Алгебра предикатов»

I. На множестве $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ заданы предикаты $A(x)$: « x делится на 7»; $B(x)$: « x – четное число»; $C(x)$: « x – взаимно просто с числом 12»; $D(x)$: « x кратно 3». Найдите множества истинности следующих предикатов:

1. $B(x) \vee C(x)$;

2. $(A(x) \& C(x)) \Rightarrow \overline{D}(x)$.

II. Запишите в виде формулы алгебры предикатов в модели $\mathbf{M}$:

2.1. $\mathbf{M} = \langle M; T, Pr, Pl, L \rangle$, где M – множество точек трехмерного евклидова пространства со следующими предикатами: $T(x)$: « x – точка», $Pr(x)$: « x – прямая», $Pl(x)$: « x – точка», $L(x, y)$: « x – лежит на y »

Через каждые две точки можно провести прямую.

2.2 $\mathbf{M} = \langle \square; |, S, P \rangle$, если предикаты заданы таким образом: $S(a, x)$: «сумма цифр числа a равна x », $P(a, x)$: «последняя цифра числа a равна x »

Признак делимости на 2.

2.3 $\mathbf{M} = \langle \square; S^3; P^3 \rangle$, где $S^3(x, y, z)$: " $x + y = z$ " $P^3(x, y, z)$: " $x \cdot y = z$ ".

Бесконечность множества простых чисел.

III. Доказать равносильность $(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \equiv (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$.

IV. Привести к предваренной нормальной форме $\overline{(\exists x)(\forall y)(A(x) \Rightarrow A(y))}$.

Исследовать формулу $\mathbf{A} = (\forall x)(\forall z)(\exists y)(F_1(x, y, z) \& (\forall u)(F_2(x, u, z) \Rightarrow F_3(u, y)))$ при всех возможных сигнатурных отображениях на модели $\mathbf{M} = \langle \square; E, S, P \rangle$, где E, S, P соответственно предикаты равенства, сложения и умножения.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ

1. Понятие высказывания. Логические операции над высказываниями. Таблицы истинности.

2. Формулы алгебры высказываний.

3. Равносильные формулы. Основные равносильности.

4. Общезначимые, выполнимые, ложные формулы в алгебре высказываний. Составление таблиц истинности для формулы, упрощение формул. Построение формулы по матрице истинности.

5. Двойственные формулы. Закон двойственности.

6. КНФ, Теорема о существовании КНФ.

7. ДНФ. Теорема о существовании ДНФ.

8. Проблема разрешимости в алгебре высказываний.

9. Совершенные нормальные формы.

10. Применение алгебры высказываний: текстовые задачи, релейно-контактные схемы.

11. Семантическое следствие. Разрешимость языка логики высказываний.
12. Прямая, обратная, противоположная и обратная противоположной теоремы. Необходимое и достаточное условие.
13. Язык логики высказываний, определение формулы.
14. Истинностные значения формул. Тавтологии. Основные законы логики высказываний.
15. равносильные формулы и основные равносильности логики высказываний. Семантическое следование.
16. Теорема о представлении всякой истинностной функции формулой логики высказываний.
17. Классическое и интуиционистское исчисления высказываний. Доказуемые формулы.
18. Свойства отношения выводимости в исчислении высказываний.
19. Теорема дедукции для исчислений высказываний.
20. Производные правила исчислений высказываний.
21. Семантическая корректность исчислений высказываний.
22. Понятие непротиворечивости исчисления высказываний. Критерий непротиворечивости. Непротиворечивость классического исчисления высказываний.
23. Лемма о выводимости, используемая в доказательстве теоремы о семантической полноте классического исчисления высказываний
24. Теорема о семантической полноте классического исчисления высказываний.
25. Теорема о синтаксической полноте классического исчисления высказываний.
26. Разрешимость классического исчисления высказываний.
27. Интерпретация языка логики высказываний, оценка. Значение формулы в интерпретации с оценкой. Модели исчислений высказываний.
28. Доказательство независимости аксиом (правил вывода) исчисления высказываний методом интерпретаций.
29. Сравнение правил доказательства от противного и приведением к нелепости.
30. Языки первого порядка, определение терма, формулы. Замкнутые формулы.
31. Понятие интерпретации языка первого порядка. Значение формулы в интерпретации с оценкой. Общезначимые и выполнимые формулы.
32. равносильные формулы и основные равносильности логики предикатов.
33. Проблема общезначимости для логики предикатов. Теорема Чёрча.
34. Понятие теории первого порядка. Примеры.
35. Теории первого порядка с равенством и их свойства.
36. Теорема о замыкании для теорий первого порядка.
37. Теорема о предикатных подстановках в тавтологии для теорий.
38. Теорема дедукции для теорий первого порядка.
39. Теорема о семантической корректности исчисления предикатов.
40. Теорема о непротиворечивости исчисления предикатов.
41. Расширение теорий. Равнообъёмные теории.
42. Критерий равнообъёмности теорий.
43. Первая теорема о редукции.
44. Вторая теорема о редукции (для непротиворечивости).
45. Разрешимые теории, полные теории первого порядка. Примеры.
46. Понятие аксиомы, независимой от остальных аксиом теории. Критерий независимости аксиомы.
47. Модели теорий первого порядка. Критерий модели теорий.
48. Теорема Гёделя о полноте для теорий первого порядка.
49. Теорема о связи между полнотой и синтаксической полнотой теории.
50. Теорема о связи между полнотой и полнотой относительно модели.
51. Аксиомы Пеано. Формальная арифметика: язык, аксиомы.

52. Теорема Гёделя о неполноте арифметики. Существенная неполнота арифметики.

53. Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики.

54. Формализация теории множеств – теория Цермело-Френкеля ZF.

55. Аксиома выбора теории ZF.

56. Аксиома бесконечности теории ZF.

57. Парадоксы канторовой теории множеств. Парадоксы Рассела и Кантора.