

Министерство образования и науки Российской Федерации
Вологодский государственный университет

А.Б. Назимов, Н.В. Степанова, С.А. Иконникова

МАТЕМАТИКА

Математический анализ

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ
в качестве учебного пособия

Вологда
2015

УДК: 517 (075.8)

ББК 22.161я73

Н 19

Рецензенты:

профессор кафедры биомедицинской техники Вологодского
государственного университета (ВоГУ),
доктор физико-математических наук **М.Ф. Умаров**;
заместитель начальника кафедры информатики и математики
Вологодского института права и экономики (ВИПЭ),
кандидат технических наук **О.А. Панфилова**

Назимов, А.Б.

Н 19 Математика. Математический анализ: учебное пособие
/ А.Б. Назимов, Н.В. Степанова, С.А.Иконникова; Мин-во
образования и науки РФ, Вологод. гос. ун-т. – Вологда:
ВоГУ, 2015. – 100 с.

В учебное пособие включены следующие разделы математического анализа: теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной, числовые и функциональные ряды, дифференциальные уравнения. Структура учебного пособия: краткий теоретический материал по данному разделу; образцы решения и оформления контрольной работы; задачи для самостоятельной работы студентов.

Предназначено для студентов очной и заочной форм обучения.

УДК: 517 (075.8)

ББК 22.161я73

© ФГБОУ ВПО «Вологодский
государственный университет, 2015

© А.Б. Назимов, 2015

© Н.В. Степанова, 2015

© С.А.Иконникова, 2015

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил.

1. Студент должен выполнять контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра – номера его зачетной книжки.
2. Контрольная работа должна быть выполнена в тетради в клетку. Запись осуществляется чернилами синего цвета.
3. Образец оформления титульного листа (обложки) тетради приведен на доске объявлений деканата ФЗДО.
4. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании. Работы, содержащие не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, не рецензируются.
5. Задачи нужно решать в том порядке, в котором они расположены в контрольной работе.
6. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие.
7. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи (рисунки).
8. Компьютерное оформление работы не рецензируется.
9. Возвращенная прорецензированная незачтенная работа исправляется студентом. Исправление записывается в конце работы с новой страницы. Вносить исправления в проверенный текст работы – запрещается.

1. Краткий теоретический материал по теме: «ПРЕДЕЛЫ»

Число b называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $x \neq a$ и $|x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Если число b является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, то пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \rightarrow a$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Свойство 1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow a} (k f(x)) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (k = \text{const}).$$

Свойство 2. Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Свойство 3. Предел разности двух функций равен разности пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Свойство 4. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Свойство 5. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \right).$$

Если рассматривается предел при $x \rightarrow a$: 1) отношения двух функций, то могут возникать ситуации $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$; 2) произведения двух функций, то может возникать ситуация $0 \cdot \infty$; 3) разности двух функций, то может возникать ситуация $\infty - \infty$; 4) степенно-показательной функции, то может возникать ситуация 1^∞ . Эти ситуации называются **элементарными неопределенностями**. Если выражение, находящееся под знаком предела содержит часть, которая дает одну из вышеперечисленных ситуаций, то эти выражения называются **неопределенностями**. Способы вычисления этих пределов, называются **раскрытием неопределенности**.

При вычислении пределов отношения многочленов целесообразно пользоваться следующим утверждением: пусть $p(x)$ многочлен степени $n \geq 2$, а $x = x_0$ является его корнем: $p(x_0) = 0$. Тогда можно выделить множитель $(x - x_0)$:

$$p(x) = (x - x_0)q(x),$$

где $q(x)$ – многочлен степени $n - 1$.

2. Краткий теоретический материал по теме: «ПРОИЗВОДНЫЕ»

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$. Величину $\Delta x \neq 0$ назовем **приращением аргумента**. От приращения аргумента требуется, чтобы точка $a + \Delta x$ находилась в рассматриваемой окрестности. Величину $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(x)$ назовем **приращением функции**. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, то при $\Delta x \rightarrow 0$ выполняется соотношение $\Delta y \rightarrow 0$. Если существует предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \rightarrow 0$, то его значение называется **производной функции** $y = f(x)$ в точке $x = a$ и обозначается y' или $f'(a)$, то есть

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет производную, то она называется **дифференцируемой** в этой точке. Если функция дифференцируема в каждой точке промежутка (a, b) , то она называется **дифференцируемой** в этом промежутке. Процесс нахождения производной функции называется также **дифференцированием функции**.

При вычислении производной функции следует знать правила дифференцирования и табличные производные.

Правило 1. Постоянный множитель можно выносить из под знака производной:

$$(k f(x))' = k(f(x))' \quad (k = \text{const}).$$

Правило 2. Производная от суммы двух функций равна сумме производных от этих функций:

$$(f(x) + g(x))' = (f(x))' + (g(x))'.$$

Правило 3. Производная от разности двух функций равна разности производных от этих функций:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x))' - (g(x))'.$$

Правило 4. Правило производной произведения двух функций:

$$(f(x) \cdot g(x))' = (f(x))' \cdot g(x) + f(x) \cdot (g(x))'.$$

Правило 5. Правило производной частного двух функций:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{(f(x))' \cdot g(x) - f(x) \cdot (g(x))'}{(g(x))^2}.$$

Правило 6. Правило производной сложной функции. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, а функция $x = g(t)$ дифференцируема в точке $t = t_0$, причем $g(t_0) = x_0$. Тогда сложная функция $y = f(g(t))$ дифференцируема в точке $t = t_0$ и справедливо равенство

$$y'(t_0) = f'(x_0) \cdot g'(t_0).$$

Правило 7. Правило логарифмического дифференцирования. Пусть требуется вычислить производную функции $y = f(x)$. Если предварительно логарифмировать равенство $y = f(x)$ и затем вычислять производную, то этот процесс называется логарифмическим дифференцированием. Если использовать обозначение $g(x) = \ln f(x)$, то процесс логарифмического дифференцирования можно представить так:

$$y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x) \Rightarrow (\ln y)' = (\ln f(x))' \Rightarrow \\ \frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))' \Rightarrow y' = y \cdot (\ln f(x))' \Rightarrow y' = f(x) \cdot (\ln f(x))'.$$

Если дана кривая $y = f(x)$, касательная и нормаль в точке (x_0, y_0) к данной кривой записываются уравнениями:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \text{ — уравнение касательной,}$$

$$x - x_0 = -k(y - y_0) \text{ — уравнение нормали,}$$

где $k = y'(x_0)$.

Если функция $y = y(x)$ дана неявно в виде $F(x, y) = 0$, то ее производная $y' = y'(x)$ вычисляется по формуле:

$$y' = -\frac{u'(x)}{v'(y)},$$

где

$$u(x) = F(x, y), \text{ } y \text{ считается постоянным параметром;}$$

$$v(y) = F(x, y), \text{ } x \text{ считается постоянным параметром.}$$

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Тогда ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая величина более высокого порядка малости по сравнению с Δx (обычно пишут: $\alpha(\Delta x) \ll \Delta x$):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Линейная часть $f'(x_0)\Delta x$ приращения функции называется

дифференциалом функции в точке x_0 , соответствующим приращению аргумента Δx , и обозначается dy или $d f(x_0)$:

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

При достаточно малых Δx приращение функции Δy и ее дифференциал приближенно равны: $dy \approx \Delta y$. Это позволяет записать приближенную формулу для вычисления значения функции:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

3. Краткий теоретический материал по теме: «ИНТЕГРАЛЫ»

Неопределенный интеграл. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке X .

Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** для функции $f(x)$ на промежутке X , если она дифференцируема в каждой точке этого промежутка и имеет место равенство

$$F'(x) = f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Если промежуток X содержит концевые точки, то в этих точках будут рассматриваться односторонние производные.

Пример 1. Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной функцией для функции $f(x) = \cos x$ на всей числовой оси: $X = \mathbb{R}$, так как

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Любые две первообразные для одной и той же функции на промежутке X отличаются постоянным слагаемым: если $F(x)$

и $\Phi(x)$ две первообразные для функции $f(x)$ на промежутке X , то найдется постоянная C , такая, что

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Множество всех первообразных функций для функции $f(x)$ на промежутке X называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на промежутке X и обозначается

$$\int f(x) dx.$$

Символ $\int$ называется **знаком интеграла**, $f(x)$ – **подынтегральной функцией**, $f(x)dx$ – **подынтегральным выражением**.

Пусть $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X . Тогда

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Если функция $f(x)$ на промежутке X имеет первообразную функцию, то она называется **интегрируемой** на этом промежутке.

Проверка на правильность вычисления неопределенного интеграла осуществляется дифференцированием найденной первообразной функции: **если производная найденной первообразной функции совпадает с подынтегральной функцией, то вычисление неопределенного интеграла произведено правильно:**

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x).$$

Свойства неопределенного интеграла:

1) $\int F'(x) dx = F(x) + C,$

$$2) \int dF(x) = F(x) + C,$$

$$3) \left(\int f(x) dx \right)' = f(x),$$

$$4) d \int f(x) dx = f(x) dx$$

$$5) \int (k f(x)) dx = k \int f(x) dx, \quad k = \text{const},$$

$$6) \int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx,$$

$$7) \int (f_1(x) - f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx - \int f_2(x) dx.$$

Имеются функции $f(x)$, для которых не существуют первообразные функции в аналитическом виде. Неопределенные интегралы $\int f(x) dx$ от этих функций называются **неберущимися**. Примерами таких интегралов являются

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx.$$

Методы интегрирования: 1) метод замены переменной интегрирования и 2) метод интегрирования по частям.

Имеются два варианта **метода замены переменной интегрирования**: метод подведения под знак дифференциала и метод подстановки.

Метод подведения под знак дифференциала. Пусть требуется найти интеграл $\int f(x) dx$. Предположим, что подынтегральное выражение $f(x) dx$ можно представить в виде произведения

$$f(x) dx = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx.$$

Учитывая, что произведение $\varphi'(x)dx$ является дифференциалом функции $\varphi(x)$, то есть $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$, получаем новое представление подынтегрального выражения

$$f(x)dx = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = g(\varphi(x))d\varphi(x) = g(\varphi)d\varphi.$$

Это преобразование называется подведением функции $\varphi(x)$ под знак дифференциала. Тогда

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int g(u)du.$$

Пример 2. $\int \sin x \cos x dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x dx &= \int \sin x d(\sin x) = |u = \sin x| = \\ &= \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C. \end{aligned}$$

Пример 3. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx &= \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x \cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x) = |u = \operatorname{tg} x| = \\ &= \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

Пример 4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} &= \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} d(\ln x) = |u = \ln x| = \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{\ln x} + C. \end{aligned}$$

Пример 5. $\int \frac{(\arccos x)^{5,5}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{(\arccos x)^{5,5}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int (\arccos x)^{5,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= -\int (\arccos x)^{5,5} d(\arccos x) = |u = \arccos x| = \\ &= -\int u^{5,5} du = -\frac{u^{6,5}}{6,5} + C = -\frac{(\arccos x)^{6,5}}{6,5} + C. \end{aligned}$$

Пример 6. $\int \frac{x^4 dx}{1+x^{10}}.$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 dx}{1+x^{10}} &= \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5)}{1+x^{10}} = |u = x^5| = \frac{1}{5} \int \frac{du}{1+u^2} = \\ &= \frac{1}{5} \operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{5} \operatorname{arctg} x^5 + C. \end{aligned}$$

Метод подстановки. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x) dx$. Введем новую переменную t формулой $x = \varphi(t)$. Будем предполагать, что функция $\varphi(t)$ является дифференцируемой и строго монотонной. Подставим функцию $\varphi(t)$ в подынтегральное выражение:

$$f(x) dx = f(\varphi(t)) d\varphi(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = g(t) dt.$$

Тогда

$$\int f(x) dx = \int g(t) dt.$$

Пример 7. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \left| \begin{array}{l} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int \frac{1+t-1}{1+t} dt = \\ &= 2 \int \left(\frac{1+t}{1+t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = 2t - 2 \int \frac{d(1+t)}{1+t} = \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{1+t} = 2t - 2 \ln|1+t| + C = \\ &= |t=\sqrt{x}| = 2\sqrt{x} - 2 \ln|1+\sqrt{x}| + C. \end{aligned}$$

Пример 8. $\int \sqrt{\frac{x}{x-4}} \frac{dx}{x^2}.$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x}{x-4}} \frac{dx}{x^2} &= \left| \begin{array}{l} x=\frac{1}{t} \quad t=\frac{1}{x} \\ \frac{dx}{x^2}=-dt \end{array} \right| = - \int \sqrt{\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-4}} dt = \\ &= - \int \sqrt{\frac{1}{1-4t}} dt = \left| \begin{array}{l} 1-4t=s \quad t=\frac{1-s}{4} \\ dt=-\frac{1}{4}ds \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \frac{ds}{\sqrt{s}} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{s} + C = \frac{1}{2} \sqrt{1-4t} + C = \frac{1}{2} \sqrt{1-\frac{4}{x}} + C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-4}{x}} + C. \end{aligned}$$

Метод интегрирования по частям. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке X . Если функция $u(x)v'(x)$ имеет первообразную функцию на проме-

жутке X , то и функция $v(x)u'(x)$ имеет первообразную функцию на этом промежутке и справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

или коротко

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Вычисление интеграла $\int u dv$ путем применения этих формул называется **интегрированием по частям**.

Пример 9. $\int x e^x dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right| = \\ &= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C. \end{aligned}$$

Пример 10. $\int x \sin x dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Пример 11. $\int x \cos x dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{array} \right| = \\ &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

Пример 12. $\int x \ln x dx$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C.\end{aligned}$$

Пример 13. $\int \arcsin x dx$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\int \arcsin x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right| = \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Пример 14. $\int \arctg x dx$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\int \arctg x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \arctg x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = x \end{array} \right| = \\ &= x \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \\ &= x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

В рассмотренных примерах для вычисления интегралов однократного применения метода интегрирования по частям было достаточно. В общем случае, метод интегрирования по частям, может быть использован неоднократно.

Пример 15. $\int x^2 \sin x dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & dv = \sin x dx \\ du = 2x dx & v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{array} \right| = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

Пример 16. $\int x^2 \ln x dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x & dv = x dx \\ du = \frac{2 \ln x}{x} dx & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} \frac{2 \ln x}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int x \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} \right) = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2} \left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

Задача 17. Вычислить следующий интеграл

$$\int (3x^2 - 13x - 21)e^{-\frac{x}{4}} dx.$$

Решение. Способ 1. Имеем:

$$\int (3x^2 - 13x - 21)e^{-\frac{x}{4}} dx = 3 \int x^2 e^{-\frac{x}{4}} dx - 13 \int x e^{-\frac{x}{4}} dx - 21 \int e^{-\frac{x}{4}} dx = \otimes$$

Третий интеграл является табличным, а для нахождения первых двух интегралов используем метод интегрирования по частям:

$$\int e^{-\frac{x}{4}} dx = -4e^{-\frac{x}{4}},$$

$$\begin{aligned} \int x e^{-\frac{x}{4}} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^{-\frac{x}{4}} dx \\ du = dx & v = -4e^{-\frac{x}{4}} \end{array} \right| = -4x e^{-\frac{x}{4}} + 4 \int e^{-\frac{x}{4}} dx = \\ &= -4x e^{-\frac{x}{4}} + 4 \cdot (-4) e^{-\frac{x}{4}} = (-4x - 16) e^{-\frac{x}{4}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-\frac{x}{4}} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^{-\frac{x}{4}} dx \\ du = 2x dx & v = -4e^{-\frac{x}{4}} \end{array} \right| = -4x^2 e^{-\frac{x}{4}} + 8 \int x e^{-\frac{x}{4}} dx = \\ &= -4x^2 e^{-\frac{x}{4}} + 8(-4x - 16) e^{-\frac{x}{4}} = (-4x^2 - 32x - 128) e^{-\frac{x}{4}}. \end{aligned}$$

Продолжим вычисление интеграла:

$$\begin{aligned} \otimes &= 3 \int x^2 e^{-\frac{x}{4}} dx - 13 \int x e^{-\frac{x}{4}} dx - 21 \int e^{-\frac{x}{4}} dx = \\ &= 3 \cdot (-4x^2 - 32x - 128) e^{-\frac{x}{4}} - 13 \cdot (-4x - 16) e^{-\frac{x}{4}} - 21 \cdot (-4) e^{-\frac{x}{4}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-12x^2 + (-96 + 52)x + (-384 + 208 + 84) \right) e^{\frac{x}{4}} = \\
&= \left(-12x^2 - 44x - 92 \right) e^{\frac{x}{4}}.
\end{aligned}$$

Способ 2. При вычислении этого интеграла первым способом он представлялся в виде разности трех интегралов. Однако, этот интеграл можно вычислить непосредственно:

$$\begin{aligned}
\int (3x^2 - 13x - 21) e^{\frac{x}{4}} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = 3x^2 - 13x - 21 & dv = e^{\frac{x}{4}} dx \\ du = (6x - 13) dx & v = -4e^{\frac{x}{4}} \end{array} \right| = \\
&= (3x^2 - 13x - 21) \left(-4e^{\frac{x}{4}} \right) - \int \left(-4e^{\frac{x}{4}} \right) (6x - 13) dx = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = 6x - 13 & dv = e^{\frac{x}{4}} dx \\ du = 6 dx & v = -4e^{\frac{x}{4}} \end{array} \right| = -4e^{\frac{x}{4}} (3x^2 - 13x - 21) + \\
&\quad + 4 \left[-4e^{\frac{x}{4}} (6x - 13) + 4 \int e^{\frac{x}{4}} 6 dx \right] = \\
&= -4e^{\frac{x}{4}} (3x^2 - 13x - 21) - 16e^{\frac{x}{4}} (6x - 13) - 384e^{\frac{x}{4}} + C = \\
&= -4e^{\frac{x}{4}} (3x^2 + 11x + 23) + C = (-12x^2 - 44x - 92) e^{\frac{x}{4}} + C.
\end{aligned}$$

Задача 18. Вычислить следующий интеграл

$$\int \frac{70 dx}{(x-4)(x-2)(x+3)}.$$

Решение. Разложим подынтегральную дробь в сумму простей-

ших дробей:

$$\begin{aligned}\frac{70}{(x-4)(x-2)(x+3)} &= \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} = \\ &= \frac{A(x-2)(x+3) + B(x-4)(x+3) + C(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-2)(x+3)}.\end{aligned}$$

Приравнявая числитель полученной дроби к числителю исходной дроби, получим:

$$A(x-2)(x+3) + B(x-4)(x+3) + C(x-4)(x-2) = 70.$$

Подставим в полученное уравнение последовательно $x-4=0$, $x-2=0$ и $x+3=0$:

$$\begin{aligned}x-4=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow A \cdot 2 \cdot 7 + B \cdot 0 \cdot 7 + C \cdot 0 \cdot 2 &= 70 \Rightarrow \\ 14A=70 \Rightarrow A=5\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow A \cdot 0 \cdot 5 + B \cdot (-2) \cdot 5 + C \cdot (-2) \cdot 0 &= 70 \Rightarrow \\ -10B=70 \Rightarrow B=-7\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}x+3=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow A \cdot (-5) \cdot 0 + B \cdot (-7) \cdot 0 + C \cdot (-7) \cdot (-5) &= 70 \Rightarrow \\ 35C=70 \Rightarrow C=2\end{aligned}.$$

Вычислим данный интеграл:

$$\begin{aligned}\int \frac{70dx}{(x-4)(x-2)(x+3)} &= 5 \int \frac{dx}{x-4} - 7 \int \frac{dx}{x-2} + 2 \int \frac{dx}{x+3} = \\ &= 5 \ln|x-4| - 7 \ln|x-2| + 2 \ln|x+3| + C = \ln \frac{|x-4|^5 |x+3|^2}{|x-2|^7} + C.\end{aligned}$$

Задача 19. Вычислить следующий интеграл

$$\int \frac{dx}{5+11\cos x+2\sin x}.$$

Решение. Данный интеграл приводится к интегралу от рациональной дроби при помощи универсальной подстановки

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$. При этом используются следующие замены:

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \quad dx = \frac{2dy}{1+y^2}.$$

Вычислим данный интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5+11\cos x+2\sin x} &= \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} = y \right| = \int \frac{\frac{2dy}{1+y^2}}{5+11 \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2} + 2 \cdot \frac{2y}{1+y^2}} = \\ &= 2 \int \frac{dy}{5(1+y^2)+11(1-y^2)+2 \cdot 2y} = 2 \int \frac{dy}{-6y^2+4y+16} = \\ &= -\frac{2}{6} \int \frac{dy}{y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{8}{3}} = -\frac{1}{3} \int \frac{dy}{\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{8}{3}} = \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{d\left(y - \frac{1}{3}\right)}{\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{3}} \ln \left| \frac{\left(y - \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{3}}{\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{3}} \right| + C = \\ &= -\frac{1}{10} \ln \left| \frac{y-2}{y+\frac{4}{3}} \right| + C = -\frac{1}{10} \ln \left| \frac{3y-6}{3y+4} \right| + C = \\ &= \frac{1}{10} \ln \left| \frac{3y+4}{3y-6} \right| + C = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{3\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 6} \right| + C. \end{aligned}$$

Определенный интеграл. В приложениях часто применяется интеграл вида

$$\int_a^b f(x) dx,$$

который называется **определенным интегралом**. Если неопределенный интеграл означал множество первообразных функций, то определенный интеграл является числом. Для вычисления значения определенного интеграла применяется формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

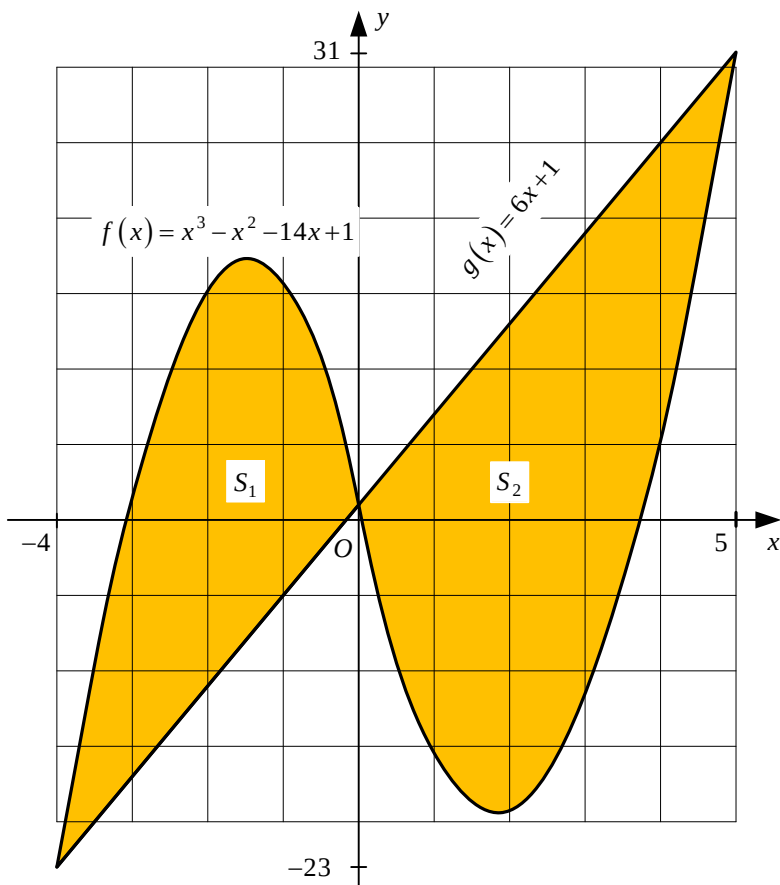
где $F(x)$ – некоторая первообразная функция для функции $f(x)$. Заметим, что значение определенного интеграла не зависит от выбора первообразной функции.

Задача 20. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 1, \quad g(x) = 6x + 1.$$

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения данных линий. Для этого составим уравнение $f(x) = g(x)$ и найдем его корни:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 14x + 1 &= 6x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^3 - x^2 - 20x = 0 \quad \Rightarrow \\ (x + 4)x(x - 5) &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -4, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 5. \end{aligned}$$



Искомая площадь S состоит из суммы площадей S_1 и S_2 . Найдем эти площади:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_{-4}^0 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-4}^0 (x^3 - x^2 - 14x + 1 - (6x + 1)) dx = \\
 &= \int_{-4}^0 (x^3 - x^2 - 20x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 20 \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-4}^0 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{12} \left(3x^4 - 4x^3 - 120x^2 \right) \Big|_{-4}^0 = \\
&= \frac{1}{12} \left[0 - \left(3 \cdot (-4)^4 - 4 \cdot (-4)^3 - 120 \cdot (-4)^2 \right) \right] = \\
&= \frac{1}{12} (-3 \cdot 256 - 4 \cdot 64 + 120 \cdot 16) = \frac{1}{12} (-768 - 256 + 1920) = \frac{896}{12}, \\
S_2 &= \int_0^5 (g(x) - f(x)) dx = - \int_0^5 (x^3 - x^2 - 20x) dx = \\
&= - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 20 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^5 = \\
&= - \frac{1}{12} \left(3x^4 - 4x^3 - 120x^2 \right) \Big|_0^5 = - \frac{1}{12} \left[\left(3 \cdot 5^4 - 4 \cdot 5^3 - 120 \cdot 5^2 \right) \right] = \\
&= - \frac{1}{12} (3 \cdot 625 - 4 \cdot 125 - 120 \cdot 25) = \\
&= - \frac{1}{12} (1875 - 500 - 3000) = \frac{1625}{12}, \\
S &= S_1 + S_2 = \frac{896}{12} + \frac{1625}{12} = \frac{2521}{12}.
\end{aligned}$$

Ответ: $S = \frac{2521}{12}$ (единица площади).

4. Краткий теоретический материал к теме: «РЯДЫ»

Числовые ряды. Пусть задана числовая последовательность

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

или коротко

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется **числовым рядом**.

Пусть задан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. По этому ряду составим числовую последовательность $\{S_n\}$:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Она называется **последовательностью частичных сумм**, а S_n – **n -й частичной суммой** ряда. Если из данного ряда отбросить n -ю частичную сумму, то оставшаяся часть называется **n -м остатком** ряда и обозначается R_n , то есть

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **сходящимся**, если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имеет конечный предел. Если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то число S называется **суммой ряда** и можно писать

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ не имеет конечный предел (предел бесконечный или не существует), то ряд называется **расходящимся**.

Следующее важное свойство, присущее всем сходящимся рядам.

Теорема (Необходимый признак сходимости ряда). *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся, то предел его общего члена a_n равен нулю:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ — сходится} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Данная теорема выражает лишь необходимый признак сходимости ряда. Однако этот необходимый признак не является достаточным, то есть из выполнения условия $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ еще не

следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Примером расходящегося ряда, для которого предел его общего члена a_n равен нулю, является так называемый **гармонический ряд**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Основные свойства сходящихся рядов:

Свойство 1. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится, то для любого α*

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ сходится и справедливо равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Свойство 2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходятся, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *сходится и справедливо равенство:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Свойство 3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходятся, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ *сходится и справедливо равенство:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Свойство 4. 1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то сходится и*

любой его остаток $R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$; 2) *если какой-либо остаток*

R_k *ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то сходится и сам ряд; при этом*

$S = S_k + R_k$, *где*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n , \quad S_k = \sum_{n=1}^k a_n , \quad R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **положительным**, если все члены этого

ряда являются положительными числами. Последовательность частичных сумм любого положительного ряда является

строго монотонно возрастающей последовательностью:

$$S_1 < S_2 < \dots < S_n < S_{n+1} < \dots$$

Свойство 5. 1) (Достаточный признак сходимости положительных рядов). *Для сходимости положительного ряда необходима и достаточна ограниченность его последовательности частичных сумм.*

2) (Достаточный признак расходимости положительных рядов). *Для расходимости положительного ряда необходима и достаточна неограниченность сверху последовательности частичных сумм, то есть выполнение равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$.*

Отметим еще одно важное свойство положительных рядов. Если некоторая подпоследовательность последовательности частичных сумм положительного ряда сходится (не сходится), то и сама последовательность частичных сумм сходится (не сходится).

Следующие признаки позволяют исследовать на сходимость положительные ряды.

Первый признак сравнения. *Пусть для положительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда:*

1) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n ;$$

2) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает расходимость

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Второй признак сравнения. Пусть для положительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ существует предел отношения их общих членов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q.$$

Тогда, если выполняется двойное неравенство $0 < q < +\infty$, то:

1) из сходимости одного из рядов вытекает сходимость другого;

2) из расходимости одного из рядов вытекает расходимость другого.

При использовании признаков сравнения в качестве ряда для сравнения часто используются следующие ряды:

1) **обобщенный гармонический ряд** (или иначе **ряд Дирихле**):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{сходится} & \alpha > 1, \\ \text{расходится} & \alpha \leq 1; \end{cases}$$

2) **ряд из членов геометрической прогрессии:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{сходится} & |q| < 1, \\ \text{расходится} & |q| \geq 1. \end{cases}$$

На втором (предельном) признаке сравнения основан один частный метод, применяемый при исследовании на сходимость

положительных числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Бывает так, что формула общего члена a_n исследуемого ряда достаточно сложна по виду. Однако, это сложное выражение

можно представить в виде произведения сомножителей, каждый из которых по отдельности при $n \rightarrow \infty$ стремится либо к нулю (бесконечно малый), либо к бесконечности (бесконечно большой). Из теории пределов известно, что для таких величин можно подобрать либо эквивалентные бесконечно малые, либо, соответственно, бесконечно большие величины. Напомним, что:

1) бесконечно малые величины α_n и β_n называются эквивалентными (обозначение $\alpha_n \sim \beta_n$), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1;$$

2) бесконечно большие величины h_n и g_n называются эквивалентными (обозначение $h_n \sim g_n$), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{g_n} = 1.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших величин является следствием таблицы пределов. Например, из предела $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ следует, что $\sin \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$, а из предела $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \alpha}{\alpha} = 1$ получаем $\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Нетрудно доказать, что для любого многочлена по степеням n выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_0 n^k + c_1 n^{k-1} + \dots + c_k}{c_0 n^k} = 1 \quad (c_0 \neq 0).$$

Из этого равенства следует, что в любом многочлене при $n \rightarrow \infty$ можно отбросить все степени, меньшие максимальной, то есть

$$c_0 n^k + c_1 n^{k-1} + \dots + c_k : c_0 n^k.$$

Главная ценность эквивалентных величин в том, что они простые по виду. Конечно, замена в выражении a_n сомножителей на эквивалентные бесконечно малые, либо, соответственно, на эквивалентные бесконечно большие величины даст совсем другое новое выражение b_n . Но в силу эквивалентных замен

будет выполняться равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

По предельному признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

будут вести себя одинаково. Тогда исследование ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

можно заменить на исследование более простого по виду ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Признак Даламбера. Пусть для положительного ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d.$$

Тогда,

- 1) если $d < 1$, то ряд сходится;
- 2) если $d > 1$, то ряд расходится.

При $d = 1$ признак Даламбера на вопрос о том, сходится или расходится ряд, ответа не дает. В этом случае может иметь место как сходимость, так и расходимость.

Радикальный признак Коши. Пусть для положительно-

го ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k.$$

Тогда,

1) если $k < 1$, то ряд сходится;

2) если $k > 1$, то ряд расходится.

При $k = 1$ радикальный признак Коши на вопрос о том, сходится или расходится ряд, ответа не дает. В этом случае может иметь место как сходимость, так и расходимость.

Интегральный признак Коши. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является положительным, члены которого образуют монотонно убывающую последовательность

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$$

Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна, монотонно убывает на промежутке $[1, \infty)$ и выполняются равенства

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$$

Тогда:

1) из сходимости несобственного интеграла $\int_1^{\infty} f(x) dx$

вытекает сходимость данного ряда;

2) из расходимости несобственного интеграла $\int_1^{\infty} f(x) dx$

вытекает расходимость данного ряда.

Знакопередающиеся ряды. Ряд называется знакопередающимся, если за каждым положительным членом следует отрицательный, а за каждым отрицательным – положительный.

Знакопередающий ряд записывается так: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$

$(a_n > 0, n = 1, 2, \dots)$.

Признак Лейбница. Пусть:

1) предел общего члена знакопередающегося ряда равен нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

2) абсолютные величины его членов монотонно убывают:

$a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$.

Тогда знакопередающий ряд является сходящимся.

Замечание. Признак Лейбница является лишь достаточным условием сходимости ряда. Поэтому, ссылаясь на признак Лейбница нельзя делать вывод относительно расходимости ряда. Это может случиться при невыполнении одного или обоих условий признака Лейбница. Если не выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то расходимость ряда вытекает из теоремы необходимости, если же не выполняется условие $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$, то данный ряд нужно исследовать другими признаками.

Легко оценивается остаток у знакопередающегося ряда. Если знакопередающий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится и его сумма равна S , то его остаток $R_n = S - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k$ имеет знак $(-1)^n$ и допускает следующую оценку $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Знакопеременные ряды. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **знакопеременным**, если он имеет бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов. Знакопередающиеся ряды являются

ся частным случаем знакопеременных рядов.

Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Обратное утверждение не верно, то есть из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является расходящимся, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ тоже является расходящимся.

Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **условно сходящимся**, если он является сходящимся, но не является абсолютно сходящимся.

Теорема Дирихле. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является абсолютно сходящимся и его сумма равна S . Тогда все ряды, получаемые из данного ряда перестановкой членов, являются абсолютно сходящимися, и их сумма равна S .

Теорема Римана. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является условно сходящимся.

дящимся. Тогда для любого наперед заданного числа S , включая случаи $S = -\infty$ и $S = +\infty$, можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося после перестановки ряда, оказалась равной S .

Функциональные ряды. Пусть функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... определены в некотором промежутке X . Выражение вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

называется **функциональным рядом**.

Совокупность значений $x \in \Omega \subset X$, при которых функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называется **областью сходимости** функционального ряда. Каждому значению $x \in \Omega$ соответствует определенное значение, равное

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x).$$

Эта величина называется **суммой** функционального ряда и обозначается

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Выражение

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

называется **n -й частичной суммой**, а выражение

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

называется **n -м остатком** функционального ряда.

В области сходимости функционального ряда, то есть при $x \in \Omega$ выполняются соотношения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Сходящийся функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** в некоторой области Ω_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

при всех $x \in \Omega_0$.

Равномерно сходящиеся функциональные ряды обладают следующими свойствами:

1) если члены равномерно сходящегося функционального ряда непрерывны в области Ω_0 , то его сумма $S(x)$ является непрерывной функцией в области Ω_0 ;

2) если члены равномерно сходящегося функционального ряда непрерывны в области Ω_0 , то его можно почленно интегрировать в любом отрезке $[a, b] \subset \Omega_0$, то есть

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \quad (x \in [a, b]);$$

3) если члены равномерно сходящегося функционального ряда непрерывно дифференцируемы в области Ω_0 , то его можно почленно дифференцировать в любом отрезке $[a, b] \subset \Omega_0$, то есть

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Сходящийся положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **мажорантным** (или **мажорирующим**) для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в области Ω_0 , если

$$|u_n(x)| \leq a_n$$

для всех $x \in \Omega_0$ и $n = 1, 2, \dots$. При этом функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **мажорируемым**.

Признак Вейерштрасса. *Если функциональный ряд мажорируем в области Ω_0 , то он сходится равномерно в этой области.*

Степенные ряды. Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots,$$

где $x_0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — произвольные вещественные числа, называется **степенным**.

Для степенных рядов имеет место следующее утверждение:

Теорема Абеля. 1) *Если степенной ряд сходится в точке $x_1 \neq x_0$, то он абсолютно сходится для всех x : $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$;*

2) *если степенной ряд расходится в точке x_2 , то он расходится для всех x : $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$.*

Одним из следствий теоремы Абеля является факт существования для всякого степенного ряда интервала сходимости:

$|x - x_0| < R$ с центром в точке x_0 , внутри которого степенной ряд абсолютно сходится и вне которого ($|x - x_0| > R$) он расходится. На концах интервала сходимости, то есть в точках $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$ требуется проведение отдельного исследования. Одни степенные ряды сходятся абсолютно на обоих концах, другие – либо условно сходятся на обоих концах, либо на одном из них условно сходятся, на другом расходятся, третьи – расходятся на обоих концах. Число R называется **радиусом сходимости** степенного ряда. Если $R = 0$, то степенной ряд сходится только в точке $x = x_0$; если $R = +\infty$, то степенной ряд сходится на всей числовой оси.

Радиус сходимости степенного ряда можно определить одной из следующих формул:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Ряды Тейлора и Маклорена. Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0 , то в этой окрестности ее можно разложить в **степенной ряд Тейлора**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

При $x_0 = 0$ получается **ряд Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Ряды Маклорена для некоторых простейших элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \dots$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$(-1 < x \leq 1),$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$(-1 < x < 1),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \dots$$

$$(-1 < x \leq 1).$$

5. Краткий теоретический материал по теме: «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Уравнение называется **дифференциальным** относительно некоторой искомой функции, если оно содержит хотя бы одну производную этой функции.

Порядок наивысшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется **порядком** дифференциального уравнения.

Общий вид дифференциального уравнения порядка n имеет вид:

$$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Если уравнение (1) можно разрешить относительно старшей производной $y^{(n)}$, то получим **дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной**:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}). \quad (2)$$

Решением (или **интегралом**) дифференциального уравнения (1) (или (2)) на промежутке X называется любая функция $y = y(x)$, которая определена на этом промежутке, имеет все производные до порядка n включительно и обращающая данное дифференциальное уравнение в тождество на этом промежутке.

Если решение дифференциального уравнения определяется как неявная функция $\Phi(x, y) = 0$, то неявная функция $\Phi(x, y) = 0$ называется **интегралом дифференциального уравнения**.

График решения (или интеграла) дифференциального уравнения называется **интегральной кривой** дифференциального уравнения.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется **интегрированием дифференциального уравнения**.

Задача Коши (или **начальная задача**) для дифференциального уравнения n -го порядка формулируется следующим образом: *найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1) (или (2)), удовлетворяющее условиям*

$$y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}, \quad (3)$$

где

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \quad (4)$$

– произвольные числа.

Равенства (3) называются **начальными условиями**.

Числа (4) называются **начальными данными**.

Общим решением (или **общим интегралом**) дифференциального уравнения (1) (или (2)) называется функция вида

$$y = y(x; C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (5)$$

которая при соответствующем выборе произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ является решением задачи Коши (3) для любых начальных данных (4).

Любое решение (или интеграл), полученное из общего решения (5) при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, называется **частным решением** (или **частным интегралом**) дифференциального уравнения.

Приведем эти понятия для дифференциального уравнения первого порядка:

■ **общий вид** дифференциального уравнения первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0; \quad (6)$$

■ дифференциальное уравнение первого порядка, **разрешенное относительно производной**:

$$y' = f(x, y); \quad (7)$$

■ дифференциальное уравнение первого порядка в **симметрической форме**:

$$M(x, y)dy + N(x, y)dx = 0; \quad (8)$$

■ **задача Коши** (или **начальная задача**) для дифференциального уравнения первого порядка: *найти решение* $y = y(x)$ *дифференциального уравнения (6) (или (7)), удовлетворяющее начальному условию*

$$y(x_0) = \alpha_0; \quad (9)$$

■ **общее решение** (или **общий интеграл**) дифференциального уравнения первого порядка:

$$y = y(x, C),$$

где C – произвольная постоянная.

Используя соотношение $y' = \frac{dy}{dx}$ уравнение (7) можно привести к виду (8):

$$y' = f(x, y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow$$

$$1 \cdot dy - f(x, y)dx = 0;$$

и наоборот:

$$M(x, y)dy + N(x, y)dx = 0 \Rightarrow$$

$$M(x, y)dy = -N(x, y)dx \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \Rightarrow y' = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}.$$

Простейшие классы дифференциальных уравнений.

■ **уравнение с разделенными переменными:**

$$M(y)dy + N(x)dx = 0;$$

общий интеграл уравнения с разделенными переменными находят почленным интегрированием:

$$\int M(y)dy + \int N(x)dx = C,$$

где C – произвольная постоянная;

■ **уравнение с разделяющимися переменными:**

$$M_1(y)M_2(x)dy + N_1(x)N_2(y)dx = 0;$$

■ уравнение (7) называется **однородным**, если:

$$f(\lambda x, \lambda y) \equiv f(x, y);$$

однородное дифференциальное уравнение интегрируется введением новой неизвестной функции $u = u(x)$ с помощью равенства $y = ux$; тогда $y' = u'x + u$;

■ **линейное дифференциальное уравнение:**

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные функции; линейное дифференциальное уравнение интегрируется введением двух новых неизвестных функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ с помощью равенства $y = uv$; тогда $y' = u'v + uv'$.

**6. Образец решения задач и их оформления по теме:
«ПРЕДЕЛЫ»**

Задача № 1. Вычислить предел:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^3 + 19x^2 + 33x + 9}{9x^3 + 53x^2 + 75x - 9}.$$

Решение. Вычислим значения многочленов в числителе и знаменателе дроби при $x = -3$:

$$\begin{aligned} & 3x^3 + 19x^2 + 33x + 9 \Big|_{x=-3} = \\ & = 3 \cdot (-3)^3 + 19 \cdot (-3)^2 + 33 \cdot (-3) + 9 = -81 + 171 - 99 + 9 = 0 \\ & 9x^3 + 53x^2 + 75x - 9 \Big|_{x=-3} = \\ & = 9 \cdot (-3)^3 + 53 \cdot (-3)^2 + 75 \cdot (-3) - 9 = -243 + 477 - 225 - 9 = 0. \end{aligned}$$

Данная дробь представляет неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Так

как $x = -3$ является корнем этих многочленов, то в них можно выделить множитель $x + 3$. Для того чтобы найти другие множители, произведем деление этих многочленов на двучлен $x + 3$:

$$\begin{array}{r} \underline{3x^3 + 19x^2 + 33x + 9} \quad | \quad \underline{x + 3} \\ \underline{3x^3 + 9x^2} \qquad \qquad \quad 3x^2 + 10x + 3 \\ \quad \underline{10x^2 + 33x} \qquad \qquad \quad \\ \quad \quad \underline{10x^2 + 30x} \qquad \qquad \quad \\ \quad \quad \quad \underline{3x + 9} \qquad \qquad \quad \\ \quad \quad \quad \quad \underline{3x + 9} \\ \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \underline{9x^3 + 53x^2 + 75x - 9} \quad | \quad x + 3 \\
 9x^3 + 27x^2 \qquad \qquad 9x^2 + 26x - 3 \\
 \hline
 26x^2 + 75x \\
 - \\
 26x^2 + 78x \\
 \hline
 -3x - 9 \\
 - \\
 -3x - 9 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Таким образом,

$$3x^3 + 19x^2 + 33x + 9 = (x + 3)(3x^2 + 10x + 3),$$

$$9x^3 + 53x^2 + 75x - 9 = (x + 3)(3x^2 + 26x - 3).$$

Вычислим данный предел:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^3 + 19x^2 + 33x + 9}{9x^3 + 53x^2 + 75x - 9} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(3x^2 + 10x + 3)}{(x + 3)(9x^2 + 26x - 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 10x + 3}{9x^2 + 26x - 3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(3x + 1)}{(x + 3)(9x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x + 1}{9x - 1} = \frac{3 \cdot (-3) + 1}{9 \cdot (-3) - 1} = \frac{-8}{-28} = \frac{2}{7}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2}{7}$

Задача № 2. Вычислить предел:

$$\lim_{x \rightarrow 4/9} \frac{\sqrt{45x + 5} - \sqrt{36x + 9}}{\sqrt{63x + 8} - 6}.$$

Решение. Вычислим значения выражений в числителе и знаменателе дроби при $x = \frac{4}{9}$:

$$\begin{aligned}
\left. \sqrt{45x+5} - \sqrt{36x+9} \right|_{x=\frac{4}{9}} &= \sqrt{45 \cdot \frac{4}{9} + 5} - \sqrt{36 \cdot \frac{4}{9} + 9} = \\
&= \sqrt{20+5} - \sqrt{16+9} = \sqrt{25} - \sqrt{25} = 0, \\
\left. \sqrt{63x+8} - 6 \right|_{x=\frac{4}{9}} &= \sqrt{63 \cdot \frac{4}{9} + 8} - 6 = \\
&= \sqrt{28+8} - 6 = \sqrt{36} - 6 = 6 - 6 = 0.
\end{aligned}$$

Данная дробь при $x \rightarrow \frac{4}{9}$ представляет неопределенность вида

$\left(\frac{0}{0}\right)$. Для вычисления предела умножим числитель и знаменатель дроби на их сопряженные и воспользуемся формулой разности квадратов $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 4/9} \frac{\sqrt{45x+5} - \sqrt{36x+9}}{\sqrt{63x+8} - 6} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \\
= \lim_{x \rightarrow 4/9} \frac{(45x+5 - (36x+9))(\sqrt{63x+8} + 6)}{(63x+8 - 6^2)(\sqrt{45x+5} + \sqrt{36x+9})} &= \\
= \lim_{x \rightarrow 4/9} \frac{(9x-4)(\sqrt{63x+8} + 6)}{(63x-28)(\sqrt{45x+5} + \sqrt{36x+9})} &= \\
= \lim_{x \rightarrow 4/9} \frac{(9x-4)(\sqrt{63x+8} + 6)}{7(9x-4)(\sqrt{45x+5} + \sqrt{36x+9})} &= \\
= \lim_{x \rightarrow 4/9} \frac{(\sqrt{63x+8} + 6)}{7(\sqrt{45x+5} + \sqrt{36x+9})} &=
\end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{63 \cdot \frac{4}{9} + 8} + 6 \right)}{7 \left(\sqrt{45 \cdot \frac{4}{9} + 5} + \sqrt{36 \cdot \frac{4}{9} + 9} \right)} = \frac{(\sqrt{36} + 6)}{7(\sqrt{25} + \sqrt{25})} = \frac{12}{7 \cdot 10} = \frac{6}{35}.$$

Ответ: $\frac{6}{35}$

Задача № 3. Вычислить предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_7(1 + 3 \operatorname{tg} x)}{\arcsin 8x}.$$

Решение. Вычислим значения выражений в числителе и знаменателе дроби при $x = 0$:

$$\log_7(1 + 3 \operatorname{tg} x) \Big|_{x=0} = \log_7(1 + 3 \operatorname{tg} 0) = \log_7(1 + 0) = 0,$$

$$\arcsin 8x \Big|_{x=0} = \arcsin(8 \cdot 0) = \arcsin 0 = 0.$$

Данная дробь представляет неопределенность вида $\left(\frac{0}{0} \right)$. Для

вычисления предела используем табличные пределы:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_7(1 + 3 \operatorname{tg} x)}{\arcsin 8x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log_7(1 + 3 \operatorname{tg} x)}{3 \operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot \frac{8x}{\arcsin 8x} \cdot \frac{3}{8} \right) = \\ &= \frac{3}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_7(1 + 3 \operatorname{tg} x)}{3 \operatorname{tg} x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{\arcsin 8x} = \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\ln 7} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{8 \ln 7} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{8 \ln 7}$

Задача № 4. Вычислить предел:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{17x^2 - 31x + 42} - \sqrt{17x^2 + 31x - 42} \right).$$

Решение. Данный предел представляет неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Умножим и поделим данное выражение на сопряженное выражение и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{17x^2 - 31x + 42} - \sqrt{17x^2 + 31x - 42} \right) &= (\infty - \infty) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{17x^2 - 31x + 42 - (17x^2 + 31x - 42)}{\sqrt{17x^2 - 31x + 42} + \sqrt{17x^2 + 31x - 42}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-62x + 84}{|x| \sqrt{17 - \frac{31}{x} + \frac{42}{x^2}} + |x| \sqrt{17 + \frac{31}{x} - \frac{42}{x^2}}} = \otimes; \end{aligned}$$

Поделим числитель и знаменатель дроби на $|x|$:

$$\otimes = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-62 \frac{x}{|x|} + \frac{84}{|x|}}{\sqrt{17 - \frac{31}{x} + \frac{42}{x^2}} + \sqrt{17 + \frac{31}{x} - \frac{42}{x^2}}} = \otimes;$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} = -1,$$

то

$$\otimes = \begin{cases} \frac{-62 \cdot 1}{\sqrt{17} + \sqrt{17}}, & x \rightarrow +\infty, \\ \frac{-62 \cdot (-1)}{\sqrt{17} + \sqrt{17}}, & x \rightarrow -\infty, \end{cases} = \begin{cases} -\frac{31}{\sqrt{17}}, & x \rightarrow +\infty, \\ \frac{31}{\sqrt{17}}, & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} -\frac{31}{\sqrt{17}}, & x \rightarrow +\infty, \\ \frac{31}{\sqrt{17}}, & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

7. Образец решения задач и их оформления по теме: «ПРОИЗВОДНЫЕ»

Задача № 5. Найти производную функции:

$$y = 3x^3 \arcsin 0,5x + (x^2 + 8)\sqrt{4 - x^2}.$$

Решение. По правилам производной суммы, произведения, сложной функции и табличных производных находим:

$$\begin{aligned} y' &= \left(3x^3 \arcsin 0,5x + (x^2 + 8)\sqrt{4 - x^2} \right)' = \\ &= \left(3x^3 \arcsin 0,5x \right)' + \left((x^2 + 8)\sqrt{4 - x^2} \right)' = \\ &= 3(x^3)' \arcsin 0,5x + 3x^3 \left(\arcsin \frac{x}{2} \right)' + \\ &+ (x^2 + 8)' \sqrt{4 - x^2} + (x^2 + 8) \left(\sqrt{4 - x^2} \right)' = \\ &= 3 \cdot 3x^2 \cdot \arcsin 0,5x + 3x^3 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} + \\ &+ 2x \cdot \sqrt{4 - x^2} + (x^2 + 8) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \\ &= 9x^2 \arcsin 0,5x + \frac{3x^3}{\sqrt{4 - x^2}} + 2x\sqrt{4 - x^2} - \frac{x^3 + 8x}{\sqrt{4 - x^2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 9x^2 \arcsin 0,5x + \frac{3x^3 + 2x(4 - x^2) - x^3 - 8x}{\sqrt{4 - x^2}} = \\
&= 9x^2 \arcsin 0,5x + \frac{2x^3 + 8x - 2x^3 - 8x}{\sqrt{4 - x^2}} = 9x^2 \arcsin 0,5x.
\end{aligned}$$

Ответ: $y' = 9x^2 \arcsin 0,5x$

Задача № 6. Составить уравнения касательных и нормалей к параболе (p) в точках ее пересечения с прямой (l) :

$$(p): y = x^2 - 12x + 17; \quad (l): y = -4x + 10.$$

Решение. Найдем точки пересечения параболы (p) и прямой (l) . Для чего составим систему из уравнений этих линий и найдем её решения:

$$\begin{cases} y = x^2 - 12x + 17 \\ y = -4x + 10 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 12x + 17 = -4x + 10 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 64 - 28 = 36 = 6^2;$$

$$x_1 = \frac{8-6}{2} = 1, \quad y_1 = -4x_1 + 10 = -4 + 10 = 6 \Rightarrow A_1(1, 6);$$

$$x_2 = \frac{8+6}{2} = 7, \quad y_2 = -4x_2 + 10 = -28 + 10 = -18 \Rightarrow A_2(7, -18).$$

Найдем производную кривой и вычислим значения этой производной в точках x_1 и x_2 :

$$y' = (x^2 - 12x + 17)' = 2x - 12;$$

$$k_1 = y'(x_1) = 2 \cdot 1 - 12 = -10,$$

$$k_2 = y'(x_2) = 2 \cdot 7 - 12 = 2.$$

Составим уравнения касательной и нормали в точке A_1 :

$$y - y_1 = k_1(x - x_1) \Rightarrow y - 6 = -10(x - 1) \Rightarrow$$

$$10x + y - 16 = 0 \quad - \quad \text{уравнение касательной в точке } A_1;$$

$$x - x_1 = -k_1(y - y_1) \Rightarrow x - 1 = 10(y - 6) \Rightarrow$$

$$x - 10y + 59 = 0 \quad - \quad \text{уравнение нормали в точке } A_1;$$

Составим уравнения касательной и нормали в точке A_2 :

$$y - y_2 = k_2(x - x_2) \Rightarrow y + 18 = 2(x - 7) \Rightarrow$$

$$2x - y - 32 = 0 \quad - \quad \text{уравнение касательной в точке } A_2;$$

$$x - x_2 = -k_2(y - y_2) \Rightarrow x - 7 = -2(y + 18) \Rightarrow$$

$$x + 2y + 29 = 0 \quad - \quad \text{уравнение нормали в точке } A_2.$$

Ответ: $10x + y - 16 = 0$ – касательная в точке A_1 ;

$x - 10y + 59 = 0$ – нормаль в точке A_1 ;

$2x - y - 32 = 0$ – касательная в точке A_2 ;

$x + 2y + 29 = 0$ – нормаль в точке A_2 .

Задача № 7. С помощью дифференциала функции вычислить приближенное значение данного корня. Вычислить этот же корень с помощью калькулятора и оценить в процентах относительную погрешность вычисления:

$$\sqrt[3]{221,076}.$$

Решение. Для решения задачи используем формулу для приближенного вычисления значения функции:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Полагая $f(x) = \sqrt[3]{x}$, будем иметь

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}},$$

$$\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x_0} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_0^2}} \cdot \Delta x.$$

Пусть $x = x_0 + \Delta x = 221,076$. Число x_0 выбираем таким, чтобы значение $f(x_0) = \sqrt[3]{x_0}$ можно вычислить без таблицы. В качестве x_0 можно брать $x_0 = 216 = 6^3$. Тогда

$$\Delta x = x - x_0 = 221,076 - 216 = 5,076,$$

$$f(x_0) = \sqrt[3]{x_0} = \sqrt[3]{6^3} = 6,$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3 \cdot 6^2} = \frac{1}{3 \cdot 36} = \frac{1}{108}.$$

Подставим вычисленные значения в приближенную формулу:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \sqrt[3]{221,076} = \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x_0} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_0^2}} \cdot \Delta x = \\ &= \sqrt[3]{216} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{216^2}} \cdot 5,076 = 6 + \frac{5,076}{108} = 6,047. \end{aligned}$$

Вычислим значение данного выражения с помощью калькулятора:

$$A = \sqrt[3]{221,076} \approx 6,0466366\dots$$

Относительная погрешность найденного приближенного значения вычисляется по формуле:

$$\delta = \frac{|A - \tilde{A}|}{|\tilde{A}|} \cdot 100\%.$$

Так как

$$\frac{|A - \tilde{A}|}{|\tilde{A}|} = \frac{|6,0466366 - 6,047|}{|6,047|} = \frac{|-0,00036|}{|6,047|} = 0,00006,$$

то

$$\delta = 0,00006 \cdot 100\% = 0,006\% .$$

Ответ: $\tilde{A} = 6,047$, $\delta = 0,006\%$

Задача № 8. Найти значение выражения $2y' + 3y'' - 5y'''$, если:

$$y = (6x - 5)\sin x + (4x + 9)\cos x .$$

Решение. Найдем производные до третьего порядка включительно.

Первая производная:

$$\begin{aligned} y' &= ((6x - 5)\sin x + (4x + 9)\cos x)' = \\ &= (6x - 5)' \sin x + (6x - 5)(\sin x)' + \\ &+ (4x + 9)' \cos x + (4x + 9)(\cos x)' = \\ &= 6\sin x + (6x - 5)\cos x + 4\cos x + (4x + 9)(-\sin x) = \\ &= (-4x - 3)\sin x + (6x - 1)\cos x ; \end{aligned}$$

вторая производная:

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = ((-4x - 3)\sin x + (6x - 1)\cos x)' = \\ &= (-4x - 3)' \sin x + (-4x - 3)(\sin x)' + \\ &+ (6x - 1)' \cos x + (6x - 1)(\cos x)' = \\ &= -4\sin x + (-4x - 3)\cos x + 6\cos x + (6x - 1)(-\sin x) = \\ &= (-6x - 3)\sin x + (-4x + 3)\cos x ; \end{aligned}$$

третья производная:

$$\begin{aligned} y''' &= (y'')' = ((-6x - 3)\sin x + (-4x + 3)\cos x)' = (-6x - 3)' \sin x + \\ &+ (-6x - 3)(\sin x)' + (-4x + 3)' \cos x + (-4x + 3)(\cos x)' = \\ &= -6\sin x + (-6x - 3)\cos x - 4\cos x + (-4x + 3)(-\sin x) = \\ &= (4x - 9)\sin x + (-6x - 7)\cos x . \end{aligned}$$

Вычислим искомую сумму:

$$\begin{aligned}
 2y' + 3y'' - 5y''' &= 2((-4x-3)\sin x + (6x-1)\cos x) + \\
 &+ 3((-6x-3)\sin x + (-4x+3)\cos x) - \\
 &- 5((4x-9)\sin x + (-6x-7)\cos x) = \\
 &= (-8x-6)\sin x + (12x-2)\cos x + \\
 &+ (-18x-9)\sin x + (-12x+9)\cos x + \\
 &+ (-20x+45)\sin x + (30x+35)\cos x = \\
 &= (-8x-6-18x-9-20x+45)\sin x + \\
 &+ (12x-2-12x+9+30x+35)\cos x = \\
 &= (-46x+30)\sin x + (30x+42)\cos x.
 \end{aligned}$$

Ответ:

$$2y' + 3y'' - 5y''' = (-46x+30)\sin x + (30x+42)\cos x$$

8. Образец решения задач и их оформления по теме: «ИНТЕГРАЛЫ»

Задача № 9. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int x^8 \sin \sqrt{5x^9 - 9} dx.$$

Решение. Произведем замену переменной и используем метод интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
 \int x^8 \sin \sqrt{5x^9 - 9} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{5x^9 - 9} = y \\ x^8 dx = \frac{2}{45} y dy \end{array} \right| = \\
 &= \frac{2}{45} \int y \sin y dy = \left| \begin{array}{ll} u = y & dv = \sin y dy \\ du = dy & v = -\cos y \end{array} \right| =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{45} \left(-y \cos y + \int \cos y dy \right) = \frac{2}{45} (C - y \cos y + \sin y) = \\
&= \frac{2}{45} \left(C - \sqrt{5x^9 - 9} \cos \sqrt{5x^9 - 9} + \sin \sqrt{5x^9 - 9} \right).
\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2}{45} \left(C - \sqrt{5x^9 - 9} \cos \sqrt{5x^9 - 9} + \sin \sqrt{5x^9 - 9} \right)$

Задача № 10. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{(10 \operatorname{ctg} x - 29) dx}{2 \sin^2 x - 23 \sin x \cos x + 10}.$$

Решение. Поделим числитель и знаменатель подынтегральной дроби на $\sin^2 x$:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{(10 \operatorname{ctg} x - 29) dx}{2 \sin^2 x - 23 \sin x \cos x + 10} = \\
&= \int \frac{(10 \operatorname{ctg} x - 29) \frac{dx}{\sin^2 x}}{\frac{2 \sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{23 \sin x \cos x}{\sin^2 x} + \frac{10}{\sin^2 x}} = \\
&= - \int \frac{(10 \operatorname{ctg} x - 29) d(\operatorname{ctg} x)}{2 - 23 \operatorname{ctg} x + 10(1 + \operatorname{ctg}^2 x)} = |\operatorname{ctg} x = y| = \\
&= - \int \frac{(10y - 29) dy}{2 - 23y + 10(1 + y^2)} = - \int \frac{(10y - 29) dy}{10y^2 - 23y + 12} = \otimes
\end{aligned}$$

Разложим подынтегральную дробь в сумму простейших дробей:

$$10y^2 - 23y + 12 = 0; \quad D = 23^2 - 4 \cdot 10 \cdot 12 = 529 - 480 = 49,$$

$$y_1 = \frac{23 - \sqrt{49}}{2 \cdot 10} = \frac{23 - 7}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5},$$

$$y_2 = \frac{23 + \sqrt{49}}{2 \cdot 10} = \frac{23 + 7}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2},$$

$$10y^2 - 23y + 12 = 10\left(y - \frac{4}{5}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) = (5y - 4)(2y - 3),$$

$$\frac{10y - 29}{10y^2 - 23y + 12} = \frac{10y - 29}{(5y - 4)(2y - 3)} = \frac{A}{5y - 4} + \frac{B}{2y - 3},$$

$$A(2y - 3) + B(5y - 4) = 10y - 29,$$

$$(2A + 5B)y + (-3A - 4B) = 10y - 29,$$

$$\begin{cases} 2A + 5B = 10 & \cdot 4 \\ -3A - 4B = -29 & \cdot 5 \end{cases}$$

$$8A - 15A = 40 - 145 \Rightarrow -7A = -105 \Rightarrow A = 15$$

$$5B = 10 - 2A = 10 - 30 = -20 \Rightarrow B = -4,$$

$$\frac{10y - 29}{10y^2 - 23y + 12} = \frac{15}{5y - 4} - \frac{4}{2y - 3}.$$

Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} \otimes &= -\int \left(\frac{15}{5y - 4} - \frac{4}{2y - 3} \right) dy = \int \frac{4dy}{2y - 3} - \int \frac{15dy}{5y - 4} = \\ &= \frac{4}{2} \ln|2y - 3| - \frac{15}{5} \ln|5y - 4| + C = 2\ln|2y - 3| - 3\ln|5y - 4| + C = \\ &= 2\ln|2\operatorname{ctg} x - 3| - 3\ln|5\operatorname{ctg} x - 4| + C. \end{aligned}$$

Ответ: $2\ln|2\operatorname{ctg} x - 3| - 3\ln|5\operatorname{ctg} x - 4| + C$

Задача № 11. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^3 \frac{(24x^2 - 56x + 57)dx}{(x^2 + 9)(4x + 1)}.$$

Решение. Разложим подынтегральную дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{24x^2 - 56x + 57}{(x^2 + 9)(4x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 9} + \frac{C}{4x + 1},$$

$$(Ax+B)(4x+1)+C(x^2+9)=24x^2-56x+57,$$

$$(4A+B)x^2+(A+4B)x+(B+9C)=24x^2-56x+57,$$

$$\begin{cases} 4A+C=24 \\ A+4B=-56 \\ B+9C=57 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-15 \\ C=8 \end{cases}$$

$$\frac{24x^2-56x+57}{(x^2+9)(4x+1)} = \frac{4x-15}{x^2+9} + \frac{8}{4x+1}.$$

Вычислим определенный интеграл:

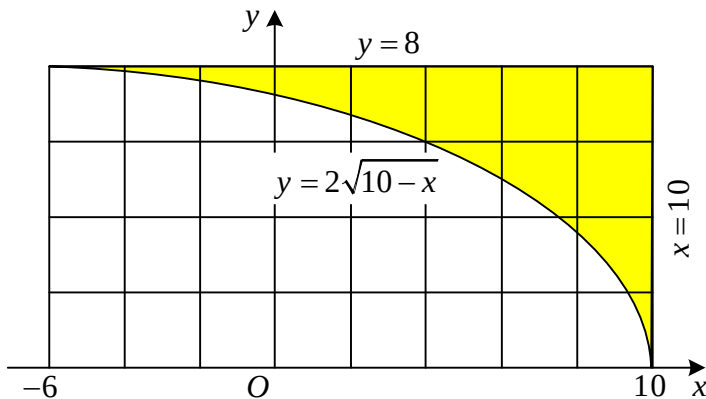
$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{(24x^2-56x+57)dx}{(x^2+9)(4x+1)} &= \int_0^3 \left(\frac{4x-15}{x^2+9} + \frac{8}{4x+1} \right) dx = \\ &= \int_0^3 \frac{4x dx}{x^2+9} - \int_0^3 \frac{15 dx}{x^2+9} + \int_0^3 \frac{8 dx}{4x+1} = \\ &= 2 \int_0^3 \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} - 15 \int_0^3 \frac{dx}{x^2+3^2} + 2 \int_0^3 \frac{d(4x+1)}{4x+1} = \\ &= \left(2 \ln(x^2+9) - \frac{15}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + 2 \ln|4x+1| \right) \Big|_0^3 = \\ &= \left(2 \ln(3^2+9) - 5 \operatorname{arctg} \frac{3}{3} + 2 \ln|4 \cdot 3 + 1| \right) - \\ &\quad - \left(2 \ln(0^2+9) - 5 \operatorname{arctg} \frac{0}{3} + 2 \ln|4 \cdot 0 + 1| \right) = \\ &= 2 \ln 18 - 5 \operatorname{arctg} 1 + 2 \ln 13 - 2 \ln 9 + 5 \operatorname{arctg} 0 - 2 \ln 1 = \\ &= 2(\ln 18 + \ln 13 - \ln 9) + 5 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 \ln \frac{18 \cdot 13}{9} + \frac{5\pi}{4} = 2 \ln 26 + \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $2 \ln 26 + \frac{5\pi}{4}$

Задача № 12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2\sqrt{10-x}, \quad y = 8, \quad x = 10.$$

Решение. Составим чертеж:



Вычислим искомую площадь:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-6}^{10} (8 - 2\sqrt{10-x}) dx = 8 \int_{-6}^{10} dx - 2 \int_{-6}^{10} (10-x)^{1/2} dx = \\ &= \left(8x + 2 \cdot \frac{2}{3} (10-x)^{3/2} \right) \Big|_{-6}^{10} = \left(8x + \frac{4}{3} (\sqrt{10-x})^3 \right) \Big|_{-6}^{10} = \\ &= \left(8 \cdot 10 + \frac{4}{3} (\sqrt{10-10})^3 \right) - \left(8 \cdot (-6) + \frac{4}{3} (\sqrt{10-(-6)})^3 \right) = \\ &= \left(80 + \frac{4}{3} \cdot 0^3 \right) - \left(-48 + \frac{4}{3} \cdot 4^3 \right) = (80 + 0) - \left(-48 + \frac{256}{3} \right) = \frac{128}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $S = \frac{128}{3}$

9. Образец решения задач и их оформления по теме: «РЯДЫ»

Задача 13. Для данного ряда: 1) найти формулу n -й частичной суммы S_n ; 2) найти сумму S :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{288}{64n^2 - 16n - 15}$$

Решение. Найдем корни квадратного уравнения

$$64n^2 - 16n - 15 = 0;$$

$$D = 16^2 - 4 \cdot 64 \cdot (-15) = 256 + 3840 = 4096 = 64^2;$$

$$n_1 = \frac{16 + 64}{2 \cdot 64} = \frac{80}{2 \cdot 64} = \frac{5}{8}, \quad n_2 = \frac{16 - 64}{2 \cdot 64} = -\frac{48}{2 \cdot 64} = -\frac{3}{8},$$

$$64n^2 - 16n - 15 = 64 \left(n - \frac{5}{8} \right) \left(n + \frac{3}{8} \right) = (8n - 5)(8n + 3).$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, разложим общий член ряда в сумму простейших дробей:

$$\frac{288}{64n^2 - 16n - 15} = \frac{288}{(8n - 5)(8n + 3)} = \frac{A}{8n - 5} + \frac{B}{8n + 3},$$

$$A(8n + 3) + B(8n - 5) = 288 \Rightarrow (8A + 8B)n + (3A - 5B) = 288,$$

$$\begin{cases} 8A + 8B = 0 \\ 3A - 5B = 288 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} (I) \cdot \left(\frac{5}{8} \right) + (II) \\ \hline \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 8A + 8B = 0 \\ 8A = 288 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 36, \\ B = -36. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$a_n = \frac{36}{8n - 5} - \frac{36}{8n + 3}.$$

Отсюда,

$$a_1 = \frac{36}{3} - \frac{36}{11}, \quad a_2 = \frac{36}{11} - \frac{36}{19}, \quad a_3 = \frac{36}{19} - \frac{36}{27}, \quad a_4 = \frac{36}{27} - \frac{36}{35}, \dots$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{36}{3} - \frac{36}{11} + \frac{36}{11} - \frac{36}{19} + \frac{36}{19} - \frac{36}{27} + \dots + \frac{36}{8n-5} - \frac{36}{8n+3} = \\ &= \frac{36}{3} - \frac{36}{8n+3} = 12 - \frac{36}{8n+3}. \end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(12 - \frac{36}{8n+3} \right) = 12,$$

то ряд сходится.

Ответ: $S_n = 12 - \frac{36}{8n+3}$; $S = 12$.

Задача 14. Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{n^{11}+5} \operatorname{arctg} \frac{n+3}{n^4+4}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{n^{17}+4} \arcsin \frac{n^2+1}{n^6+5}$.

Решение. Для исследования данных рядов используем второй (предельный) признак сравнения.

а) Выпишем общий член ряда

$$a_n = \sqrt[4]{n^{11}+5} \operatorname{arctg} \frac{n+3}{n^4+4}.$$

Очевидно, что многочлен $n^{11}+5 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, следовательно

но $n^{11}+5 : n^{11}$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $\sqrt[4]{n^{11}+5} : \sqrt[4]{n^{11}} = n^{\frac{11}{4}}$. Вме-

стем с этим нетрудно доказать, что $\frac{n+3}{n^4+4} : \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3} \textcircled{R} 0$. Тогда

$$\operatorname{arctg} \frac{n+3}{n^4+4} : \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3} : \frac{1}{n^3}.$$

Замена в выражении a_n сомножителей на эквивалентные даст

новое выражение $b_n = n^{\frac{11}{4}} \cdot \frac{1}{n^3} = n^{-\frac{1}{4}}$. Полученную формулу используем для построения нового ряда для сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}.$$

Это общий гармонический ряд (или ряд Дирихле) с параметром $\alpha = \frac{1}{4} < 1$. Как известно, этот ряд расходится, а значит, по предельному признаку сравнения расходится и исходный ряд.

б) Выпишем общий член ряда

$$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{n^{17} + 4} \arcsin \frac{n^2 + 1}{n^6 + 5}.$$

Очевидно, что многочлен $n^{17} + 4 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, следовательно, но $n^{17} + 4 : n^{17}$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $\sqrt[7]{n^{17} + 4} : \sqrt[7]{n^{17}} = n^{\frac{17}{7}}$. Вместе с этим нетрудно доказать, что $\frac{n^2 + 1}{n^6 + 5} : \frac{n^2}{n^6} = \frac{1}{n^4} \rightarrow 0$. Тогда

$$\arcsin \frac{n^2 + 1}{n^6 + 5} : \arcsin \frac{1}{n^4} : \frac{1}{n^4}.$$

Замена в выражении a_n сомножителей на эквивалентные даст новое выражение $b_n = n^{\frac{17}{7}} \cdot \frac{1}{n^4} = n^{-\frac{11}{7}}$. Полученную формулу используем для построения нового ряда для сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{11}{7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{11}{7}}}.$$

Это общий гармонический ряд (или ряд Дирихле) с параметром $\alpha = \frac{11}{7} > 1$. Как известно, этот ряд сходится, а значит, по пре-

дельному признаку сравнения сходится и исходный ряд.

Ответ: а) расходится; б) сходится.

Задача 15. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6x+5)^n}{11n-12}.$$

Решение. Полагая

$$a_n = \left| \frac{(6x+5)^n}{11n-12} \right|,$$

исследуем положительный ряд с общим членом a_n с помощью радикального признака Коши:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(6x+5)^n}{11n-12} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|6x+5|}{\sqrt[n]{|11n-12|}} = \\ &= |6x+5| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|11n-12|}} = |6x+5| \lim_{n \rightarrow \infty} |11n-12|^{-\frac{1}{n}} = \\ &= |6x+5| \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln |11n-12|} = |6x+5| \cdot e^0 = |6x+5|. \end{aligned}$$

Данный ряд при $k = |6x+5| < 1$ сходится, при $k = |6x+5| > 1$ – расходится, а при $k = |6x+5| = 1$ проведем дополнительные исследования.

а) $|6x+5| < 1;$

$$-1 < 6x+5 < 1 \Rightarrow -6 < 6x < -4 \Rightarrow$$

$$-1 < x < -\frac{2}{3} \Rightarrow x \in \left(-1, -\frac{2}{3} \right).$$

б) $|6x+5| > 1;$

$$6x+5 < -1 \Rightarrow 6x < -6 \Rightarrow x < -1,$$

$$6x + 5 > 1 \Rightarrow 6x > -4 \Rightarrow x > -\frac{2}{3},$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

$$\text{в) } |6x + 5| = 1 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_1 = -\frac{2}{3}.$$

Рассмотрим $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6x+5)^n}{11n-12} \bigg|_{x_1=-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6+5)^n}{11n-12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{11n-12}.$$

Этот знакопеременный числовой ряд сходится согласно признаку Лейбница.

Рассмотрим $x = -\frac{2}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6x+5)^n}{11n-12} \bigg|_{x_1=-\frac{2}{3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4+5)^n}{11n-12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{11n-12}.$$

Этот числовой ряд расходится согласно второму признаку сравнения (сравниваемый ряд – гармонический ряд).

Ответ: $-1 \leq x < -\frac{2}{3}$.

Задача 16. С помощью разложения простейших элементарных функций в ряд Маклорена вычислить приближенное значение интеграла с точностью $\varepsilon = 0,000\,001$:

$$\int_0^{0,9} \frac{e^{-x/3} - 1 + x/3}{x^2} dx.$$

Решение. Используем разложение показательной функции e^t в ряд Маклорена:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Подставив сюда вместо t выражение $-\frac{x}{3}$, получим:

$$e^{-\frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x}{3}\right)^n}{n!} = 1 - \frac{x}{1! \cdot 3} + \frac{x^2}{2! \cdot 3^2} - \frac{x^3}{3! \cdot 3^3} + \dots$$

Тогда

$$e^{\frac{x}{3}} - 1 + \frac{x}{3} = \frac{x^2}{2! \cdot 3^2} - \frac{x^3}{3! \cdot 3^3} + \frac{x^4}{4! \cdot 3^4} - \frac{x^5}{5! \cdot 3^5} + \dots,$$

$$\frac{e^{-x/3} - 1 + x/3}{x^2} = \frac{1}{2! \cdot 3^2} - \frac{x}{3! \cdot 3^3} + \frac{x^2}{4! \cdot 3^4} - \frac{x^3}{5! \cdot 3^5} + \frac{x^4}{6! \cdot 3^6} - \dots$$

Применяя почленное интегрирование, находим

$$\int_0^{0,9} \frac{e^{-x/3} - 1 + x/3}{x^2} dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2! \cdot 3^2 \cdot 1} - \frac{x^2}{3! \cdot 3^3 \cdot 2} + \frac{x^3}{4! \cdot 3^4 \cdot 3} - \frac{x^4}{5! \cdot 3^5 \cdot 4} + \frac{x^5}{6! \cdot 3^6 \cdot 5} - \dots \right) \Bigg|_0^{0,9} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n! \cdot 3^n \cdot (n-1)} \Bigg|_0^{0,9} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}}{n! \cdot 3^n \cdot (n-1)} =$$

$$= \frac{9}{2! \cdot 3^2 \cdot 1 \cdot 10} - \frac{9^2}{3! \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 10^2} + \frac{9^3}{4! \cdot 3^4 \cdot 3 \cdot 10^3} -$$

$$-\frac{9^4}{5! \cdot 3^5 \cdot 4 \cdot 10^4} + \frac{9^5}{6! \cdot 3^6 \cdot 4 \cdot 10^5} - \dots$$

Так как

$$a_1 = \frac{9}{2! \cdot 3^2 \cdot 1 \cdot 10} \approx 0,050\,000\,00, \quad |a_1| \geq \varepsilon,$$

$$a_2 = -\frac{9^2}{3! \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 10^2} \approx -0,002\,500\,00, \quad |a_2| \geq \varepsilon,$$

$$a_3 = \frac{9^3}{4! \cdot 3^4 \cdot 3 \cdot 10^3} \approx 0,000\,125\,00, \quad |a_3| \geq \varepsilon,$$

$$a_4 = -\frac{9^4}{5! \cdot 3^5 \cdot 4 \cdot 10^4} \approx -0,000\,005\,63, \quad |a_4| \geq \varepsilon,$$

$$a_5 = \frac{9^5}{6! \cdot 3^6 \cdot 4 \cdot 10^5} \approx 0,000\,000\,225, \quad |a_5| < \varepsilon,$$

то для достижения требуемой точности достаточно вычисление суммы первых четырех членов знакочередующего ряда, так как абсолютное значение пятого члена меньше заданной точности:

$$\begin{aligned} S_4 &\approx 0,050\,000\,00 - 0,002\,500\,00 + \\ &+ 0,000\,125\,00 - 0,000\,005\,63 \approx 0,047\,619 \end{aligned}$$

Ответ: $S_4 = 0,047\,619$.

**10. Образец решения задач и их оформления по теме:
«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»**

Задача 17. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(x^2 + 1)dy - 2x^3(y^2 + 1)dx = 0.$$

Решение. Разделив обе части данного уравнения на $(x^2 + 1)(y^2 + 1)$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{(x^2 + 1)dy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} - \frac{2x^3(y^2 + 1)dx}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} = 0,$$

$$\frac{dy}{y^2 + 1} - \frac{2x^3 dx}{x^2 + 1} = 0.$$

Интегрируем полученное уравнение:

$$\int \frac{dy}{y^2 + 1} - \int \frac{2x^3 dx}{x^2 + 1} = C; \quad (*)$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \operatorname{arctg} y,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 dx}{x^2 + 1} &= \int \frac{x^2 \cdot 2x dx}{x^2 + 1} = \int \frac{x^2 d(x^2)}{x^2 + 1} = \int \frac{(x^2 + 1 - 1)d(x^2)}{x^2 + 1} = \\ &= \int \frac{(x^2 + 1)d(x^2)}{x^2 + 1} - \int \frac{d(x^2)}{x^2 + 1} = \\ &= \int d(x^2) - \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x^2 - \ln(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Подставим полученные первообразные в (*) и получим искомым общий интеграл:

$$\operatorname{arctg} y - x^2 + \ln(x^2 + 1) = C.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} y + \ln(x^2 + 1) = x^2 + C$ – общий интеграл

Задача № 18. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

$$y dx - (5x + 2y^3) dy = 0; \quad x(1) = 0.$$

Решение. Записав уравнение в виде

$$\frac{dx}{dy} - \frac{5x + 2y^3}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad x' - \frac{5}{y}x = 2y^2,$$

отметим, что оно является линейным дифференциальным уравнением относительно неизвестной функции $x = x(y)$.

Вводим новые неизвестные функции $u = u(y)$ и $v = v(y)$:

$$x = uv \quad \Rightarrow \quad x' = u'v + uv'.$$

Подставим эти выражения в данное уравнение:

$$u'v + uv' - \frac{5}{y}uv = 2y^2,$$

$$u'v + u \cdot \left(v' - \frac{5v}{y} \right) = 2y^2. \quad (*)$$

$$a) \quad v' - \frac{5v}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dy} = \frac{5v}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{5dy}{y} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{5dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = 5\ln|y| \quad \Rightarrow \quad v = y^5;$$

$$б) \quad u'y^5 = 2y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = \frac{2y^2}{y^5} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{2dy}{y^3} \quad \Rightarrow$$

$$\int du = C + \int \frac{2dy}{y^3} \quad \Rightarrow \quad u = C - \frac{1}{y^2};$$

в) $x = uv = \left(C - \frac{1}{y^2} \right) y^5 = Cy^5 - y^3$ – общее решение.

Найдем искомое частное решение. Для этого в общее решение положим $y=1$, $x=0$ и определим искомое значение постоянной C :

$$x(1) = C \cdot 1^5 - 1^3 = C - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Подставим в общее решение значение $C = 1$ и получим искомое частное решение.

Ответ: а) $x = Cy^5 - y^3$ – общее решение,

б) $x = y^5 - y^3$ – частное решение.

Задача 19. Решить систему линейных дифференциальных уравнений и найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y - 3t, \\ y' = -12x - 7y - 11, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -1, \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

Решение. а) Найдем общее решение неоднородной системы. Вначале найдем общее решение соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = -12x - 7y. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим y через x , x' и найдем y' :

$$y = \frac{1}{2}x' - \frac{3}{2}x, \quad (1)$$

$$y' = \frac{1}{2}x'' - \frac{3}{2}x'.$$

Подставим y и y' во второе уравнение системы:

$$\frac{1}{2}x'' - \frac{3}{2}x' = -12x - 7\left(\frac{1}{2}x' - \frac{3}{2}x\right),$$

$$\frac{1}{2}x'' - \frac{3}{2}x' + \frac{7}{2}x' + 12x - \frac{21}{2}x = 0,$$

$$\frac{1}{2}x'' + 2x' + \frac{3}{2}x = 0,$$

$$x'' + 4x' + 3x = 0. \quad (2)$$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0;$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 = 2^2,$$

$$\lambda_1 = \frac{-4-2}{2} = -3, \quad \lambda_2 = \frac{-4+2}{2} = -1.$$

Общее решение уравнения (2):

$$x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t}. \quad (3)$$

Найдем производную этой функции:

$$x' = -3C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-t}.$$

Подставим значения x и x' в (1):

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \left(-3C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-t} \right) - \frac{3}{2} \left(C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t} \right) = \\ &= -\frac{3}{2} C_1 e^{-3t} - \frac{1}{2} C_2 e^{-t} - \frac{3}{2} C_1 e^{-3t} - \frac{3}{2} C_2 e^{-t} = \end{aligned}$$

$$= -3C_1e^{-3t} - 2C_2e^{-t}.$$

Общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x_0 = C_1e^{-3t} + C_2e^{-t}, \\ y_0 = -3C_1e^{-3t} - 2C_2e^{-t}. \end{cases}$$

Найдем теперь частное решение неоднородной системы. Его будем искать в виде многочлена первой степени:

$$\begin{cases} x = A_1t + B_1, \\ y = A_2t + B_2. \end{cases}$$

Найдем производные этих функций, подставим в неоднородную систему и найдем решения полученных систем:

$$\begin{cases} x' = A_1, \\ y' = A_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = 3(A_1t + B_1) + 2(A_2t + B_2) - 3t, \\ A_2 = -12(A_1t + B_1) - 7(A_2t + B_2) - 11, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3A_1 + 2A_2 - 3)t + (3B_1 + 2B_2 - A_1) = 0, \\ (-12A_1 - 7A_2)t + (-12B_1 - 7B_2 - A_2 - 11) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3A_1 + 2A_2 - 3 = 0, \\ -12A_1 - 7A_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -7, \\ A_2 = 12, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3B_1 + 2B_2 - A_1 = 0, \\ -12B_1 - 7B_2 - A_2 - 11 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 1, \\ B_2 = -5. \end{cases}$$

Искомое частное решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} \bar{x} = -7t + 1, \\ \bar{y} = 12t - 5. \end{cases}$$

Общее решение неоднородной системы получается из формулы:

$$\begin{cases} x = x_0 + \bar{x}, \\ y = y_0 + \bar{y}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-t} - 7t + 1, \\ y = -3C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{-t} + 12t - 5. \end{cases}$$

б) Найдем частное решение неоднородной системы, удовлетворяющее начальным условиям. Для этого в найденное общее решение положим $t = 0$, $x = -1$, $y = -2$ и определим искомые значения постоянных C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} -1 = C_1 - C_2 + 1, \\ -2 = -3C_1 + 2C_2 - 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 3. \end{cases}$$

Ответ: а)
$$\begin{cases} x = C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-t} - 7t + 1, \\ y = -3C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{-t} + 12t - 5, \end{cases}$$

á)
$$\begin{cases} x = e^{-3t} - 3e^{-t} - 7t + 1, \\ y = -3e^{-3t} + 6e^{-t} + 12t - 5. \end{cases}$$

Задача 20. Проинтегрировать приближенно с помощью ряда Маклорена данную задачу Коши, взяв пять первых, отличных от нуля, членов разложения:

$$y' = (7y + 10x - 6)y + x^2 - 6x - 1; \quad y(0) = 0.$$

Решение. Пусть $y = y(x)$ – искомое решение. Тогда ряд Маклорена этой функции имеет вид:

$$y = y(x) = \sum \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Найдем пять первых, отличных от нуля, производных функции $y = y(x)$.

Значение $y'(0)$ найдем исходя из данных задачи:

$$y'(0) = (7y(0) + 10 \cdot 0 - 6) \cdot 0 + 0^2 - 6 \cdot 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

Дифференцируя данное уравнение, последовательно получаем:

$$y'' = (14y + 10x - 6)y' + 10y + 2x - 6;$$

$$y''(0) = 0,$$

$$y''' = (14y + 10x - 6)y'' + 14(y')^2 + 20y' + 2;$$

$$y'''(0) = -4 \neq 0,$$

$$y^{IV} = (14y + 10x - 6)y''' + (42y' + 30)y'';$$

$$y^{IV}(0) = 24 \neq 0,$$

$$y^V = (14y + 10x - 6)y^{IV} + (56y' + 40)y''' + 42(y'')^2;$$

$$y^V(0) = -80 \neq 0,$$

$$y^{VI} = (14y + 10x - 6)y^V + (70y' + 50)y^{IV} + 140y''y''';$$

$$y^{VI}(0) = 0,$$

$$y^{VII} = (14y + 10x - 6)y^{VI} + (84y' + 60)y^V + 210y''y^{IV} + 140(y''')^2; \quad y^{VII}(0) = 4160 \neq 0.$$

Таким образом, найдены пять первых отличных от нуля производных искомого решения.

Ответ:
$$y = \frac{-1}{1!}x + \frac{-4}{3!}x^3 + \frac{24}{4!}x^4 + \frac{-80}{5!}x^5 + \frac{4160}{7!}x^7 + \dots$$

**11. Задания по контрольной работе:
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»**

Задача № 1. Вычислить предел:

Вариант № 1 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{7x^3 + 27x^2 + 24x - 4}{2x^3 + 3x^2 - 12x - 20}$	Вариант № 2 $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{4x^3 + 33x^2 + 72x + 16}{2x^3 + 15x^2 + 24x - 16}$
Вариант № 3 $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^3 + 26x^2 + 64x + 32}{5x^3 + 36x^2 + 48x - 64}$	Вариант № 4 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{8x^3 + 23x^2 - 4x - 36}{3x^3 + 8x^2 - 4x - 16}$
Вариант № 5 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^3 + 24x^2 + 9x - 54}{8x^3 + 45x^2 + 54x - 27}$	Вариант № 6 $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{4x^3 + 27x^2 + 24x - 80}{5x^3 + 42x^2 + 96x + 32}$
Вариант № 7 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^3 + 18x^2 + 12x - 8}{8x^3 + 33x^2 + 36x + 4}$	Вариант № 8 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{8x^3 + 39x^2 + 18x - 81}{5x^3 + 23x^2 + 3x - 63}$
Вариант № 9 $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{5x^3 + 42x^2 + 96x + 32}{3x^3 + 28x^2 + 80x + 64}$	Вариант № 10 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^3 + 9x^2 - 12x - 28}{9x^3 + 34x^2 + 28x - 8}$

Задача № 2. Вычислить предел:

Вариант № 1 $\lim_{x \rightarrow 7/8} \frac{8 - \sqrt{80x - 6}}{\sqrt{32x - 3} - \sqrt{24x + 4}}$	Вариант № 2 $\lim_{x \rightarrow 5/3} \frac{\sqrt{21x + 1} - \sqrt{18x + 6}}{\sqrt{57x + 5} - 10}$
Вариант № 3 $\lim_{x \rightarrow 5/6} \frac{\sqrt{24x - 4} - \sqrt{18x + 1}}{\sqrt{78x - 1} - 8}$	Вариант № 4 $\lim_{x \rightarrow 2/7} \frac{\sqrt{98x + 8} - 6}{\sqrt{35x - 1} - \sqrt{42x - 3}}$

Вариант № 5 $\lim_{x \rightarrow 9/2} \frac{\sqrt{24x-8} - \sqrt{22x+1}}{13 - \sqrt{40x-11}}$	Вариант № 6 $\lim_{x \rightarrow 6/5} \frac{\sqrt{20x+1} - \sqrt{15x+7}}{9 - \sqrt{70x-3}}$
Вариант № 7 $\lim_{x \rightarrow 5/4} \frac{\sqrt{24x+6} - \sqrt{20x+11}}{\sqrt{76x+5} - 10}$	Вариант № 8 $\lim_{x \rightarrow 7/9} \frac{\sqrt{27x-5} - \sqrt{18x+2}}{8 - \sqrt{72x+8}}$
Вариант № 9 $\lim_{x \rightarrow 3/8} \frac{\sqrt{96x-11} - 5}{\sqrt{48x-2} - \sqrt{40x+1}}$	Вариант № 10 $\lim_{x \rightarrow 8/3} \frac{\sqrt{15x-4} - \sqrt{12x+4}}{11 - \sqrt{45x+1}}$

Задача № 3. Вычислить предел:

Вариант № 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1 + \operatorname{tg} x^2)}{\cos 5x - \cos 9x}$	Вариант № 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 7x}{\sqrt[6]{1+5x} - 1}$
Вариант № 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{\sin 4x} - 1}{\operatorname{arctg} 6x}$	Вариант № 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 6x}{\log_3(1 + \sin 3x)}$
Вариант № 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^{4 \operatorname{tg} x} - 1}{\arcsin 5x}$	Вариант № 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{1+4x^2} - 1}{\cos 7x - \cos 9x}$
Вариант № 7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{5 \sin x} - 1}{\operatorname{arctg} 4x}$	Вариант № 8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+8x^2} - 1}{\cos 9x - \cos x}$
Вариант № 9 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 7x}{\log_4(1 + \operatorname{tg} 4x)}$	Вариант № 10 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos 4x}{\sqrt[4]{1+9x^2} - 1}$

Задача № 4. Вычислить предел:

Вариант № 1 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{11x^2 - 38x + 45} - \sqrt{11x^2 + 38x - 45} \right)$
Вариант № 2 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{29x^2 + 33x - 41} - \sqrt{29x^2 - 33x + 41} \right)$
Вариант № 3 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{29x^2 + 37x - 43} - \sqrt{29x^2 - 37x + 43} \right)$
Вариант № 4 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{19x^2 - 30x + 46} - \sqrt{19x^2 + 30x - 46} \right)$
Вариант № 5 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{14x^2 - 35x + 49} - \sqrt{14x^2 + 35x - 49} \right)$
Вариант № 6 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{23x^2 + 39x - 45} - \sqrt{23x^2 - 39x + 45} \right)$
Вариант № 7 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{26x^2 + 34x - 47} - \sqrt{26x^2 - 34x + 47} \right)$
Вариант № 8 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{15x^2 - 38x + 42} - \sqrt{15x^2 + 38x - 42} \right)$
Вариант № 9 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{13x^2 - 36x + 47} - \sqrt{13x^2 + 36x - 47} \right)$
Вариант № 10 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{26x^2 + 36x - 44} - \sqrt{26x^2 - 36x + 44} \right)$

Задача № 5. Найти производную функции:

Вариант № 1 $y = 3x - \sqrt{4 - 9x^2} \cdot \arcsin 1,5x$
Вариант № 2 $y = 6 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{8-5x}{5x-2}} + \sqrt{(5x-2)(8-5x)}$
Вариант № 3 $y = \sqrt{4 - 25x^2} + 2 \arccos 2,5x.$
Вариант № 4 $y = \sqrt{9x^2 + 64} - 8 \ln \frac{8 + \sqrt{9x^2 + 64}}{2x}$
Вариант № 5 $y = \ln \frac{2+7x}{2-7x} - 2 \operatorname{arctg} 3,5x$
Вариант № 6 $y = \sqrt{25 - 9x^2} \cdot \arccos 0,6x + 3x$
Вариант № 7 $y = 6 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4x-3}{9-4x}} + \sqrt{(4x-3)(9-4x)}$
Вариант № 8 $y = 5 \arcsin 0,8x - \sqrt{25 - 16x^2}$
Вариант № 9 $y = 5 \ln \frac{8x}{5 + \sqrt{9x^2 + 25}} + \sqrt{9x^2 + 25}$
Вариант № 10 $y = 2 \operatorname{arctg} \frac{1,2}{x} + \ln \frac{6-5x}{6+5x}$

Задача № 6. Составить уравнения касательных и нормалей к параболе (p) в точках ее пересечения с прямой (l) :

Вариант № 1 $(p): y = x^2 + 12x + 21; (l): y = 3x + 7$
Вариант № 2 $(p): y = x^2 + 10x + 18; (l): y = 2x + 11$
Вариант № 3 $(p): y = x^2 + 8x + 11; (l): y = -x - 3$
Вариант № 4 $(p): y = x^2 + 6x + 4; (l): y = 4x + 12$
Вариант № 5 $(p): y = x^2 + 4x - 3; (l): y = -3x - 9$
Вариант № 6 $(p): y = x^2 + 2x - 7; (l): y = 2x - 3$
Вариант № 7 $(p): y = x^2 - 2x - 4; (l): y = 3x + 2$
Вариант № 8 $(p): y = x^2 - 4x + 1; (l): y = -3x + 7$
Вариант № 9 $(p): y = x^2 - 6x + 1; (l): y = -2x + 1$
Вариант № 10 $(p): y = x^2 - 8x + 3; (l): y = 4x - 24$

Задача № 7. С помощью дифференциала функции вычислить приближенное значение данного корня. Вычислить этот же ко-

рень с помощью калькулятора и оценить в процентах относительную погрешность вычисления:

Вариант № 1 $\sqrt[5]{34,72}$	Вариант № 2 $\sqrt[6]{67,072}$
Вариант № 3 $\sqrt[7]{133,376}$	Вариант № 4 $\sqrt[3]{28,107}$
Вариант № 5 $\sqrt[4]{85,644}$	Вариант № 6 $\sqrt[5]{251,505}$
Вариант № 7 $\sqrt[3]{65,776}$	Вариант № 8 $\sqrt[4]{265,216}$
Вариант № 9 $\sqrt[3]{127,85}$	Вариант № 10 $\sqrt[4]{638,5}$

Задача № 8. Найти значение выражения $2y' + 3y'' - 5y'''$, если:

Вариант № 1 $y = (2x + 4)\sin x + (-3x + 5)\cos x$
Вариант № 2 $y = (3x - 5)\sin x + (4x + 2)\cos x$
Вариант № 3 $y = (4x + 5)\sin x + (-2x + 7)\cos x$
Вариант № 4 $y = (5x + 2)\sin x + (-3x + 7)\cos x$
Вариант № 5 $y = (2x + 5)\sin x + (-2x + 7)\cos x$
Вариант № 6 $y = (3x + 5)\sin x + (-4x + 5)\cos x$

Вариант № 7 $y = (4x + 2)\sin x + (-3x + 5)\cos x$
Вариант № 8 $y = (5x - 3)\sin x + (4x + 7)\cos x$
Вариант № 9 $y = (2x - 3)\sin x + (4x + 5)\cos x$
Вариант № 10 $y = (3x - 7)\sin x + (5x + 4)\cos x$

Задача № 9. Вычислить неопределенный интеграл:

Вариант 1 $\int x^8 e^{\sqrt{7x^9-4}} dx$	Вариант 2 $\int x^4 \sin \sqrt{9x^5-7} dx$
Вариант 3 $\int x^6 \cos \sqrt{3x^7-2} dx$	Вариант 4 $\int x^6 e^{\sqrt{8-5x^7}} dx$
Вариант 5 $\int x^2 \sin \sqrt{7x^3-2} dx$	Вариант 6 $\int x^2 \cos \sqrt{2-5x^3} dx$
Вариант 7 $\int x^4 e^{\sqrt{3x^5-9}} dx$	Вариант 8 $\int x^6 \sin \sqrt{9x^7-4} dx$
Вариант 9 $\int x^8 \cos \sqrt{3-7x^9} dx$	Вариант 10 $\int x^2 e^{\sqrt{9-7x^3}} dx$

Задача № 10. Вычислить неопределенный интеграл:

Вариант № 1 $\int \frac{(16 \operatorname{tg} x - 18) dx}{8 \sin^2 x - 10 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x}$

Вариант № 2 $\int \frac{(16 \operatorname{tg} x + 38) dx}{11 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 3}$
Вариант № 3 $\int \frac{(12 \operatorname{tg} x - 17) dx}{12 + \sin x \cos x - 13 \cos^2 x}$
Вариант № 4 $\int \frac{(24 \operatorname{ctg} x - 34) dx}{-3 \sin^2 x + 10 \sin x \cos x + 8 \cos^2 x}$
Вариант № 5 $\int \frac{(24 \operatorname{ctg} x + 27) dx}{-1 - \sin x \cos x + 13 \cos^2 x}$
Вариант № 6 $\int \frac{(8 \operatorname{tg} x + 30) dx}{8 \sin^2 x - 10 \sin x \cos x - 3}$
Вариант № 7 $\int \frac{(8 \operatorname{tg} x - 34) dx}{8 + 2 \sin x \cos x - 11 \cos^2 x}$
Вариант № 8 $\int \frac{(12 \operatorname{ctg} x - 43) dx}{-3 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 12 \cos^2 x}$
Вариант № 9 $\int \frac{(9 \operatorname{tg} x + 42) dx}{9 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 8 \cos^2 x}$
Вариант № 10 $\int \frac{(18 \operatorname{ctg} x + 31) dx}{-4 - 5 \sin x \cos x + 10 \cos^2 x}$

Задача № 11. Вычислить определенный интеграл:

Вариант № 1 $\int \frac{(4x^2 - 28x - 52)dx}{(x^2 + 16)(2x - 1)}$	Вариант № 2 $\int \frac{(32x^2 - 54x + 84)dx}{(x^2 + 9)(4x - 1)}$
Вариант № 3 $\int \frac{(18x^2 - 10x - 30)dx}{(x^2 + 4)(3x + 1)}$	Вариант № 4 $\int \frac{(24x^2 - 54x + 76)dx}{(x^2 + 16)(3x + 1)}$
Вариант № 5 $\int \frac{(8x^2 - 6x - 72)dx}{(x^2 + 9)(2x + 3)}$	Вариант № 6 $\int \frac{(14x^2 - 18x - 20)dx}{(x^2 + 4)(2x - 1)}$
Вариант № 7 $\int \frac{(24x^2 - 6x + 56)dx}{(x^2 + 16)(2x + 1)}$	Вариант № 8 $\int \frac{(12x^2 - 18x - 20)dx}{(x^2 + 4)(3x - 1)}$
Вариант № 9 $\int \frac{(16x^2 - 30x + 99)dx}{(x^2 + 9)(2x - 3)}$	Вариант № 10 $\int \frac{(12x^2 - 8x + 10)dx}{(x^2 + 4)(2x + 1)}$

Задача № 12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

Вариант 1 $y = 2\sqrt{x+8}, \quad y = 8, \quad x = -7$	Вариант 2 $y = \sqrt{7-x}, \quad y = 4, \quad x = 3$
Вариант 3 $y = 2\sqrt{8-x}, \quad y = 8, \quad x = 4$	Вариант 4 $y = \sqrt{x+6}, \quad y = 4, \quad x = -6$

Вариант 5 $y = 2\sqrt{x+9}, \quad y = 8, \quad x = -9$	Вариант 6 $y = \sqrt{8-x}, \quad y = 4, \quad x = 7$
Вариант 7 $y = 2\sqrt{8-x}, \quad y = 8, \quad x = 4$	Вариант 8 $y = \sqrt{x+8}, \quad y = 4, \quad x = -4$
Вариант 9 $y = 2\sqrt{x+10}, \quad y = 8, \quad x = -6$	Вариант 10 $y = \sqrt{9-x}, \quad y = 4, \quad x = 9$

Задача 13. Для данного ряда: 1) найти формулу n -й частичной суммы S_n ; 2) найти сумму S :

Вариант 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{360}{81n^2 + 9n - 20}$	Вариант 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{280}{25n^2 + 45n + 14}$
Вариант 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{264}{64n^2 - 48n - 7}$	Вариант 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{273}{49n^2 - 7n - 12}$
Вариант 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{126}{4n^2 + 32n + 63}$	Вариант 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{378}{81n^2 + 45n - 14}$
Вариант 7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{180}{16n^2 + 24n + 5}$	Вариант 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{300}{25n^2 + 35n + 6}$
Вариант 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{198}{36n^2 + 96n + 55}$	Вариант 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{84}{9n^2 + 3n - 2}$

Задача 14. Исследовать сходимость ряда:

Вариант 1	
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{n^4 + 9} \left(1 - \cos \frac{n^6 + 6}{n^7 + 3} \right);$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2 + 1} \sin \frac{n^3 + 7}{n^4 + 6}$
Вариант 2	
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{n^{10} + 4} \operatorname{tg} \frac{n^5 + 9}{n^9 + 7};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{n^{16} + 8} \ln \frac{n^4 + 7}{n^4 + 2}$
Вариант 3	
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{n^3 + 9} \arcsin \frac{n^6 + 5}{n^7 + 4};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{n^8 + 1} \operatorname{arctg} \frac{n^2 + 7}{n^5 + 3}$
Вариант 4	
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[8]{n^6 + 9} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 2};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{n^9 + 8} \operatorname{tg} \frac{n^5 + 4}{n^7 + 5}$
Вариант 5	
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[8]{n^{15} + 6} \sin \frac{n^5 + 8}{n^7 + 4};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{n^6 + 3} \arcsin \frac{n + 4}{n^3 + 8}$
Вариант 6	
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{n^{18} + 5} \operatorname{arctg} \frac{n^3 + 1}{n^7 + 9};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[6]{n^{19} + 5} \left(1 - \cos \frac{n^2 + 7}{n^4 + 6} \right)$
Вариант 7	
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[6]{n^{11} + 1} \left(1 - \cos \frac{n^3 + 3}{n^4 + 8} \right);$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[8]{n^{17} + 1} \ln \frac{n^4 + 9}{n^4 + 2}$
Вариант 8	
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{n^{10} + 6} \operatorname{tg} \frac{n^5 + 1}{n^8 + 7};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{n^{20} + 3} \sin \frac{n^3 + 9}{n^6 + 2}$

Вариант 9	
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[8]{n^{20}+1} \arcsin \frac{n+5}{n^5+6};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{n^{15}+3} \ln \frac{n^3+6}{n^3+1}$
Вариант 10	
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{n^7+4} \ln \frac{n^2+5}{n^2+2};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{n^6+5} \sin \frac{n^4+8}{n^7+3}$

Задача 15. Найти область сходимости ряда:

Вариант 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(11-5x)^n}{5n-6}$	Вариант 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-8)^n}{4+9n}$
Вариант 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(9-4n)^n}{7-8n}$	Вариант 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x+9)^n}{8n+3}$
Вариант 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7-3x)^n}{6n-7}$	Вариант 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+7)^n}{9+5n}$
Вариант 7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(9-5x)^n}{2-7n}$	Вариант 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-7)^n}{3n+4}$
Вариант 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7-4x)^n}{5n-2}$	Вариант 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+9)^n}{4+5n}$

Задача 16. С помощью разложения простейших элементарных функций в ряд Маклорена вычислить приближенное значение интеграла с точностью $\varepsilon = 0,000\ 01$:

Вариант 1 $\int_0^4 \frac{x/2 - \sin(x/2)}{x} dx$	Вариант 2 $\int_0^{0,6} \frac{x/3 - \ln(1+x/3)}{x^2} dx$
Вариант 3 $\int_0^4 \frac{1 - \cos(x/2)}{x^2} dx$	Вариант 4 $\int_0^1 \frac{x/2 - \operatorname{arctg}(x/2)}{x^3} dx$
Вариант 5 $\int_0^9 \frac{x/3 - \sin(x/3)}{x^3} dx$	Вариант 6 $\int_0^{0,4} \frac{x/2 - \ln(1+x/2)}{x^2} dx$
Вариант 7 $\int_0^6 \frac{1 - \cos(x/3)}{x^2} dx$	Вариант 8 $\int_0^1 \frac{x/2 - \operatorname{arctg}(x/2)}{x^2} dx$
Вариант 9 $\int_0^{0,6} \frac{x/3 - \ln(1+x/3)}{x} dx$	Вариант 10 $\int_0^4 \frac{x/2 - \sin(x/2)}{x^2} dx$

Задача № 17. Найти общее решение дифференциального уравнения:

Вариант 1 $(x^2 + 1)dy - (y^2 + 1)(2x^2 + 1)dx = 0$
Вариант 2 $(x^3 + x)dy - (y^2 + 1)(x^2 - x + 1)dx = 0$

Вариант 3 $(x^3 y + xy)dy - (y^2 + 1)dx = 0$
Вариант 4 $(x^3 + x)ydy + (y^2 + 1)dx = 0$
Вариант 5 $(x^4 + x^2)dy + (y^2 + 1)dx = 0$
Вариант 6 $(x^2 + x)(y^2 + 2)dy + (x^2 + 2)(y^3 + y)dx = 0$
Вариант 7 $(x^2 y + y)dy + (y^2 + 1)dx = 0$
Вариант 8 $(x^2 y + y)dy - (y^2 - y)dx = 0$
Вариант 9 $(y^2 + 1)dy + (x^2 + x)ydx = 0$
Вариант 10 $(x^2 y^2 - y^2)dy + (xy^3 + x)dx = 0$

Задача № 18. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

Вариант 1 $(1 - 2xy)dy - (y^2 - y)dx = 0; \quad y(0) = 1$
Вариант 2 $(x + y^2)dy - ydx = 0; \quad y(0) = 1$

Вариант 3 $(x+1)dy + (y - x^2 - x^3)dx = 0; \quad y(0) = 0$
Вариант 4 $(x^2 + 1)dy + \left((x^2 + 1)^2 - 2xy \right)dx = 0; \quad y(0) = 0$
Вариант 5 $(1 - x^2)dy + (xy - 1)dx = 0; \quad y(0) = 1$
Вариант 6 $(x^2 + 1)dy + (4xy + 3)dx = 0; \quad y(0) = 0$
Вариант 7 $x dy - 2(y + x^4)dx = 0; \quad y(1) = 0$
Вариант 8 $x^2 dy + (xy + 1)dx = 0; \quad y(1) = 0$
Вариант 9 $(4y^3 + 3y^2 - x)dy - ydx = 0; \quad y(2) = 1$
Вариант 10 $(3x - y^2)dy - ydx = 0; \quad y(0) = 1$

Задача 19. Решить систему линейных дифференциальных уравнений и найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

Вариант 1 $\begin{cases} x' = x + 4y - 4, \\ y' = -2x + 7y + 15t, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 9, \\ y(0) = 3. \end{cases}$
--

Вариант 2 $\begin{cases} x' = -x + 6y - 10t, \\ y' = -3x + 8y - 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 8, \\ y(0) = 5. \end{cases}$
Вариант 3 $\begin{cases} x' = -7x + 4y + 2, \\ y' = -2x - y + 15t, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
Вариант 4 $\begin{cases} x' = -4x - 6y - 2, \\ y' = 3x + 5y - 4t, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 6, \\ y(0) = -1. \end{cases}$
Вариант 5 $\begin{cases} x' = 7x + 8y + 6t, \\ y' = -4x - 5y + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 9, \\ y(0) = -6. \end{cases}$
Вариант 6 $\begin{cases} x' = 5x + 8y + 1, \\ y' = -4x - 7y - 3t, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 9, \\ y(0) = -3. \end{cases}$
Вариант 7 $\begin{cases} x' = -5x - 6y + 2t, \\ y' = 3x + 4y + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 11, \\ y(0) = -6. \end{cases}$
Вариант 8 $\begin{cases} x' = -5x - 3y + 2, \\ y' = 6x + 4y - 4t, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 3, \\ y(0) = -4. \end{cases}$
Вариант 9 $\begin{cases} x' = 7x + 12y - 3t, \\ y' = -2x - 3y + 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -4, \\ y(0) = 2. \end{cases}$
Вариант 10 $\begin{cases} x' = 8x - 6y - 8t, \\ y' = 4x - 2y - 6, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 8, \\ y(0) = 8. \end{cases}$

Задача 20. Проинтегрировать приближенно с помощью ряда Маклорена данную задачу Коши, взяв пять первых, отличных от нуля, членов разложения:

Вариант 1 $y' = (4y + 7x - 3)y + x^2 - 3x - 1; \quad y(0) = 0$
Вариант 2 $y' = (4y - x - 5)y + 2x^2 + x + 1; \quad y(0) = 1$
Вариант 3 $y' = (4y + 7x + 9)y - x^2 + 18x - 2; \quad y(0) = 0$
Вариант 4 $y' = (5y - 9x + 1)y - 2x^2 - 9x + 4; \quad y(0) = -1$
Вариант 5 $y' = (2y + 8x + 6)y + x^2 + 18x - 3; \quad y(0) = 0$
Вариант 6 $y' = (2y - 9x - 1)y - x^2 - 18x - 10; \quad y(0) = -2$
Вариант 7 $y' = (3y + 9x + 9)y - x^2 + 27x - 3; \quad y(0) = 0$
Вариант 8 $y' = (3y - x - 9)y + 2x^2 + 2x + 6; \quad y(0) = 2$
Вариант 9 $y' = (2y + 7x + 3)y - x^2 + 6x - 2; \quad y(0) = 0$
Вариант 10 $y' = (2y - x + 9)y - 2x^2 - 3x + 9; \quad y(0) = -3$

12. Табличные пределы:

№	Пределы	№	Пределы
1a	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$	1б	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$
2a	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$	2б	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$
3a	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\arcsin \alpha}{\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$	3б	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\arcsin \alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$
4a	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \alpha}{\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$	4б	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\operatorname{arctg} \alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$
5a	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$	5б	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{e^{\alpha} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$
6a	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{b^{\alpha} - 1}{\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = \ln b$	6б	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{b^{\alpha} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{\ln b}$
7a	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$	7б	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$
8a	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\log_b(1+\alpha)}{\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{\ln b}$	8б	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\log_b(1+\alpha)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \ln b$
9a	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = m$	9б	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^m - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{m}$
10a	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1^{\infty}) = e$	10б	$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{\beta} = (1^{\infty}) = e$

13. Табличные производные

№	Производная функции $y = y(x)$	Производная сложной функции $y = y(u), \quad u = u(x)$
1	$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(u^a)' = au^{a-1} \cdot u'$
2	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
2*	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
3	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
3*	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
4	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
5	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
6	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
7	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
8	$(\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$(\sec u)' = \frac{\sin u}{\cos^2 u} \cdot u'$
9	$(\operatorname{cosec} x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{cosec} u)' = -\frac{\cos u}{\sin^2 u} \cdot u'$

10	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12	$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13	$(\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\text{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
14	$(\text{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$(\text{arcsec} u)' = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot u'$
15	$(\text{arccosec} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$(\text{arccosec} u)' = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot u'$
16	$(\text{sh} x)' = \text{ch} x$	$(\text{sh} u)' = \text{ch} u \cdot u'$
17	$(\text{ch} x)' = \text{sh} x$	$(\text{ch} u)' = \text{sh} u \cdot u'$
18	$(\text{th} x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$	$(\text{th} u)' = \frac{1}{\text{ch}^2 u} \cdot u'$
19	$(\text{cth} x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$	$(\text{cth} u)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 u} \cdot u'$

14. Табличные интегралы

№	Интегралы
1	$\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C, \quad \text{где } a \in \mathbb{R} \text{ и } a \neq -1$
2	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C \quad (\text{натуральный логарифм})$
3	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad \text{где } a \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ и } a \neq 1$
3'	$\int e^u du = e^u + C$
4	$\int \sin u du = -\cos u + C$
5	$\int \cos u du = \sin u + C$
6	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$
7	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
8	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{u}{a} + C, \\ -\arccos \frac{u}{a} + C, \end{cases} \quad \text{где } a \in \mathbb{R} \text{ и } a \neq 0$
8'	$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \begin{cases} \arcsin u + C \\ -\arccos u + C \end{cases}$

9	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + C, \end{cases} \quad \text{где } a \text{ ОЎ и } a \neq 0$
9'	$\int \frac{du}{1 + u^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} u + C \\ -\operatorname{arcctg} u + C \end{cases}$
10	$\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$
11	$\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$
12	$\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$
13	$\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$
14	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u - a}{u + a} \right + C, \quad \text{где } a \text{ ОЎ и } a \neq 0$ (высокий логарифм)
15	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C, \quad \text{где } a \text{ ОЎ и } a \neq 0$ (длинный логарифм)

15. Таблица эквивалентностей

1	$\sin a : a, \quad \text{если} \quad \alpha \rightarrow 0$
2	$\operatorname{tg} a : a, \quad \text{если} \quad \alpha \rightarrow 0$
3	$\arcsin a : a, \quad \text{если} \quad \alpha \rightarrow 0$
4	$\operatorname{arctg} a : a, \quad \text{если} \quad \alpha \rightarrow 0$
5	$e^a - 1 : a, \quad \text{если} \quad \alpha \rightarrow 0$
6	$b^a - 1 : a \ln b, \quad \text{если} \quad \alpha \rightarrow 0$
7	$\ln(1 + a) : a, \quad \text{если} \quad \alpha \rightarrow 0$
8	$\log_b(1 + a) : \frac{a}{\ln b}, \quad \text{если} \quad \alpha \rightarrow 0$
9	$(1 + a)^m - 1 : ma, \quad \text{если} \quad \alpha \rightarrow 0$
10	$c_0 n^k + c_1 n^{k-1} + \dots + c_k : c_0 n^k, \quad \text{если} \quad n \rightarrow \infty$

16. Справочный материал
Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Квадрат разности:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Разность квадратов:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Куб суммы:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Куб разности:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Разность кубов:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Сумма кубов:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Формулы для степеней и корней

Произведение степеней с одинаковыми основаниями:

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$$

Произведение степеней с одинаковыми показателями:

$$a^{\alpha} \cdot b^{\alpha} = (ab)^{\alpha}$$

Отношение степеней с одинаковыми основаниями:

$$\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$$

Отношение степеней с одинаковыми показателями:

$$\frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}$$

Возведение степени в степень:

$$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$$

Степень с отрицательным показателем:

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^{\alpha}}$$

Произведение корней одного порядка:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$$

Отношение корней одного порядка:

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

Замена корня степенью:

$$\sqrt[m]{a^{\alpha}} = a^{\frac{\alpha}{m}}$$

Формулы тригонометрии

Основное тождество тригонометрии:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Следствие из основного тождества:

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

Формула половинного аргумента:

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

Разность косинусов как произведение синусов:

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

Сумма синусов как произведение синуса на косинус:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

Разность синусов как произведение синуса на косинус:

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

Произведение синусов как разность косинусов:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

Произведение косинусов как сумма косинусов:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

Произведение синус на косинус как сумма косинусов:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

СОДЕРЖАНИЕ

Правила выполнения и оформления контрольных работ.....	3
1. Краткий теоретический материал по теме: « ПРЕДЕЛЫ ».....	4
2. Краткий теоретический материал по теме: « ПРОИЗВОДНЫЕ »	6
3. Краткий теоретический материал по теме: « ИНТЕГРАЛЫ »	9
4. Краткий теоретический материал к теме: « РЯДЫ »	25
5. Краткий теоретический материал по теме: « ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ».....	40
6. Образец решения задач и их оформления по теме: « ПРЕДЕЛЫ ».....	44
7. Образец решения задач и их оформления по теме: « ПРОИЗВОДНЫЕ ».....	49
8. Образец решения задач и их оформления по теме: « ИНТЕГРАЛЫ ».....	54
9. Образец решения задач и их оформления по теме: « РЯДЫ ».....	59
10. Образец решения задач и их оформления по теме: « ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ »	66
11. Задания по контрольной работе: « МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ».....	73
12. Табличные пределы.....	90
13. Табличные производные.....	91
14. Табличные интегралы.....	93
15. Таблица эквивалентностей.....	95
16. Справочный материал.....	96

Учебное издание

Назимов Акбар Багадунович
Степанова Наталия Вадимовна
Иконникова Светлана Александровна

Математика
Математический анализ

Учебное пособие

Редактор Л.А. Перерукова
Оригинал-макет подготовила Н.В. Подхомутова

Полписано в печать 05.03.2015. Формат 60 × 84/16. Печать офсетная.

Бумага офисная. Усл. печ. л. 6.25. Тираж 24 экз. Заказ № 76.

Отпечатано: РИО ВоГУ, 160000, г. Вологда, ул. С. Орлова, 6