

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ВОЛОГОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра физики

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАНИЙ  
В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ**

*Лабораторный практикум*

Факультеты: электроэнергетический, ЗДО

Специальности и направления все

Вологда  
2011

УДК 621.37:615.849

**Моделирование физических процессов при исследовании колебаний в электрических цепях:** лабораторный практикум. – Вологда: ВоГТУ, 2011. – 63 с.

Методические указания разработаны по программе дисциплины «физика» для технических специальностей в соответствии с Государственным образовательным стандартом.

Основой для выполнения лабораторного практикума является базовая физико-математическая подготовка обучаемых. Отличительная особенность настоящего издания заключается в применении информационно-коммуникационных технологий для решения задач электродинамики. Степень освоения материала студенты могут повысить самостоятельной работой при дистанционном обучении по курсу «физика».

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГТУ

Составители: А.Д. Платонов, канд. техн. наук, доцент  
Л.А. Кузина, канд. физ.-мат. наук, доцент

Рецензент А.И. Домаков, канд. техн. наук, профессор Вологодского государственного педагогического университета

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **ПОРЯДОК ПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОГРАММОЙ ELECTRONICS WORKBENCH ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ**

Программа EWB используется в большинстве высших учебных заведений мира и является альтернативным вариантом замены дорогостоящего оборудования в лаборатории. Интерфейс EWB прост в обращении, не требует глубоких знаний компьютерной техники, позволяет моделировать разнообразные электронные схемы, проводить их анализ, тестирование и отладку.

Моделирование в настоящих лабораторных работах проведено при помощи программного комплекса Electronics Workbench 5.0. Приложение Electronics Workbench представляет собой средство программной разработки и имитации электрических цепей. Интерфейс пользователя (рис. 1) состоит из полосы меню, панели инструментов и рабочей области. Полоса меню состоит из следующих компонентов: меню работы с файлами (File), меню редактирования (Edit), меню работы с цепями (Circuit), меню анализа схем (Analysis), меню работы с окнами (Window), меню работы с файлами справок (Help). Панель инструментов состоит из «быстрых кнопок», имеющих аналоги в меню, кнопок запуска и приостановки схем, набора радиоэлектронных аналоговых и цифровых деталей, индикаторов, элементов управления и инструментов.

#### **Порядок пользования программой для разработки принципиальной электрической схемы**

1. Запустите Electronics Workbench.
2. Подготовьте новый файл для работы. Для этого необходимо выполнить следующие операции из меню: File/New и File/Save as. При выполнении операции Save as будет необходимо указать имя файла и каталог, в котором будет храниться схема. Рекомендуется назвать схему по фамилии исполнителя.
3. Перенесите необходимые элементы из заданной преподавателем схемы на рабочую область Electronics Workbench. Для этого необходимо выбрать раздел на панели инструментов (Sources, Basic, Diodes, Transistors, Analog Ics, Mixed Ics, Digital Ics, Logic Gates, Digital, Indicators, Controls, Miscellaneous, Instruments), в котором находится нужный вам элемент, затем перенести его на рабочую область.
4. Соедините контакты элементов и расположите элементы в рабочей области для получения необходимой вам схемы. Для соединения двух контактов необходимо щелкнуть по одному из контактов основной кнопкой мыши и, не отпуская клавишу, довести курсор до второго контакта. В случае необходимости можно добавить дополнительные узлы (разветвления). Нажатием на элементе правой кнопкой мыши можно получить быстрый доступ к простейшим операциям над положением элемента, таким как вращение (rotate), разворот (flip), копирование/вырезание (copy/cut), вставка (paste).

Рис. 1. Внешний интерфейс пользователя Electronics Workbench

5. Проставьте необходимые номиналы и свойства каждому элементу. Для этого нужно дважды щелкнуть мышью на элементе.
6. Когда схема собрана и готова к запуску, нажмите кнопку включения питания на панели инструментов. В случае серьёзной ошибки в схеме (замыкание элемента питания накоротко, отсутствие нулевого потенциала в схеме) будет выдано предупреждение.
7. Произведите анализ схемы, используя инструменты индикации. Вывод терминала осуществляется двойным нажатием клавиши мыши на элементе. В случае надобности можно пользоваться кнопкой Pause.
8. При необходимости произведите доступные анализы в разделе меню Analysis.

### ***ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1***

#### **ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛОГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАНИЙ**

##### *Цель работы:*

1. Изучить физические основы работы электронно-лучевой трубки (ЭЛТ) и состав структурной схемы электронного осциллографа.
2. Исследовать параметры гармонического синусоидального колебания: период, частоту, амплитуду, действующее значение, начальную фазу колебания.
3. Определить параметры электростатического поля и параметры движущейся заряженной частицы.
4. В выводах по проведённым исследованиям представить формы и параметры наблюдаемых осциллограмм.

##### **Состав моделируемой электрической цепи:**

- генератор сигналов синусоидальной формы;
- генератор импульсных сигналов;
- электронный осциллограф.

### **Краткие сведения из теории**

Электронный осциллограф в настоящее время является одним из наиболее распространённых измерительных приборов. Несмотря на многообразие осциллографов промышленного типа, их упрощённая структурная схема в основном одинакова, что объясняется главным его назначением – получать диаграммы исследуемых процессов (рис. 1.1).

Основными элементами схемы являются: электронно-лучевая трубка с электростатическим управлением электронным лучом, каналы вертикального (Y) и горизонтального (X) отклонения луча с делителем и усилителем сигнала.

лов, генератор развёртывающего напряжения, калибратор для измерения амплитуды (Вольт/деление) и длительности (сек/деление), блок синхронизации.

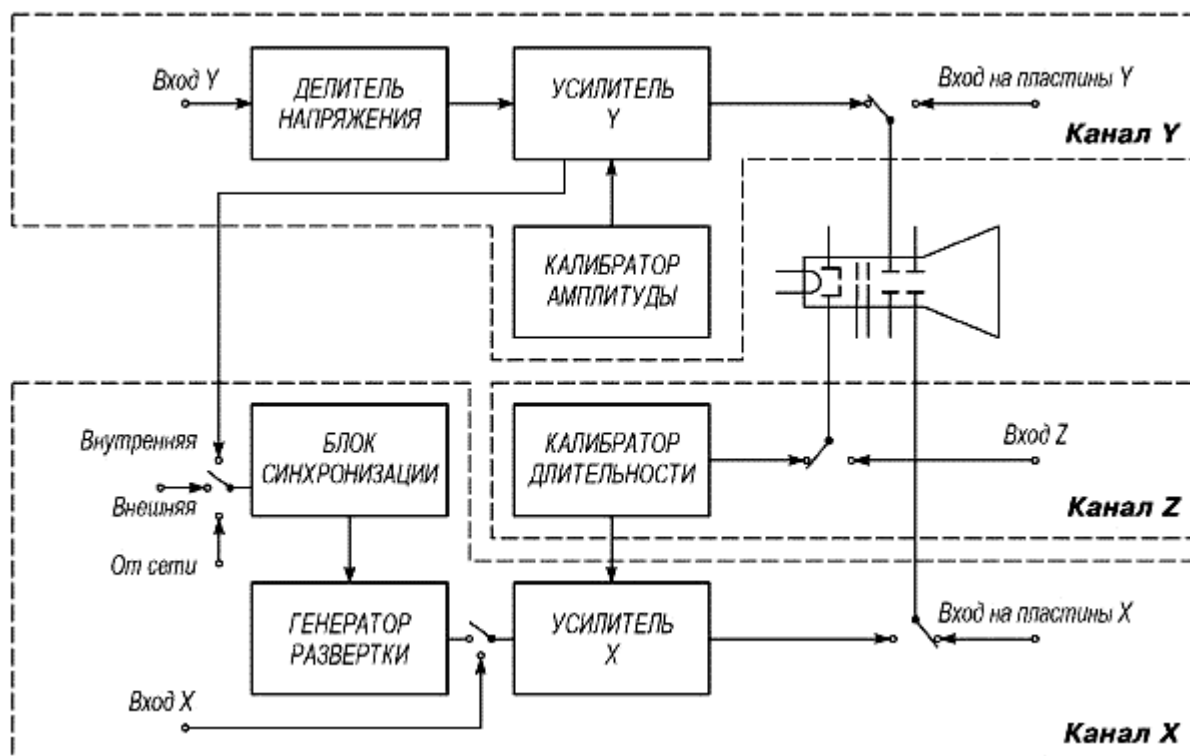


Рис. 1.1. Структурная схема осциллографа

### Взаимодействие элементов структурной схемы

Исследуемый сигнал подаётся на вход «Y» прибора. При большой величине входного напряжения, сигнал ослабляется входным делителем. Далее он усиливается усилителем вертикального отклонения (усилитель «Y») и подаётся на вертикально отклоняющие пластины ЭЛТ. Амплитуда входного сигнала может быть измерена путём сравнения её с известной амплитудой калибратора амплитуды.

Генератор развёртки может работать в непрерывном либо ждущем режиме. В непрерывном режиме вырабатывается пилообразное напряжение для создания временной развёртки луча на экране. В режиме ждущей развёртки при каждом импульсе запускающего напряжения генератор формирует однократный импульс пилообразного напряжения, обеспечивающий развёртку исследуемого сигнала, подаваемого на вертикально отклоняющие пластины ЭЛТ.

Усилитель синхронизации позволяет установить сигнал синхронизации до величины, необходимой для работы генератора развёртки.

Калибратор длительности (генератор меток времени) служит для измерения длительности исследуемых сигналов. Он запускается одновременно с генератором ждущей развёртки и формирует на изображении сигнала яркостные метки, расположенные через известные интервалы времени.

## Электрон в электрическом поле

Взаимодействие движущихся электронов с электрическим полем – основной процесс, происходящий в большинстве электронных приборов. Наиболее простым случаем является движение электрона в однородном электрическом поле, т.е. в поле, напряженность которого одинакова в любой точке как по величине, так и по направлению. На рисунке 1.2 показано однородное электрическое поле, созданное между двумя параллельными пластинами достаточно большой протяженности, чтобы пренебречь искривлением поля у краев.

На электрон, как и на любой заряд, помещенный в электрическом поле с напряженностью  $E$ , действует сила, равная произведению величины заряда на напряженность поля в месте нахождения заряда,

$$F = -eE.$$

Знак минус показывает, что вследствие отрицательного заряда электрона сила имеет направление, противоположное направлению вектора напряженности электрического поля.

Под действием силы  $F$  электрон движется навстречу электрическому полю, т.е. перемещается в сторону точек с более высоким потенциалом. Поэтому поле в данном случае является ускоряющим. Работа, затраченная электрическим полем на перемещение заряда из одной точки в другую, равна произведению величины заряда на разность потенциалов между этими точками, т.е. для электрона

$$A = eU = e(U_2 - U_1),$$

где  $U$  – разность потенциалов между точками 1 и 2. Эта работа затрачивается на сообщение электрону кинетической энергии

$$W_k = \frac{m_e(v^2 - v_0^2)}{2},$$

где  $v$  и  $v_0$  – скорости движения электрона в точках 1 и 2. Тогда

$$\frac{m_e(v^2 - v_0^2)}{2} = eU.$$

Если начальная скорость электрона  $v_0 = 0$ , то

$$\frac{m_e v^2}{2} = eU.$$

Отсюда можно определить скорость электрона, пролетевшего в электрическом поле при разности потенциалов  $U$

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m_e}U}.$$

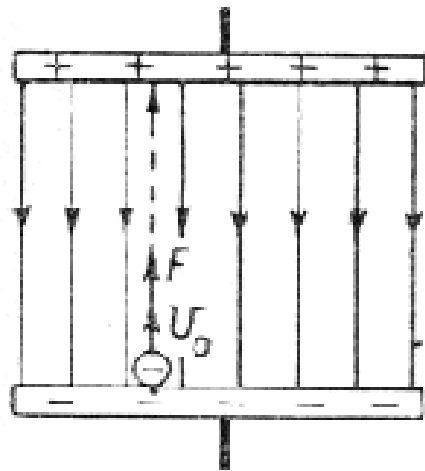


Рис. 1.2. Движение электрона в ускоряющем электрическом поле

Подставляя значение заряда и массы электрона, можно получить выражение для скорости электрона

$$v \approx 600 \cdot \sqrt{U} \text{ [êì /ñ] } .$$

Таким образом, скорость, приобретаемая электроном при движении в ускоряющем поле, зависит только от пройденной разности потенциалов. Из формулы видно, что скорости электронов, даже при сравнительно небольшой разности потенциалов, получаются значительными. Например, при  $U=100$  В получаем  $v=6000$  км/с. При такой большой скорости электронов все процессы в приборах, связанные с движением электронов, протекают очень быстро. Например, время, необходимое для пролета электронов между электродами в электронной лампе, составляет доли микросекунды. Именно поэтому работа большинства электронных приборов может считаться практически безынерционной.

Рассмотрим теперь движение электрона, у которого начальная скорость направлена против силы  $F$ , действующей на электрон со стороны поля (рис. 1.3). В этом случае электрическое поле является для электрона тормозящим.

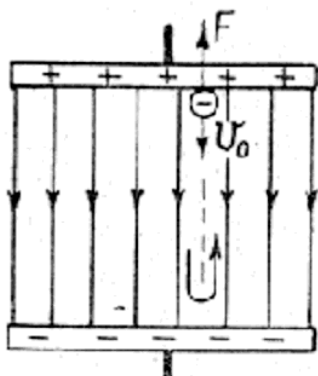


Рис. 1.3. Движение электрона в тормозящем электрическом поле

Скорость движения электрона и его кинетическая энергия в тормозящем поле уменьшаются, так как в данном случае работа совершается не силами поля, а самим электроном, который за счет своей энергии преодолевает сопротивление сил поля. Энергия, теряемая электроном, переходит к полю. В тот момент, когда электрон полностью израсходует свою кинетическую энергию, его скорость окажется равной нулю, и затем электрон будет двигаться в обратном направлении. Движение его в этом направлении является не чем иным, как рассмотренным выше движением без начальной скорости в ускоряющем поле. При таком движении электрона поле

возвращает ему ту энергию, которую он потерял при своем замедленном движении. Возможен также случай, когда электрон, обладающий большой начальной скоростью, не успевает за время пребывания в тормозящем поле израсходовать всю кинетическую энергию. При этом он теряет только часть своей энергии, передавая ее полю.

В рассмотренных выше случаях направление скорости движения электрона было параллельным направлению электрических силовых линий поля. Такое электрическое поле называется *продольным*. Поле, направленное перпендикулярно вектору начальной скорости электрона, называется *поперечным*. Рассмотрим, что происходит, если электрон влетает в электрическое поле с некоторой начальной скоростью  $v_0$  под прямым углом к направлению электрических силовых линий (рис. 1.4).



Поле действует на электрон с постоянной силой, направленной в сторону более высокого потенциала. Под действием этой силы электрон приобретает скорость  $v_1$ , направленную навстречу полю. В результате электрон совершает одновременно два взаимно перпендикулярных движения: прямолинейное равномерное по инерции со скоростью  $v_0$  и прямолинейное равноускоренное со скоростью  $v_1$ . В результате электрон будет двигаться по траектории, представляющей собой параболу. После выхода из электрического поля электрон будет двигаться по инерции прямолинейно.

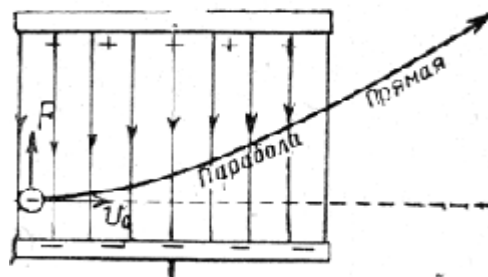


Рис.1.4. Движение электрона в поперечном электрическом поле

В электронных приборах электрические поля обычно неоднородны. Они характеризуются непостоянством напряженности по величине и направлению. Конфигурация таких полей весьма разнообразна и сложна. Выбором величины и направления начальной скорости электронов, а также величины и направления напряженности электрического поля можно заставить электроны двигаться по заранее рассчитанной траектории, подобно тому, как направление светового луча изменяют путем выбора первоначального его направления и соответствующих оптических сред. Таким образом, существует подобие между законами движения электронов в электрическом поле и законами световой оптики. На основании такой аналогии науку, которая изучает движение электронов в электрическом поле, называют *электронной оптикой*.

### Осциллографическая трубка

Устройство и схема питания осциллографической электронно-лучевой трубки с электростатической фокусировкой и отклонением электронного луча показаны на рис. 1.5.

Основными частями трубки являются:

- 1) электронная пушка, создающая узкий электронный луч, направленный вдоль оси трубки;
- 2) отклоняющая система, назначением которой является изменение направления электронного луча;
- 3) экран, обладающий способностью светиться при бомбардировке его электронными лучами.

### Электронная пушка

Электронной пушкой, или электронным прожектором, называется система электродов, позволяющая получить узкий пучок электронов (электронный луч).

Она помещается в узкой удлиненной части колбы и состоит из нагретого катода, управляющего электрода и двух анодов. Катод сделан в виде небольшого никелевого цилиндра, дно которого покрывается активированным слоем, испускающим при нагреве электроны. Обычно в электронно-лучевых трубках применяется оксидный катод. Вывод катода часто присоединяется внутри баллона к одному из концов нити накала.

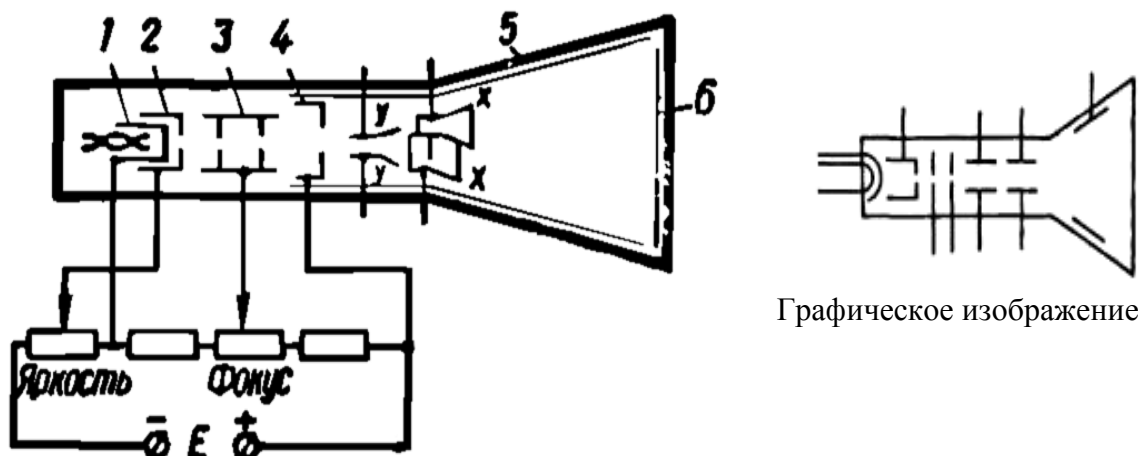


Рис. 1.5. Устройство электронно-лучевой трубки с электростатическим управлением: 1 – катод; 2 – управляющий электрод (модулятор); 3 – первый анод; 4 – второй анод; 5 – аквадаг; 6 – экран

Вокруг катода располагается управляющий электрод (модулятор), выполненный в виде никелевого цилиндра с небольшим отверстием (диафрагмой) в доньшке. На модулятор подается отрицательное относительно катода напряжение порядка нескольких десятков вольт.

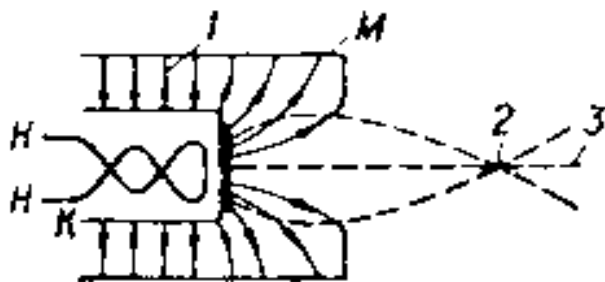


Рис. 1.6. Устройство катода и модулятора электронно-лучевой трубки: 1 – силовые линии электрического поля между катодом и модулятором; 2 – фокус; 3 – ось трубки

Под действием электрического поля, созданного этим напряжением, электроны прижимаются к оси трубки и сходятся в точку на некотором расстоянии от управляющего электрода (рис.1.6).

Благодаря этому осуществляется предварительная фокусировка электронного луча. Кроме того, электрическое поле между катодом и управляющим электродом, являясь тормозящим для электронов, отталкивает некоторые из них обратно на катод. Следовательно, регулируя величину отрицательного потенциала на модуляторе, можно изменять количество электронов, пролетающих через его диафрагму, т. е. изменять плотность электронного луча. Такая регулировка приводит к изменению яркости светящегося пятна на экране трубки. Движение электронов от катода к экрану и дальнейшая фокусировка их в узкий пучок обеспечивается системой двух анодов, вы-

полненных в виде полых металлических цилиндров. Первый анод выполняется меньшего диаметра, чем второй, и снабжается большим количеством диафрагм. Чтобы получить достаточные скорости движения электронов, на аноды подаются большие положительные напряжения (на первый анод порядка нескольких сотен вольт, а на второй – порядка нескольких киловольт).

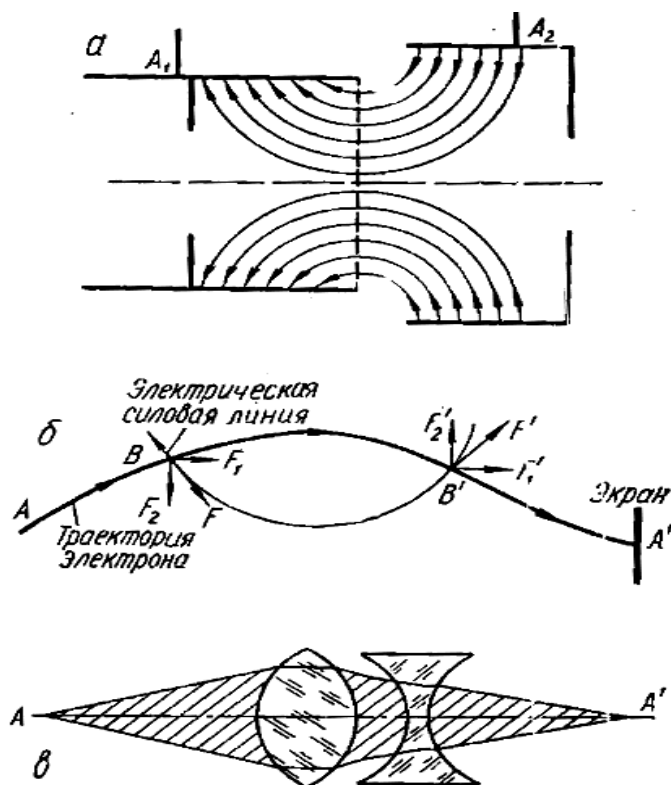


Рис. 1.7. Фокусировка электронного луча с помощью системы двух анодов

Для уяснения фокусирующего действия системы двух анодов рассмотрим рисунок 1.7. Так как потенциал второго анода  $A_2$ , выше потенциала первого анода  $A_1$ , то электрическое поле между ними будет направлено от второго анода к первому.

На электрон, попадающий в электрическое поле, действует сила, направленная в каждой точке поля по касательной к силовой линии. Например, на электрон, находящийся в точке  $B$ , действует сила  $F$ , направленная по касательной к силовой линии электрического поля между первым и вторым анодами. Силу  $F$  можно разложить на две составляющие: продольную  $F_1$ , и поперечную  $F_2$ .

Продольная составляющая  $F_1$ , ускоряет движение электрона вдоль оси трубки, а поперечная  $F_2$ , прижимает его к оси. В точке  $B'$  на участке второго анода продольная составляющая  $F_1'$  по-прежнему ускоряет электрон в направлении экрана, но поперечная составляющая  $F_2'$  уже отклоняет его от оси.

Таким образом, действие системы анодов эквивалентно действию оптической системы из собирающей и рассеивающей линз. Поэтому фокусирующую систему анодов электронно-лучевой трубки иногда называют *электростатической линзой*. Необходимо подчеркнуть, что собирающее действие левой части электростатической линзы не равно рассеивающему действию правой части, так как скорость электрона в точке  $B$  на участке первого анода меньше, чем в точке  $B'$  на участке второго анода. Чем меньше скорость, тем дольше находится электрон в отклоняющем поле и тем больше испытываемое им отклонение, и наоборот.

Следовательно, собирающее действие левой части больше рассеивающего действия правой части, и электроны будут сходиться в одной точке ( $A'$ ) на оси трубки на некотором расстоянии от анодов. Меняя величину напряжения на

первом аноде, можно изменять электрическое поле между анодами и тем самым перемещать точку фокуса вдоль оси трубки, добиваясь совмещения её с поверхностью экрана. При этом на экране трубки получается резко очерченное светящееся пятно малого диаметра.

### Отклоняющая система

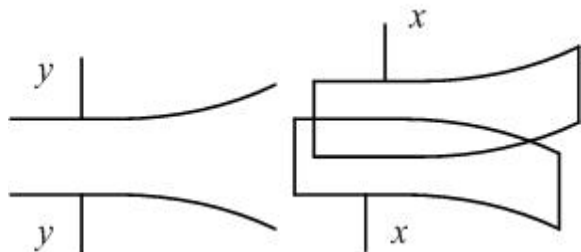


Рис.1.8. Отклоняющие пластины электронно-лучевой трубки

На пути к экрану электронный луч проходит между двумя парами взаимно перпендикулярных отклоняющих пластин ХХ и УУ, называемых электростатической отклоняющей системой (рис. 1.8).

Пластины хх отклоняют луч по горизонтали и называются поэтому *горизонтально отклоняющими*. Пластины уу отклоняют луч в вертикаль-

ном направлении и называются *вертикально отклоняющими*.

Если подать на каждую пару пластин постоянное напряжение, то электронный луч отклонится в сторону пластины, находящейся под положительным потенциалом. Когда на пластины подается переменное напряжение, перемещение светящегося пятна по экрану образует светящиеся линии. Возможность перемещения луча с помощью напряжений на отклоняющихся пластинах используют при практических применениях трубки.

### Экран

Экран электронно-лучевой трубки представляет собой тонкий слой вещества (люминофора), способного светиться при бомбардировке электронами. К этим веществам относятся виллемит (сульфид цинка), вольфрамово-кислый кальций и др. В зависимости от состава люминофора может быть получено свечение любого цвета.

Оседая на экране, электроны создают на нем отрицательный заряд, который может возрасти до большей величины и нарушить нормальную работу трубки. Для предотвращения этого внутренняя поверхность колбы покрывается электропроводящим графитовым слоем (аквадагом), соединённым со вторым анодом. К этому слою притягиваются вторичные электроны, испускаемые экраном под действием бомбардировки первичными электронами, чем и достигается отвод зарядов от экрана.

### Получение изображения на экране ЭЛТ

Пусть имеется некоторое синусоидальное напряжение  $U_c = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$ . Если его перенести к вертикально отклоняющим (сигнальным) пластинам, то под

действием этого напряжения луч будет перемещаться вверх и вниз по экрану трубки, прочерчивая вертикальную линию (рис. 1.9).

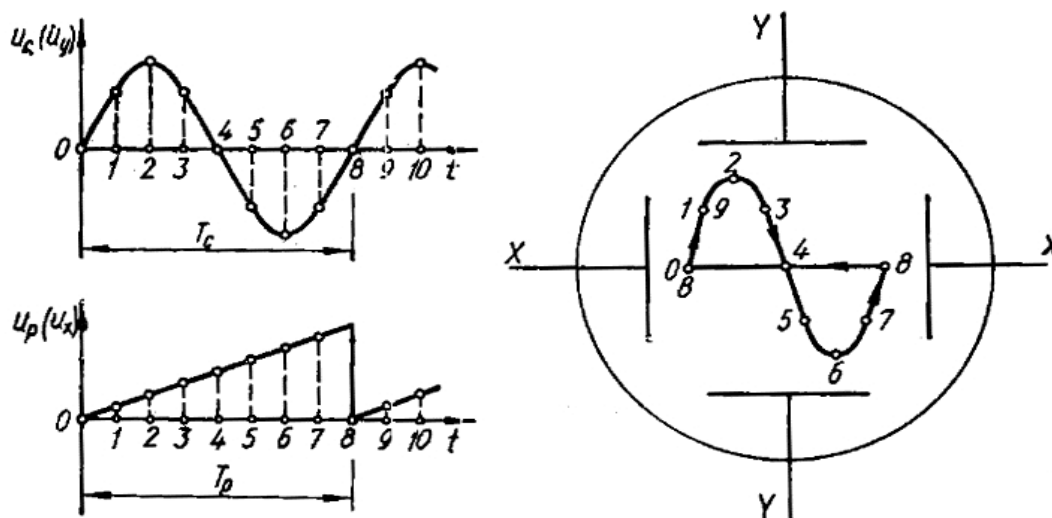


Рис. 1.9. Принцип получения осциллограммы исследуемого синусоидального напряжения

Для получения на экране изображения синусоиды (вместо вертикальной линии), т.е. для наблюдения изменения напряжения во времени, необходимо одновременно подать на горизонтально отклоняющие пластины напряжение, отклоняющее луч в горизонтальном направлении. Это напряжение имеет обычно пилообразную форму и называется *напряжением развертки*. При линейном нарастании напряжения развертки перемещение светящейся точки по экрану в горизонтальном направлении будет прямо пропорционально времени. Затем напряжение развертки резко падает до первоначального значения, и световое пятно почти мгновенно возвращается в исходное положение. Далее цикл перемещения светового луча повторяется. Световую линию на экране, создаваемую этим напряжением, принимают за ось времени.

При одновременной подаче исследуемого синусоидального напряжения  $U_c$  на вертикально отклоняющие пластины  $yy$  и пилообразного напряжения развертки  $U_\delta$  – на горизонтально отклоняющие пластины  $xx$  при совпадении периодов колебаний на экране осциллографа отображается форма исследуемого сигнала.

### Порядок выполнения работы

**Задание №1:** Исследовать параметры гармонического синусоидального колебания: период, частоту, амплитуду, действующее значение напряжения, начальную фазу колебания.

Первая схема (рис. 1.10) состоит из осциллографа и генератора низкой частоты, который вырабатывает сигнал синусоидальной формы.

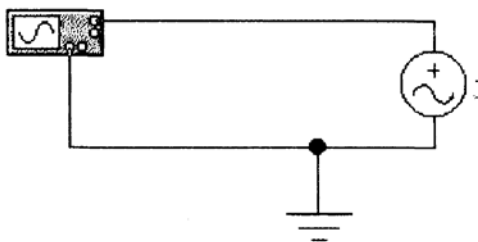


Рис. 1.10. Схема к заданию №1

Эту схему необходимо смоделировать в программе EWB. Для начала работы нужно создать свой файл. Наводим стрелку мыши на меню file и одиночным нажатием левой кнопки мыши открываем вложенное меню, а затем выбираем пункт new. Теперь можно приступить к моделированию.

Для начала нам необходимо поставить генератор переменного синусоидального тока: выбираем на панели инструментов значок source, появляется вложенная панель, с которой перемещаем значок AC Voltage Source. Затем нам необходимо поставить осциллограф: выбираем на панели инструментов значок Instruments, а с вложенной панели перемещаем значок Oscilloscope (рис.1.11). Теперь нужно подключить генератор к осциллографу: курсор мыши наводим на клемму генератора так, чтобы появилась черная точка, и зажимаем левую кнопку мыши, затем протягиваем провод к осциллографу. Для того чтобы эта схема работала, ее нужно заземлить: выбираем на панели инструментов значок source и с вложенной панели перемещаем значок Ground и подключаем его к осциллографу. Схема собрана. Теперь необходимо установить параметры генератора, двойным нажатием левой кнопки мыши по нему вызываем опции генератора. Проставляем значения напряжений (Voltage), например 3 В; частоту (Frequency) 50 Гц; фазу (Phase) можно не изменять. После завершения настройки нажмите кнопку ОК.

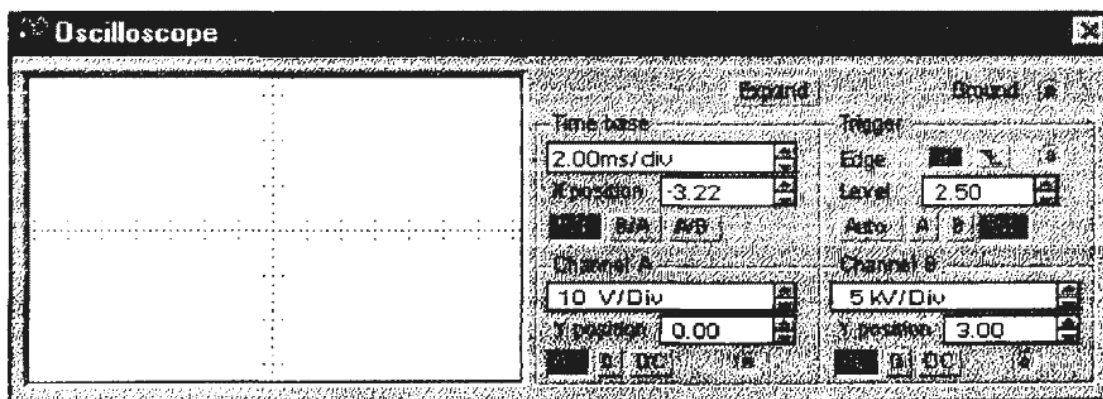


Рис. 1.11. Осциллограф

Теперь можно включить выключатель в правом верхнем углу, чтобы начать процесс моделирования. После включения схемы нужно настроить осциллограф. Двойным нажатием левой кнопки мыши вызываем опции осциллографа. На панели Time base нажмем кнопку Y/T, на панели Trigger нажмем кнопку Ext, на панели Channel A нажмем кнопку AC.

Затем при помощи изменения числовых значений на панелях Time base и Channel зафиксировать осциллограмму. Теперь можно произвести измерения по лабораторной работе и записать результаты в таблицу 1.1. Запишем гармо-

ническое колебание по аналогии с формой записи колебаний математического маятника:

$$U(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

где  $U(t)$  – текущее значение напряжения;  $U_m$  – максимальное значение напряжения;  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  – циклическая частота колебаний;  $f$  – частота колебаний;  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний.

Таблица 1.1

| $f$<br>Частота,<br>Гц | $T$<br>Период<br>колебаний,<br>с | $U_m$<br>Максимальное<br>напряжение,<br>В | $U$<br>Действующее зна-<br>чение напряжения,<br>В | $\varphi_0$<br>Начальная фаза<br>колебаний, град |
|-----------------------|----------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 50                    |                                  | 6                                         |                                                   |                                                  |
| 600                   |                                  | 10                                        |                                                   |                                                  |
| $2.5 \cdot 10^3$      |                                  | 5                                         |                                                   |                                                  |
| $3 \cdot 10^2$        |                                  | 4                                         |                                                   |                                                  |
| $5 \cdot 10^6$        |                                  | 8                                         |                                                   |                                                  |

Основные соотношения между величинами известны из курса физики:

$$f = \frac{1}{T} ; T = \frac{1}{f}.$$

Определим действующее значение периодической величины. Для оценки эффективности действия периодического тока используют его тепловое действие и сравнивают с аналогичным действием постоянного тока за время, равное одному периоду колебания.

Действующее значение периодического тока равно значению такого постоянного тока, который за время одного периода производит тот же тепловой эффект.

Постоянный ток  $I$  и периодический синусоидальный ток  $i$  для одного и того же резистивного элемента  $r$  выделяют одинаковое количество тепла за время, равное одному периоду колебания  $T$ . Запишем математически это равенство теплоты:

$$r \cdot I^2 \cdot T = \int_0^T r \cdot i^2 \cdot dt.$$

Из этого уравнения получим действующее значение тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt},$$

равное среднеквадратическому значению периодического тока.

Учитывая, что  $i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$ , найдем выражение для действующего значения тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega \cdot t) dt}.$$

После интегрирования получим:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m.$$

Аналогично, действующее значение напряжения является среднеквадратичным значением:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (U_m \cdot \sin(\omega \cdot t))^2 dt}; \quad U = U_m \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,707 \cdot U_m.$$

Рассчитать значения  $U$  и занести в таблицу 1.1.

На практике в качестве параметров тока и напряжения задают действующие значения. Шкалы измерительных приборов градуируются в действующих параметрах измеряемых величин.

**Задание №2:** Определить параметры электростатического поля и параметры движущейся частицы по заданию преподавателя. Представить рисунок к задаче и решение с пояснением расчётов.

1. Электрическое поле образовано двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии  $d=2$  см друг от друга. К пластинам приложена разность потенциалов  $U=120$  В. Какую скорость  $v$  получит электрон под действием поля, пройдя по линии напряженности расстояние  $r=3$  мм?

$$\text{Ответ: } v = \sqrt{\frac{2q \cdot U (r_1 - r_2)}{m \cdot d}} = 2.53 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

2. Электрон в однородном электрическом поле получает ускорение  $a = 10^{14} \text{ м/с}^2$ . Найти напряженность  $E$  электрического поля, скорость  $v$ , которую получит электрон за время  $t = 10^6 \text{ нс}$  своего движения, работу сил электрического поля за это время и разность потенциалов, пройденную при этом электроном. Начальная скорость электрона  $v_0 = 0$ .

$$\text{Ответ: } E = 5.7 \text{ В/м}; \quad v = 10^6 \text{ м/с}; \quad A = 4.5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}; \quad U = 2.8 \text{ В}.$$

3. Электрон летит от одной пластины плоского конденсатора до другой. Разность потенциалов между пластинами равна  $U=3$  кВ, расстояние между пластинами  $d=5$  мм. Найти силу  $F$ , действующую на электрон, ускорение электрона, скорость, с которой электрон приходит ко второй пластине, и поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора.

$$\text{Ответ: } F = 9.6 \cdot 10^{-14} \text{ Н}; \quad a = 1.05 \cdot 10^{17} \text{ м/с}^2; \\ v = 3.27 \cdot 10^7 \text{ м/с}; \quad \sigma = 5.3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

4. Электрон влетает с некоторой скоростью в плоский горизонтальный конденсатор параллельно пластинам на равном расстоянии от них. Расстояние между пластинами  $d=4$  см, напряжённость электрического поля в конденсаторе  $E=1$  В/см. Найти, через сколько времени после того, как электрон влетел в конденсатор, он попадёт на одну из пластин? На каком расстоянии от начала



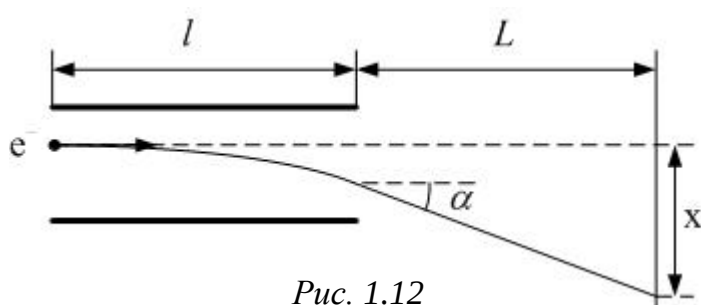


Рис. 1.12

конденсатора электрон попадет на пластину, если он был ускорен разностью потенциалов 60 В?

Ответ:

$$t = 4.8 \cdot 10^{-8} \text{ нс}; S_x = 0.22 \text{ м}.$$

5. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно пластинам со скоростью  $9 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ . Найти полное, нормальное и тангенциальное ускорение электрона через  $10^{-8} \text{ нс}$  после начала его движения в конденсаторе. Разность потенциалов между пластинами равна 100 В, расстояние между пластинами 1 см.

Ответ:  $a_t = 15.7 \cdot 10^{14} \text{ м/с}^2$ ;  $a_n = 8 \cdot 10^{14} \text{ м/с}^2$ ;  $a_r = 17.6 \cdot 10^{14} \text{ м/с}^2$ .

6. Электрон влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью  $v_x = 10^7 \text{ м/с}$ . Напряженность поля в конденсаторе  $E = 10 \text{ В/м}$ ; длина конденсатора  $l = 5 \text{ см}$ . Найти величину и направление скорости электрона при вылете его из конденсатора.

Ответ:  $v = 1.33 \cdot 10^7 \text{ м/с}$ ;  $\alpha = 41^\circ 20'$ .

7. Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов  $U=300 \text{ В}$ , при прохождении через незаряженный плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам дает светящееся пятно на флуоресцирующем экране, расположенном на расстоянии  $l_1 = 12 \text{ см}$  от конца конденсатора. При зарядке конденсатора пятно на экране смещается на расстояние  $y_1 = 3 \text{ см}$ . Расстояние между пластинами  $d = 1.4 \text{ см}$ ; длина конденсатора  $l = 6 \text{ см}$ . Найти разность потенциалов  $U_1$ , приложенную к пластинам конденсатора.

Ответ:  $U_1 = \frac{2dUy}{l\left(l_1 + \frac{l}{2}\right)} = 28 \text{ В}.$

8. Телевизионная трубка работает при напряжении 30 кВ. Определить кинетическую энергию электронов у экрана этой трубки, считая, что электроны покидают катод с начальной скоростью, равной нулю.

Ответ:  $W=4.8 \cdot 10^{-15} \text{ Дж}.$

9. Электрон, имеющий кинетическую энергию 10 кэВ, влетает в плоский конденсатор (рис. 1.12), между пластинами которого поддерживается постоянное напряжение 40 В. Расстояние между пластинами 1 см, их длина  $l=10 \text{ см}$ . На расстоянии  $L=20 \text{ см}$  от конденсатора находится экран. Первоначальная скорость электронов направлена параллельно пластинам. Найдите смещение  $x$

электрона на экране и угол  $\alpha$  между первоначальной и конечной скоростями. Силой тяжести пренебречь.

Ответ:  $x=5$  мм.

10. Электрон влетает в плоский конденсатор параллельно его пластинам со скоростью 1000 км/с. Длина пластин 9 см, расстояние между ними 1.6 см, разность потенциалов 10 В. Какой скоростью обладает электрон при вылете из конденсатора? Каково направление этой скорости?

Ответ:  $v = 9.9 \cdot 10^6$  м/с;  $\alpha = 84^\circ$ .

11. Электрон влетел в конденсатор на равном расстоянии от пластин со скоростью 10 Мм/с параллельно пластинам. При вылете угол между первоначальной и конечной скоростями  $30^\circ$ . Определить напряжение на конденсаторе и напряжённость электростатического поля конденсатора. Расстояние между обкладками конденсатора 2 см, их длина 10 см.

Ответ:  $U = 66$  В;  $E = 3300$  В/м.

### Пример решения задачи

Дано:

$$E = 2.25 \cdot 10^3 \text{ В/м}$$

$$l = 0.04 \text{ м}$$

$$\Delta y = 0.02 \text{ м}$$

Найти:

$$v_0 = ?$$

Пучок катодных лучей, направленный параллельно обкладкам плоского конденсатора, на пути 4 см отклоняется на расстояние 20 мм от первоначального направления. Какую начальную скорость имеют электроны катодного луча? Напряжённость электрического поля внутри конденсатора 2.25 кВ/м.

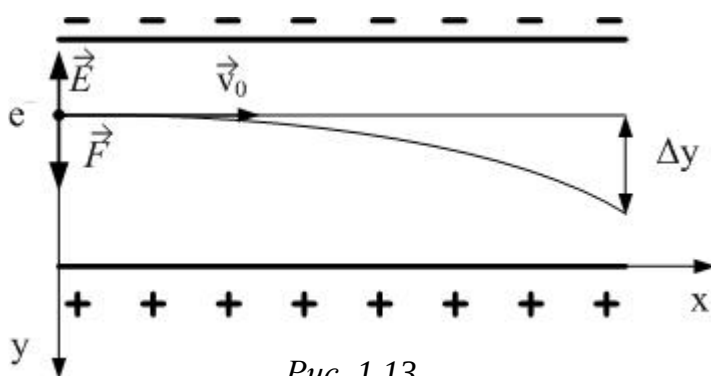


Рис. 1.13

### Решение

На электрон в электрическом поле  $\vec{E}$  конденсатора действует сила  $\vec{F} = (-e)\vec{E}$  (рис.1.13). Ускорение электрона направлено вниз и равно:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}.$$

Проекция ускорения:

$$a_x = 0,$$

$$a_y = a = \frac{eE}{m}.$$

Найдём проекции начальной скорости электрона:

$$v_{0x} = v_0, \quad v_{0y} = 0.$$

Координаты электрона в момент вылета из конденсатора:

$$l = x = v_{0x} \cdot t + \frac{a_x t^2}{2} = v_0 \cdot t,$$

$$\Delta y = y = v_{0y} \cdot t + \frac{a_y t^2}{2} = \frac{eEt^2}{2 \cdot m}.$$

Здесь  $t$  – время движения электрона в конденсаторе. Отсюда получим:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot \Delta y}{eE}}, \quad v_0 = \frac{l}{t} = l \cdot \sqrt{\frac{eE}{2 \cdot m \cdot \Delta y}}.$$

$$\text{Вычисления: } v_0 = 0.04 \cdot \sqrt{\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 2.25 \cdot 10^3}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 0.02}} = 3.98 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

$$\text{Ответ: } v_0 = 3.98 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

В выводах по лабораторной работе отразить следующие вопросы:

1. Достижение цели лабораторной работы.
2. Соответствие численных значений физических величин основным положениям теории колебательных процессов.

### Библиографический список

1. Трофимова, Т. И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова.- М.: Высш. шк., 1990.-С.219-221.
2. Детлаф, А.А. Курс физики: учеб. пособие для вузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский.- М.: Высш. шк., 2002.-С.358-359.
3. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями: учеб. Пособие для вузов / Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова. - М.: Высш. шк., 2002.-С.307-308.

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА СЛОЖЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛОГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ РАССОГЛАСОВАНИЯХ

##### *Цель работы:*

1. Изучить физические основы процесса сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях.
2. Провести моделирование процесса сложения колебаний.
3. Исследовать параметры: соотношение амплитуд и фаз, траекторию результирующего колебания.
4. В выводах по проведенным исследованиям представить уравнения траекторий и формы наблюдаемых осциллограмм.

### Состав моделируемой электрической цепи:

- генератор сигналов синусоидальной формы для пластин  $X$  осциллографа;
- генератор сигналов синусоидальной формы для пластин  $Y$  осциллографа;
- электронный осциллограф.

### Краткие сведения из теории

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей  $X$  и  $Y$ . Пусть на отклоняющие пластины  $X$  осциллографа поступает сигнал, величина которого описывается выражением:

$$X = A_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1).$$

На отклоняющие пластины  $Y$  осциллографа поступает гармонический сигнал

$$Y = A_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi_2).$$

Электронно-лучевая трубка осциллографа должна реагировать на мгновенные значения результата воздействия обоих колебаний одновременно. Чтобы найти траекторию луча на экране, требуется решить систему двух уравнений при неизвестных параметрах  $A_1, A_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2$ .

$$\begin{cases} X = A_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) \\ Y = A_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi_2) \end{cases}$$

Очевидно, строгое решение задачи сложения колебаний может быть проведено при двух неизвестных параметрах (число неизвестных должно быть не более числа уравнений в системе). Эта задача может быть решена относительно амплитуд  $A_1$  и  $A_2$  при  $\omega_1 = \omega_2, \varphi_1 = \varphi_2$  либо относительно фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  при  $A_1 = A_2, \omega_1 = \omega_2$ .

1. Решим систему уравнений относительно значений амплитуд, считая, что  $\omega_1 = \omega_2, \varphi_1 = \varphi_2$ :

$$\frac{Y}{X} = \frac{A_2}{A_1}; \quad Y = \frac{A_2}{A_1} \cdot X;$$
$$Y = k \cdot X,$$

где  $k = \frac{A_2}{A_1}$ . Это – уравнение прямой.

Таким образом, исследуемое колебание луча можно выразить уравнением  $Y = k \cdot X$ , представляющем уравнение прямой линии, проходящей через начало координат с углом наклона по отношению к оси  $X$ , равным

$$\Psi = \arctg \frac{A_2}{A_1}.$$

В частном случае, при равенстве амплитуд  $A_1 = A_2$  – значению  $\psi = 45^\circ$ .

То есть, угол наклона прямой линии на экране ЭЛТ характеризует амплитудное соотношение складываемых колебаний. При  $\psi=45^\circ$  амплитуда сигнала, подаваемого на отклоняющие пластины  $X$ , равна амплитуде колебания на пластинах  $Y$ .

2. Проведем решение системы уравнений относительно значений фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , приняв  $A_1=A_2$ ,  $\omega_1=\omega_2$ .

Для определения вида фигуры на экране нужно исключить время  $t$  из уравнений и определить зависимость между  $X$  и  $Y$ .

Из первого уравнения находим (при  $\varphi_1=0$ ):

$$\sin(\omega \cdot t) = \frac{X}{A_1}; \quad (2.1)$$

$$\cos(\omega \cdot t) = \sqrt{1 - \left(\frac{X}{A_1}\right)^2} = \sqrt{\frac{A_1^2 - X^2}{A_1^2}} \quad (2.2)$$

Поскольку  $\sin(\omega \cdot t + \varphi) = \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi + \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi$ , то получим

$$Y = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = A_2 \cdot (\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi + \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi)$$

и, после подстановки (2.1) и (2.2)

$$Y = A_2 \cdot \left( \frac{X}{A_1} \cdot \cos \varphi + \sqrt{\frac{A_1^2 - X^2}{A_1^2}} \cdot \sin \varphi \right), \text{ или}$$

$$Y = \frac{A_2}{A_1} \cdot (X \cdot \cos \varphi + \sqrt{A_1^2 - X^2} \cdot \sin \varphi). \quad (2.3)$$

Это выражение является уравнением эллипса. Рассмотрим частный случай для колебаний, если их фазовый сдвиг составляет  $\frac{\pi}{2}$  либо  $\frac{3 \cdot \pi}{2}$ .

$$\text{Например: } \begin{cases} X = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ Y = A_2 \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right); \text{ тогда} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{X}{A_1} = \sin(\omega \cdot t) \\ \frac{Y}{A_2} = -\cos(\omega \cdot t) \end{cases}.$$

Поскольку  $\sin^2(\omega \cdot t) + \cos^2(\omega \cdot t) = 1$ , то:

$$\frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{A_2^2} = 1.$$

Таким образом, исключив из этих уравнений время  $t$ , нашли траекторию точки на экране ЭЛТ. Это эллипс, оси которого совпадают с осями координат.

Представленные выражения являются каноническими уравнениями эллипса. При  $A_1=A_2$  и сдвиге фаз колебаний  $\frac{\pi}{2}$  эллипс превращается в окружность  $X^2 + Y^2 = R^2$ , где  $R$  – радиус окружности ( $R=A$ ).

Если в уравнение (2.3) подставить значение  $X=0$ , затем  $Y=0$ , то получим соответственно:

$$\frac{Y}{A_2} = \pm \sin \varphi \quad \text{и} \quad \frac{X}{A_1} = \pm \sin \varphi.$$

Это значит, что длина отрезков, отсекаемых эллипсом на осях координат, может служить мерой фазового сдвига исследуемых колебаний.

Определим величину радиус-вектора  $r$ , определяющего положение светящегося пятна на экране ЭЛТ в текущий момент времени

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{A_1^2 \sin^2(\omega \cdot t) + A_2^2 \sin^2(\omega \cdot t + \varphi)}. \quad (2.4)$$

Радиус-вектор текущего положения светящегося пятна и траектория луча на экране ЭЛТ изображены на рис 2.1.

Размеры осей эллипса  $a$  и  $b$  связаны с радиус-вектором  $r$  соотношением  $a = 2 \cdot r_{\min}$  и  $b = 2 \cdot r_{\max}$ . Найдем значение  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$ , исследовав значение  $r$  на экстремумы по переменной  $(\omega \cdot t)$ :

$$\frac{dr}{d(\omega \cdot t)} = \frac{1}{2 \cdot r} (A_1^2 \sin(2\omega \cdot t) + A_2^2 \sin(2\omega \cdot t + 2\varphi)) = 0.$$

При условии  $A_1 = A_2 = A$  получим уравнение для фазового сдвига  $\varphi$

$$\sin(2\omega \cdot t) + \sin(2\omega \cdot t + 2\varphi) = 0.$$

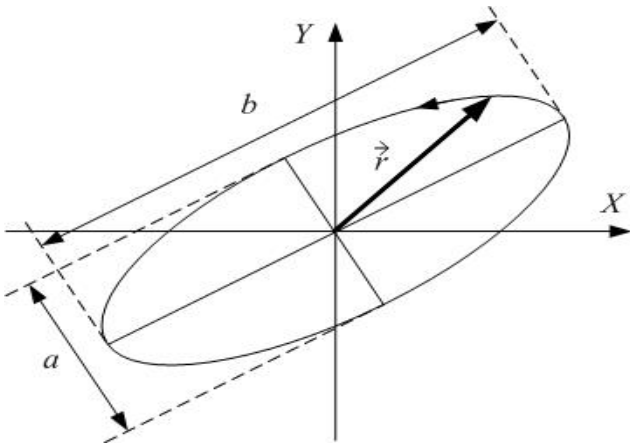


Рис. 2.1. Траектория луча на экране ЭЛТ

Это равенство справедливо в случаях:

1.  $(\omega \cdot t)_1 = -\frac{\varphi}{2};$
2.  $(\omega \cdot t)_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}.$

Подставим значения  $(\omega t)_1$  и  $(\omega t)_2$  в выражение (2.4) и найдем экстремальные значения радиус-

вектора  $r_1 = \sqrt{2}A \sin \frac{\varphi}{2};$

$$r_2 = \sqrt{2}A \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Определим отношение  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$

Отсюда сдвиг фаз колебаний:

$$\varphi = \pi - 2 \cdot \arctg \frac{b}{a}. \quad (2.5)$$

При измерении фазового сдвига складываемых колебаний из (2.5) по соотношению осей эллипса возможны ошибки за счет неидентичности фазовых характеристик каналов “X” “Y” в схеме осциллографа.

На практике в таких системах используют схемы автоматического выравнивания фаз (АВФ) и автоматического выравнивания усиления амплитуды

каналов (АВУК). При фазовом рассогласовании колебаний по “Х” и “У”, равном  $\pi/2$ , эллипс вырождается в окружность.

Угол наклона большой оси эллипса по отношению к оси “Х” характеризует амплитудные соотношения исследуемых колебаний.

### Порядок выполнения работы

**Задание №1.** Провести моделирование процесса сложения ортогональных периодических колебаний. Синтезировать схему, состоящую из генераторов синусоидальных сигналов, подключенных к входам “Х” и “У” осциллографа.

Схема (рис. 2.2) состоит из осциллографа и двух генераторов низкой частоты, которые формируют сигнал синусоидальной формы.

Сначала необходимо поставить два генератора переменного синусоидального тока: выбираем на панели инструментов значок source, должна появиться вложенная панель, с которой перемещаем значок

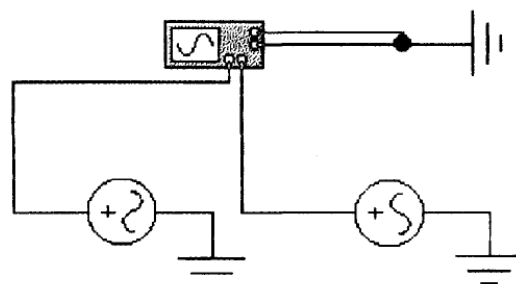


Рис. 2.2. Схема к заданию № 1

AC Voltage Source и повторяем эту процедуру еще раз. Затем нам необходимо поставить осциллограф: выбираем на панели инструментов значок Instruments, а с вложенной панели перемещаем значок Oscilloscope. Теперь нужно подключить генераторы к осциллографу: курсор мыши наводим на клемму генератора так, чтобы появилась черная точка, зажимаем левую кнопку мыши, затем протягиваем провод к осциллографу (таким образом, подключаем оба генератора). Для того чтобы эта схема работала, ее нужно заземлить.

Подключаем заземление. Схема собрана. Теперь необходимо установить параметры генераторов: проставляем значения, амплитуда (Voltage) 5 В; частоту (Frequency) на одном 20 кГц, на другом 40 кГц; фазу (Phase) 30 градусов. Теперь можно включить выключатель в правом верхнем углу, чтобы начать процесс измерений. После включения новой схемы нужно настроить осциллограф.

Заполните таблицу 2.1.

Таблица 2.1

| Генератор №1 |               |             | Генератор №2 |               |             | Уравнение и вид фигуры на экране |
|--------------|---------------|-------------|--------------|---------------|-------------|----------------------------------|
| Частота (Гц) | Амплитуда (В) | Фаза (град) | Частота (Гц) | Амплитуда (В) | Фаза (град) |                                  |
| 20           | 5             | 0           | 20           | 5             | 0           |                                  |
| 40           | 10            | 30          | 40           | 10            | 30          |                                  |
| 80           | 20            | 45          | 80           | 20            | 45          |                                  |
| 60           | 10            | 10          | 60           | 10            | 10          |                                  |
| 50           | 3             | 60          | 50           | 3             | 60          |                                  |

Заполните таблицу 2.2.

Таблица 2.2

| Генератор №1 |               |             | Генератор №2 |               |             | Сдвиг фаз колебаний по соотношению осей эллипса |
|--------------|---------------|-------------|--------------|---------------|-------------|-------------------------------------------------|
| Частота (Гц) | Амплитуда (В) | Фаза (град) | Частота (Гц) | Амплитуда (В) | Фаза (град) |                                                 |
| 20           | 5             | 30          | 20           | 5             | 60          |                                                 |
| 20           | 10            | 30          | 20           | 5             | 60          |                                                 |
| 60           | 5             | 0           | 60           | 5             | 90          |                                                 |
| 60           | 10            | 0           | 60           | 10            | 90          |                                                 |

В выводах по работе представить уравнение траектории точки.

**Задание №2:** Решить задачу.

1. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях, описываемых

уравнениями: 
$$\begin{cases} X = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ Y = B \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{cases}$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $\omega$  – положительные константы (по заданию преподавателя).

Определить уравнение траектории точки. Вычертить траекторию с нанесением масштаба. Указать направление движения точки по траектории в соответствии с рисунком (2.3).

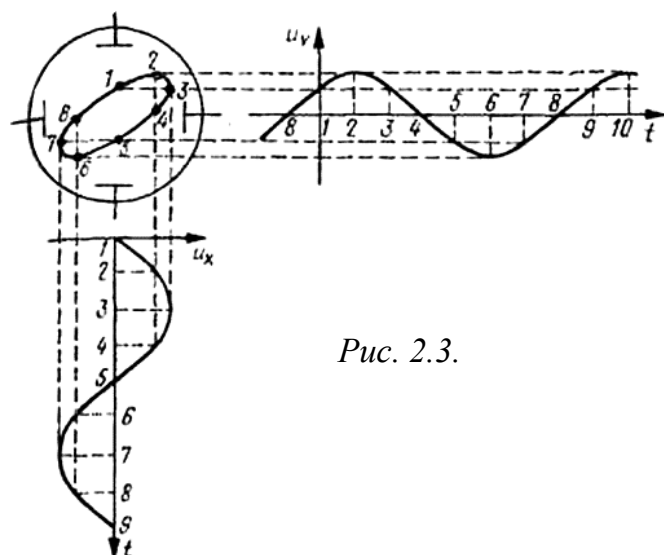


Рис. 2.3.

баниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях, описываемых уравнениями:

$$\begin{cases} X = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \\ Y = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{cases}$$

Определить уравнение траектории точки. Вычертить траекторию с нанесением масштаба (см. задачу 1). Указать направление движения точки по траектории.

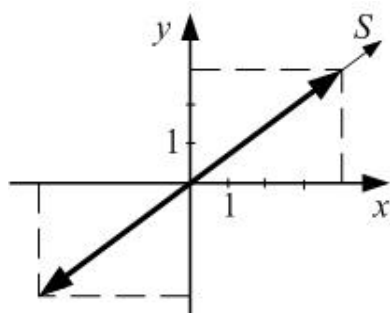


Рис.2.4

3. На вертикально отклоняющие пластины осциллографа подано напряжение  $U_y = 3\cos(\omega t + \pi/3)$ , на горизонтально отклоняющие – напряжение  $U_x = 4\cos(\omega t + \pi/3)$  (напряжение – в вольтах, время – в се-



кундах). Частота 50 Гц. Написать уравнение результирующего колебания. Нарисовать траекторию луча на экране.

Ответ: рис.2.4; уравнение траектории  $y = \frac{3x}{4}$ , уравнение колебания  $S = 5 \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$ .

3. Складываются два взаимно перпендикулярных колебания, выражаемых уравнениями  $x = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t)$  и  $y = A_2 \cdot \cos(\omega \cdot (t + \tau))$ , где  $A_1 = 2 \text{ м}$ ;  $A_2 = 1 \text{ м}$ ;  $\omega = \pi \text{ рад/с}$ ;  $\tau = 0.5 \text{ с}$ . Найти уравнение траектории точки и построить её, показав направление движения точки.

Ответ:  $y = -\frac{x}{2}$ .

5. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями  $x = A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t)$  и  $y = A_2 \cdot \cos(\omega \cdot (t + \tau))$ , где  $A_1 = 4 \text{ м}$ ;  $A_2 = 8 \text{ м}$ ;  $\omega = \pi \text{ рад/с}$ ;  $\tau = 1 \text{ с}$ . Найти уравнение траектории и построить её.

Ответ:  $y = -2x$ .

6. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями  $x = A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t)$  и  $y = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ , где  $A_1 = 2 \text{ м}$ ;  $A_2 = 1 \text{ м}$ . Найти уравнение траектории точки и построить её, указав направление движения точки.

Ответ:  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  (эллипс), движение против часовой стрелки.

7. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями  $x = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t)$  и  $y = A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ , где  $A_1 = 0.5 \text{ м}$ ;  $A_2 = 2 \text{ м}$ . Найти уравнение траектории точки и построить её, указав направление движения точки.

Ответ:  $4x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  (эллипс), движение по часовой стрелке.

8. Движение луча осциллографа по экрану происходит по закону  $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi)$ ,  $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$  (рис.2.5). Для удобства измерений перед экраном помещена квадратная сетка. Определите по рисунку сдвиг фаз колебаний  $\Delta\varphi = 2\varphi$ .

Ответ: а)  $\Delta\varphi \approx 64^\circ$ , б)  $\Delta\varphi \approx 77^\circ$ , в)  $\Delta\varphi \approx 13^\circ$ .

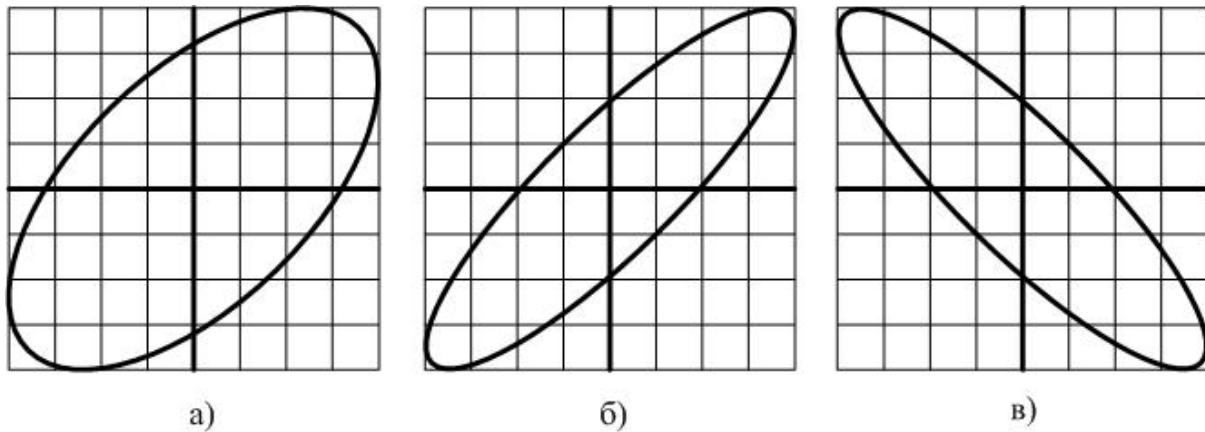


Рис. 2.5

9. В условиях задачи 8 определите, при каком значении  $\varphi$  на экране виден отрезок; окружность. Докажите, что в случае произвольного постоянного  $\varphi$  след луча на экране представляет собой эллипс с полуосями, лежащими на диагоналях квадрата. Найдите эти полуоси.

Ответ: при  $\varphi = \frac{\pi \cdot n}{2}$ , где  $n$  – целое число, виден отрезок; при  $\varphi = \pm \frac{\pi}{4} + \pi \cdot n$  видна окружность. Полуоси эллипса  $a = \sqrt{2} \cdot A \cdot \cos \varphi$  и  $b = \sqrt{2} \cdot A \cdot \sin(\varphi)$ .

### Пример решения задачи

На вертикально отклоняющие пластины осциллографа поданы напряжения:  $U_{y1}=10\sin(\omega t-\pi/6)$ , и  $U_{y2}=5\cos(\omega t)$ , на горизонтально отклоняющие пластины – напряжение  $U_x=8.66\cos(\omega t)$  (напряжение – в вольтах, время – в секундах). Определить траекторию луча на экране.

#### Решение

Дано:

$$U_{y1}=10\sin(\omega t-\pi/6)$$

$$U_{y2}=5\cos(\omega t)$$

$$U_x=8.66\cos(\omega t)$$

Найти:

$$y=f(x)$$

Сложим колебания, направленные вдоль одной прямой – оси ОУ:

$$U_{y1}=10\sin(\omega t-\pi/6)=10\cos(\omega t-\pi/6-\pi/2)=10\cos(\omega t-2\pi/3) \text{ и } U_{y2}=5\cos(\omega t).$$

Результирующее колебание

$$U_y = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

имеет ту же частоту, а амплитуда и начальная фаза его определяются формулами:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})};$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}},$$

где  $A_1=10$  В,  $A_2=5$  В,  $\varphi_{01} = -\frac{2\pi}{3}$ ,  $\varphi_{02} = 0$ . Получим:

$$A = \sqrt{10^2 + 5^2 + 2 \cdot 10 \cdot 5 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{125 + 100 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{75} \approx 8.66 \text{ Å};$$

$$\phi_0 = \arctg \frac{10 \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + 5 \sin 0}{10 \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + 5 \cos 0} = \arctg \frac{5}{-5 + 5} = \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Теперь можно сложить два перпендикулярных колебания:

$U_y = 8.66 \cdot \cos(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$  и  $U_x = 8.66 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ . При этом точка движется в плоскости XY по траектории, описываемой формулой:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\Delta \phi) = \sin^2(\Delta \phi),$$

где  $A_1 = 8.66 \text{ Å}$ ,  $A_2 = 8.66 \text{ Å}$ ,  $\phi_{01} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi_{02} = 0$ .

Получим:

$$\frac{x^2}{8.66^2} + \frac{y^2}{8.66^2} - 2 \frac{xy}{8.66^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

или

$$\frac{x^2}{8.66^2} + \frac{y^2}{8.66^2} = 1;$$

и окончательно:

$$x^2 + y^2 = 8.66^2.$$

Это – уравнение окружности радиусом  $R=8.66$  (В) (см.рис.2.6).

**Ответ:**  $x^2 + y^2 = 8.66^2$ .

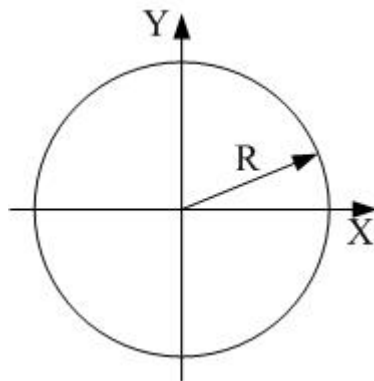


Рис. 2.6

Сделать выводы по проведенной лабораторной работе.

### Библиографический список

1. Трофимова, Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов /Т.И. Трофимова. - М. : Высш. шк., 1990.-С.227-229.
2. Детлаф, А.А. Курс физики: учебное пособие для втузов /А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. - М.: Высш. шк., 2002.-С. 365-367.
3. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями: учебное пособие для втузов/Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова. - М.: Высш. шк., 2002.- С.332-334.

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3**  
**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА СЛОЖЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ**  
**КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛОГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ.**  
**МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ СЛОЖЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ,**  
**ОТЛИЧАЮЩИХСЯ ПО ЧАСТОТЕ**

*Цель работы:*

1. Изучить физические основы процесса сложения двух гармонических колебаний разной частоты, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям.
2. Провести моделирование процесса сложения колебаний.
3. Исследовать параметры: соотношение частот и фаз складываемых колебаний.
4. В выводах по проведённым исследованиям представить формы наблюдаемых осциллограмм.

**Состав моделируемой электрической цепи:**

- генератор сигналов синусоидальной формы для отклоняющих пластин X осциллографа;
- генератор сигналов синусоидальной формы для отклоняющих пластин Y осциллографа;
- электронный осциллограф.

**Краткие сведения из теории**

Лабораторная работа выполняется после проведения работы по сложению ортогональных гармонических колебаний при их амплитудно-фазовом рассогласовании.

При измерении генератор развёртывающего напряжения осциллографа отключают. На пластины «X» подают одно из гармонических колебаний: исследуемое, либо колебание, частоту которого следует определить. На пластины «Y» подают второе колебание:

$$\begin{cases} X = A \cdot \sin(p\omega \cdot t + \varphi_1) \\ Y = B \cdot \sin(q\omega \cdot t + \varphi_2) \end{cases}$$

где  $p$  и  $q$  – целые числа, лежащие в интервале от 0 до 10.

Значения координат светового пятна одновременно повторяются через равные промежутки времени  $T_0$ . Промежуток времени  $T_0$  равен общему наименьшему кратному периодов:

$$T_1 = \frac{2\pi}{p \cdot \omega} \text{ и } T_2 = \frac{2\pi}{q \cdot \omega} - \text{периоды колебаний вдоль осей «X» и «Y»}.$$

Для получения неподвижной фигуры необходимо регулировать известную частоту генератора. Неподвижные фигуры на экране соответствуют соотношению:

$$\frac{f_y}{f_x} = \frac{q}{p}.$$

Пример получения осциллограмм при соотношении частот  $\frac{f_y}{f_x} = \frac{2}{1}$  приведён на рисунке 3.1.

Способ построения фигур целесообразно применять при кратности частот  $\frac{q}{p} \leq 10$ . Соотноше-

ние частот можно определить по виду фигуры, найдя мак-

симальное число точек её пересечения с горизонтальной и вертикальной прямыми. Отношение частот  $\frac{f_y}{f_x}$  равно отношению числа точек пересечения с прямой, параллельной оси «X», к числу точек пересечения с прямой, параллельной оси «Y»:

$$\frac{q}{p} = \frac{f_y}{f_x} = \frac{n_x}{n_y} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}.$$

Погрешность способа зависит от стабильности исследуемых колебаний. Как правило, в области низких частот фигура медленно вращается в ту или другую сторону. Можно измерить время её полного оборота и ввести поправку.

$$\Delta f = \pm \frac{1}{T_{\text{ид.}}},$$

где  $T$ - период медленного вращения.

Знак поправки можно определить, изменяя значение частоты в сторону увеличения и в сторону уменьшения. Так, если изменение частоты в сторону увеличения приводит к вращению в обратную сторону, то знак добавки отрицательный; если фигура стала вращаться быстрее, знак – положительный.

### Порядок выполнения работы

**Задание № 1.** Провести моделирование процесса сложения ортогональных гармонических колебаний. Синтезировать схему, состоящую из генерато-

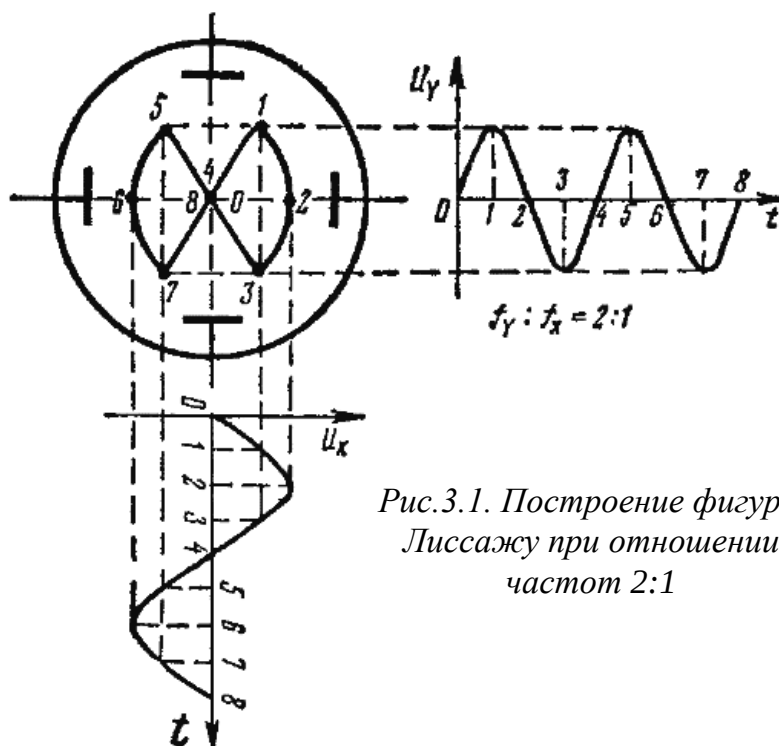


Рис.3.1. Построение фигуры Лиссажу при отношении частот 2:1

ров синусоидальных сигналов, подключенных к входам «X» и «Y» осциллографа.

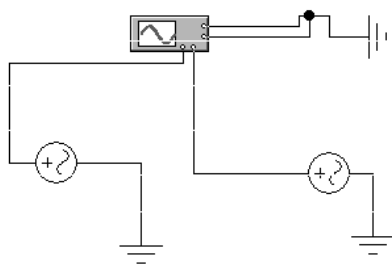


Рис. 3.2. Схема к заданию 1

Схема (рис.3.2) состоит из осциллографа и двух генераторов низкой частоты синусоидальной формы. Сначала необходимо поставить два генератора переменного синусоидального тока: выбираем на панели значок AC Voltage Source и повторяем эту процедуру ещё раз. Затем нам необходимо поставить осциллограф: выбираем на панели

инструментов значок Instruments, а с вложенной панели перемещаем значок Oscilloscope. Теперь нужно подключить генераторы к осциллографу: курсор мыши наводим на клемму генератора так, чтобы появилась чёрная точка, зажимаем левую кнопку мыши, затем протягиваем провод к осциллографу (таким образом, подключаем оба генератора). Для того чтобы эта схема работала, её нужно заземлить.

Подключаем заземление. Схема собрана. Теперь необходимо установить параметры генераторов, проставляем значения: амплитуду (voltage) 5 В; частоту (frequency) на одном 20 кГц, на другом 40 кГц; фазу (phase) 30 градусов. Теперь можно включить выключатель в правом верхнем углу, чтобы начать процесс моделирования. После включения схемы нужно настроить осциллограф. Все данные занесите в таблицу 3.1.

Таблица 3.1

| Генератор 1  |               |             | Генератор 2  |               |             | Вид фигуры на экране |
|--------------|---------------|-------------|--------------|---------------|-------------|----------------------|
| Частота (Гц) | Амплитуда (В) | Фаза (град) | Частота (Гц) | Амплитуда (В) | Фаза (град) |                      |
| 20000        | 5             | 0           | 40000        | 5             | 30          |                      |
| 10000        | 5             | 0           | 30000        | 5             | 0           |                      |
| 40000        | 5             | 0           | 10000        | 5             | 0           |                      |
| 20000        | 5             | 0           | 40000        | 5             | 0           |                      |
| 10000        | 5             | 0           | 80000        | 5             | 0           |                      |

### Задание № 2. Решить задачу.

1. Точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями: 
$$\begin{cases} X = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ Y = A \cdot \sin(2\omega \cdot t) \end{cases}$$
 Определите уравнение траектории точки и чертите её с нанесением масштаба (аналогично рис.3.1).

2. Точка, гармонически колеблющаяся по осям  $x$  и  $y$ , описывает линии, которые называются фигурами Лиссажу. Докажите, что если частоты относятся как целые числа, то эти фигуры – замкнутые кривые. Какой вид они имеют при равных частотах?

Ответ: если  $\frac{T_x}{T_y} = \frac{N_x}{N_y}$ , где  $N_x$  и  $N_y$  – целые числа, то за время

$t = N_x \cdot T_y = N_y \cdot T_x$  точка вернётся к тем же значениям  $x$  и  $y$ .

При  $T_y = T_x$  получится эллипс.

3. Докажите, что если амплитуда колебаний по  $x$  равна  $A$ , а по  $y$  –  $B$ , то фигура Лиссажу вписывается в прямоугольник со сторонами  $2A$  по  $x$  и  $2B$  по  $y$ . Пусть фигура касается горизонтальных сторон этого прямоугольника в  $N_x$  точках, а вертикальных – в  $N_y$  (например, для фигуры на рис.3.3  $N_x = 3$ ,  $N_y = 2$ ). Как относятся частоты?

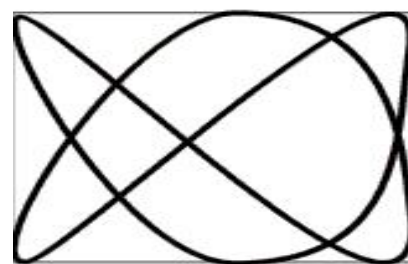


Рис. 3.3

Ответ:  $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{N_y}{N_x}$ .

4. Найти уравнение траектории  $y=f(x)$  точки, если она движется по закону:  
а)  $x = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ,  $y = A \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$ ; б)  $x = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ,  $y = A \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t)$ .

Изобразить примерные графики траекторий.

Ответ: а)  $y^2 = 4x^2 \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)$ ; б)  $y = A \left(1 - \frac{2x^2}{A^2}\right)$ .

5. Смещение светящейся точки на экране осциллографа является результатом сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний, которые описываются уравнениями:

1)  $x = A \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t)$ ,  $y = A \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$ ;

2)  $x = A \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t)$ ,  $y = A \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t)$ ;

3)  $x = A \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t)$ ,  $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$ .

Применяя графический метод сложения и соблюдая масштаб, построить траекторию светящейся точки на экране. Принять  $A = 4$  мм.

6. На горизонтально отклоняющие пластины осциллографа подано напряжение  $U_x = 2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ , на вертикально отклоняющие – напряжение  $U_y = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \omega \cdot t\right)$  (напряжение – в вольтах, время – в секундах). Найти уравнение траектории  $y=f(x)$  движения точки на экране, Изобразить график траектории.

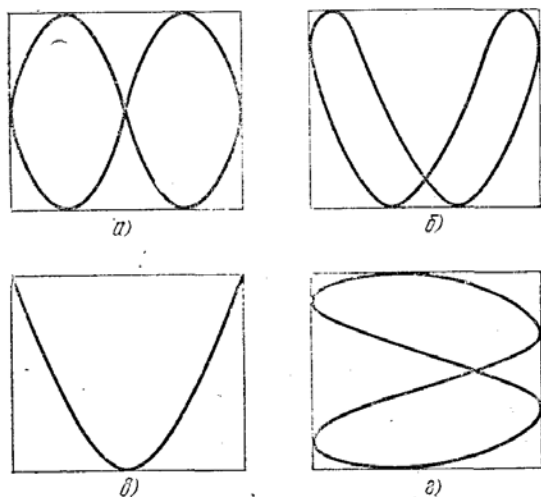


Рис. 3.4

7. На пластины  $x$  и  $y$  осциллографа подаются гармонические сигналы, и на экране видны картинки, изображённые на рис.3.4. Найдите отношение периодов колебаний по осям  $x$  и  $y$  в случаях а) ÷ г).

Ответ:  $\frac{T_x}{T_y} = \frac{1}{2}$  в случаях а), б) и в);  
 $\frac{T_x}{T_y} = \frac{2}{1}$  в случае г).

### Пример решения задачи

Дано:

$$U_y = 2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$U_x = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\omega \cdot t\right)$$

Найти:

$$y=f(x)$$

На вертикально отклоняющие пластины осциллографа подано напряжение  $U_y = 2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ , на горизонтально отклоняющие – напряжение  $U_x = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\omega \cdot t\right)$  (напряжение – в вольтах, время – в секундах). Найти траекторию луча на экране.

Решение

Запишем координату  $y$  точки на экране как косинус двойного угла:

$$y = 2 \cdot \cos(\omega \cdot t) = 2 \left( 2 \cdot \cos^2\left(\frac{1}{2}\omega \cdot t\right) - 1 \right). \quad (3.1)$$

Для координаты  $x$ :  $x = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\omega \cdot t\right)$ , откуда

$$\cos\left(\frac{1}{2}\omega \cdot t\right) = \frac{x}{2}. \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) получим:

$$y = 2 \left( 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 \right) = x^2 - 2$$

Ответ:  $y = x^2 - 2$  (рис.3.5; часть параболы, ограниченная квадратом со сторонами  $\Delta U_x = 4 \text{ В}$  по  $x$  и  $\Delta U_y = 4 \text{ В}$  по  $y$ ).

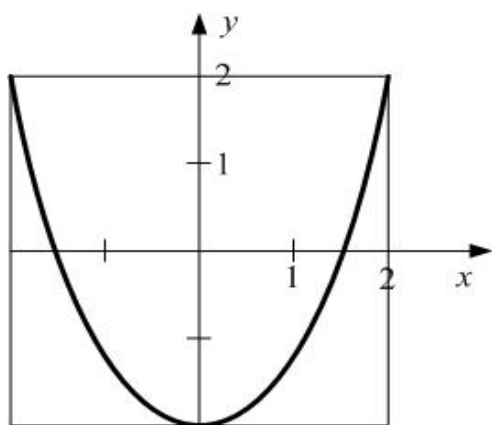


Рис.3.5

Сделать выводы по проведенной лабораторной работе.



## Библиографический список

1. Трофимова, Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - М.: Высшая шк., 1990. - С. 227-229.
2. Детлаф, А.А. Курс физики: учебное пособие для втузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. - М.: Высш.шк., 2002. - С. 365-367.
3. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями: учеб. пособие для втузов / Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова. - М.: Высшая школа, 2002. - С. 333-334.

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЗАРЯДА И РАЗРЯДА КОНДЕНСАТОРА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЕГО В RC ЦЕПЯХ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ЗАРЯДА И РАЗРЯДА КОНДЕНСАТОРА В ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИХ И ИНТЕГРИРУЮЩИХ ЦЕПЯХ

*Цель работы:*

1. Изучить физические основы накопления заряда конденсатором в RC-цепи на основе применения закона Кирхгофа.
2. Исследовать процесс изменения тока и напряжения в переходный период при воздействии перепада напряжения.
3. В выводах по проведенной работе представить формы и параметры наблюдаемых осциллограмм.

#### Состав моделируемой электрической цепи:

- генератор прямоугольных импульсов;
- электронный осциллограф;
- RC цепь с переменными параметрами.

#### Краткие сведения из теории

##### Включение конденсатора на постоянное напряжение

После включения цепи, схема которой изображена на рис.4.1, начинается зарядка конденсатора. По второму правилу Кирхгофа

$$\mathcal{E} \equiv U = U_c + i \cdot R. \quad (4.1)$$

В процессе зарядки напряжение  $U_c$  между обкладками конденсатора увеличивается, а зарядный ток

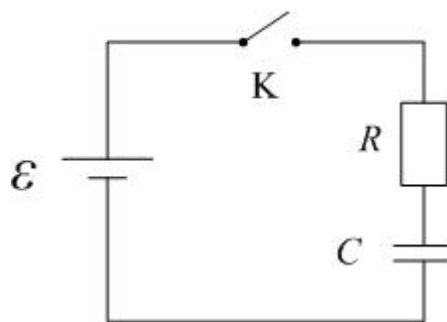


Рис.4.1. Схема зарядки конденсатора

$$i = \frac{U - U_c}{R}$$

уменьшается. Сила тока по определению

$$i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU_c}{dt}, \quad (4.2)$$

так как  $q = CU_c$ .

Таким образом, ток в цепи пропорционален скорости изменения напряжения на емкости. Закон изменения напряжения на конденсаторе и зарядного тока можно найти, решив дифференциальное уравнение:

$$U = U_c + R \cdot C \cdot \frac{dU_c}{dt}.$$

После разделения переменных это уравнение записывается так:

$$\frac{dU_c}{U - U_c} = \frac{dt}{R \cdot C}.$$

Интегрирование и последующие преобразования приводят к решению:

$$U_c = U + K \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}},$$

где  $K$  – постоянная интегрирования, которая находится из граничного условия: в начальный момент времени конденсатор не заряжен, поэтому при  $t = 0$   $U_c = 0$ . Тогда  $K = -U$ . Закон изменения напряжения на емкости с учетом этого значения  $K$ :

$$U_c = U \left( 1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \right).$$

Вычислим зарядный ток:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU_c}{dt} = \frac{CU}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}.$$

Кривые зависимости напряжения  $U_c$  и зарядного тока  $i$  от времени даны на рисунке 4. 2.

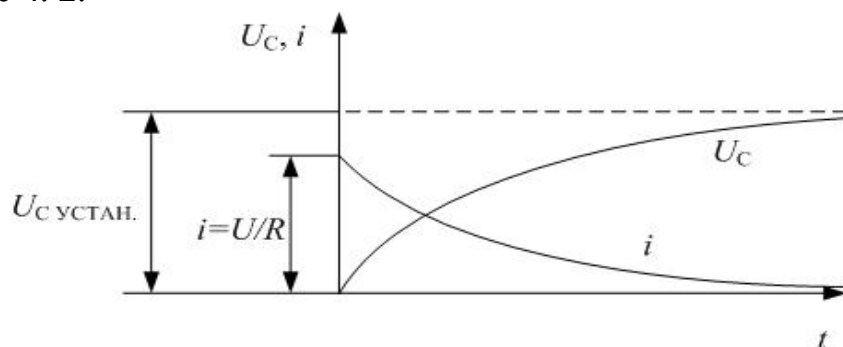


Рис.4.2. Графики тока и напряжения на емкости в переходный период после включения конденсатора на постоянное напряжение

Скорость увеличения напряжения на емкости и скорость уменьшения тока в течение переходного периода непрерывно снижаются. Напряжение  $U_c$  асимптотически стремится к установившемуся значению  $U$ , а зарядный ток к нулю. Теоретически переходный процесс продолжается бесконечно долго ( $U_c = U$  и  $i = 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ).

Скорость изменения напряжения  $U_c$  и зарядного тока  $i$  зависит от произведения  $RC = \tau$ , которое является постоянной времени для рассматриваемой цепи. Чем больше постоянная времени, т.е. чем больше сопротивление  $R$  и емкость  $C$ , тем медленнее заряжается конденсатор. Процесс зарядки считается законченным к исходу промежутка времени  $t = 4 \cdot \tau$ .

### Разряд конденсатора на активное сопротивление

Емкость, заряженная до напряжения  $U_c = U$ , отключается от источника энергии и одновременно ее обкладки замыкаются на сопротивление  $R$ , с этого момента начинается ее разряд (рис.4.3). Полагая в формуле (4.1) напряжение источника  $U=0$ , получим:

$$0 = U_c + R \cdot i; \quad R \cdot i = -U_c. \quad (4.3)$$

Знак «минус» в этой формуле показывает, что направление тока в емкости изменилось по сравнению с процессом зарядки. Изменение направления тока говорит о том, что заряженная емкость начала разряжаться, приняв на себя роль источника энергии с напряжением на зажимах  $U_c$ . Ток в цепи теперь является разрядным током емкости. В элементе цепи с сопротивлением  $R$  электрическая энергия преобразуется в тепловую, а запас энергии электрического поля уменьшается. Из (4.3) и (4.2) получим:

$$i = C \cdot \frac{dU_c}{dt} = -\frac{U_c}{R},$$

или 
$$\frac{dU_c}{U_c} = -\frac{dt}{RC}.$$

Интегрируя обе части и учитывая начальные условия ( $U_c = U$  при  $t = 0$ ), получим

$$U_c = U \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad \text{Разрядный ток}$$

$$i = -\frac{U_c}{R} = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad \text{На рис. 4.4}$$

показаны графики изменения

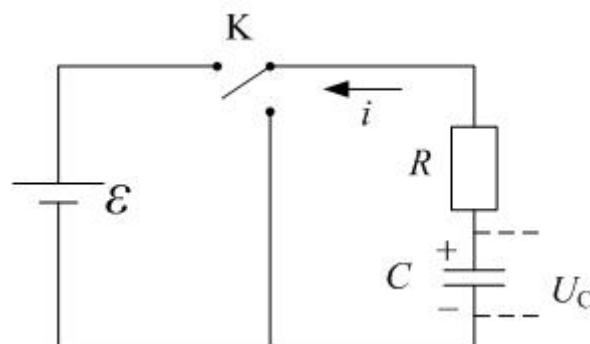


Рис.4.3. Схема разряда конденсатора на элемент цепи с активным сопротивлением

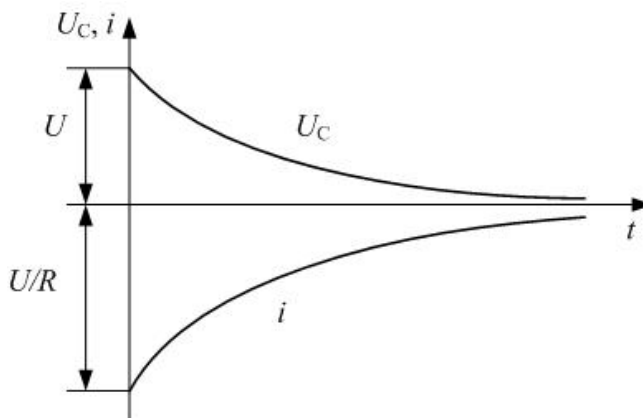


Рис. 4.4. Графики напряжения на емкости и тока в цепи при разрядке конденсатора на активное сопротивление

напряжения  $U_C$  и тока при разрядке.

Установившиеся значения напряжения и тока в цепи равны нулю, так как емкость отключена от источника электрической энергии.

При обработке импульсных сигналов наиболее широкое применение получили электрические RC-цепи. В настоящее время они используются в различных импульсных устройствах, системах автоматического регулирования, в вычислительной технике. При определенных условиях напряжение на выходе такой цепи определяется как производная от входного напряжения по времени (дифференцирующая цепь), либо как накопление заряда по времени (интегрирующая цепь).

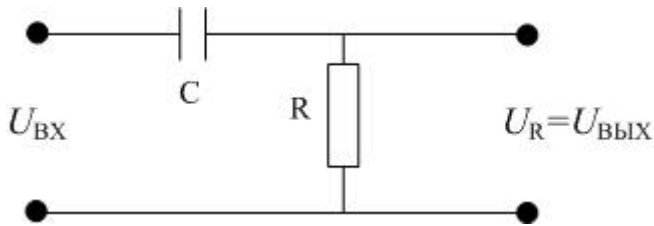


Рис. 4.5. Дифференцирующая цепь

Рассмотрим RC-цепь, представленную на рисунке 4.5. Составим дифференциальное уравнение для цепи в соответствии с законом Кирхгофа:

$$U_{\hat{A}\hat{O}}(t) = U_R(t) + U_C(t),$$

т.е. приложенное к цепи напряжение  $U_{\hat{A}\hat{O}}$  должно быть равно сумме

падений напряжений на  $C$  и  $R$ .

Заряд конденсатора равен  $q = C \cdot U_C$ , ток в цепи  $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}$ , падение напряжения на резисторе  $R$ :  $U_R = i \cdot R = RC \frac{dU_C}{dt}$ , откуда получим

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{U_R}{RC}, \quad (4.4)$$

Продифференцируем  $U_{\hat{A}\hat{O}}(t)$ :  $\frac{dU_{\hat{A}\hat{O}}}{dt} = \frac{dU_C}{dt} + \frac{dU_R}{dt}$ , с учётом (4.4):

$$\frac{dU_{\hat{A}\hat{O}}}{dt} = \frac{U_R}{RC} + \frac{dU_R}{dt}. \quad (4.5)$$

Произведение  $RC$  имеет размерность времени и обозначается  $\tau$  (постоянная времени).

$$[\tau] = [RC] = \hat{I} \cdot \hat{O} = \frac{\hat{A}}{\hat{A}} \cdot \frac{\hat{E}\ddot{e}}{\hat{A}} = \frac{\hat{E}\ddot{e}}{\hat{A}} = \frac{\hat{A} \cdot \hat{n}}{\hat{A}} = \hat{n}$$

Можно подобрать величину  $\tau = RC$  малой, чтобы пренебречь вторым членом правой части равенства (4.5), тогда получим:

$$U_R \approx RC \frac{dU_{\hat{A}\hat{O}}}{dt},$$

т.е. напряжение, снимаемое с резистора  $R$ , пропорционально производной от  $U_{\hat{A}\hat{O}}$  по времени.

Рассмотрим RC-цепь, представленную на рисунке 4.6. При определенных условиях напряжение на выходе цепи пропорционально интегралу от входного напряжения. По аналогии с предыдущим случаем имеем:

$$U_{\text{АО}} = U_C + U_R.$$

Поскольку

$$U_R = R \cdot i = R \cdot \frac{dq}{dt} = R \cdot \frac{d(C \cdot U_C)}{dt} = RC \frac{dU_C}{dt},$$

то

$$U_{\text{АО}} = U_C + RC \frac{dU_C}{dt},$$

или

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = \frac{U_{\text{АО}}}{RC}.$$

Можно подобрать произведение  $RC$  настолько большим, что вторым членом в левой части предыдущего равенства можно будет пренебречь:

$$\frac{dU_C}{dt} \approx \frac{U_{\text{АО}}}{RC},$$

откуда

$$U_C = \frac{1}{RC} \int_0^t U_{\text{АО}} dt,$$

т.е. напряжение на выходе цепи пропорционально интегралу от входного напряжения. Последнее равенство показывает, что при увеличении постоянной времени цепи  $\tau = RC$  возрастает точность интегрирования, но при этом уменьшается амплитуда выходного напряжения.

### Порядок выполнения работы

**Задание № 1.** Исследовать дифференцирующую RC-цепь при различных значениях параметров входного напряжения и параметров RC-цепи.

Импульсный генератор на входе создает условия воздействия перепадов напряжения, аналогичные включению и выключению цепи.

Составить электрическую цепь (рис.4.7).

Задать параметры цепи. Настроить осциллограф. Получить на экране осциллограмму. Заполнить таблицу измерений 4.1.

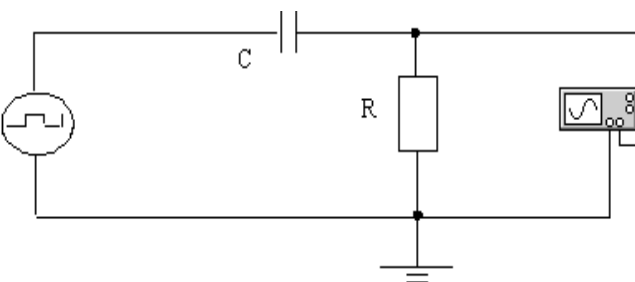


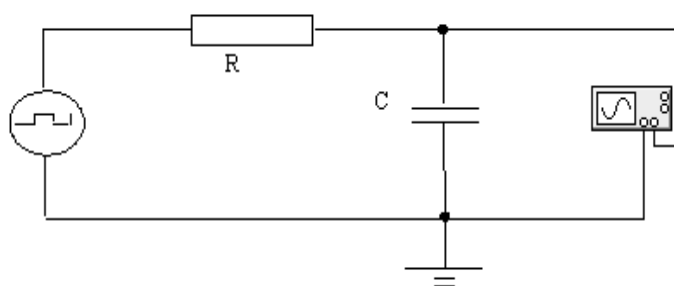
Рис. 4.7. Схема к заданию 1

Провести 4 – 5 измерений для различных значений параметров цепи.

Таблица 4.1

| №  | Частота следования импульсов генератора $f_{\text{ГГц}}$ , Гц | Параметры цепи |                    | Постоянная времени $\tau = RC$ , с | Осциллограмма выходного напряжения |
|----|---------------------------------------------------------------|----------------|--------------------|------------------------------------|------------------------------------|
|    |                                                               | R, Ом          | C, Ф               |                                    |                                    |
| 1. | 100 Гц                                                        | 1000           | $1 \cdot 10^{-11}$ | $10^{-2}$                          |                                    |
| 2. |                                                               | 2000           | $2 \cdot 10^{-11}$ |                                    |                                    |
| 3. |                                                               | 5000           | $5 \cdot 10^{-11}$ |                                    |                                    |
| 4. | 1000 Гц                                                       | 1000           | $1 \cdot 10^{-11}$ |                                    |                                    |
| 5. |                                                               | 5000           | $5 \cdot 10^{-11}$ |                                    |                                    |

**Задание № 2.** Исследовать интегрирующую RC-цепь при различных значениях параметров входного воздействия и параметров RC-цепи.



Составить электрическую цепь (рис.4.8).

Задать параметры цепи. Настроить осциллограф. Получить на экране осциллограмму.

Заполнить таблицу измерений 4.2.

Рис. 4.8. Схема к заданию 2

Таблица 4.2

| №  | Частота следования импульсов генератора $f_{\text{ГГц}}$ , Гц | Параметры цепи |                   | Постоянная времени. $\tau = RC$ , с | Осциллограмма выходного напряжения |
|----|---------------------------------------------------------------|----------------|-------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
|    |                                                               | R, Ом          | C, Ф              |                                     |                                    |
| 1. | 1000 Гц                                                       | 1000           | $1 \cdot 10^{-6}$ |                                     |                                    |
| 2. |                                                               | 5000           | $2 \cdot 10^{-6}$ |                                     |                                    |
| 3. |                                                               | 8000           | $4 \cdot 10^{-6}$ |                                     |                                    |
| 4. | 100 Гц                                                        | 5000           | $4 \cdot 10^{-6}$ |                                     |                                    |
| 5. |                                                               | 8000           | $4 \cdot 10^{-6}$ |                                     |                                    |

Провести 4 – 5 измерений для различных значений параметров цепи.

**Задание № 3.** Разобрать решение задачи и ответить на дополнительные вопросы к задаче.

**Задача.** Конденсатор емкостью  $C = 10 \text{ мкФ}$  заряжается через активное сопротивление  $R = 9 \text{ Ом}$  по схеме (рис.4.9) от источника электрической энергии с ЭДС  $\mathcal{E} = 100 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $r_0 = 1 \text{ Ом}$  (на схеме не показано). Через промежуток времени, равный удвоенному значению постоянной времени цепи зарядки  $t = 2\tau_C$ , произведено переключение, и конденсатор начал разряжаться на то же сопротивление  $R$ . Определить энергию, израсходованную в элементе цепи с сопротивлением  $R$  за время зарядки и разрядки конденсатора.

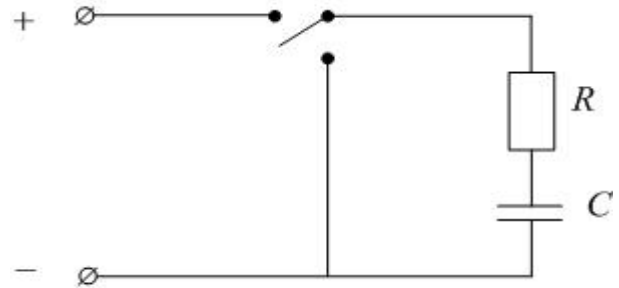


Рис. 4.9. Схема к заданию 2

### Решение

Закон изменения напряжения на конденсаторе в процессе зарядки:

$$U_C = \mathcal{E} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}} \right).$$

К моменту  $t = 2\tau_C$  переключения напряжение  $U_C$  достигает значения:

$$U_C = \mathcal{E} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{2\tau_C}{\tau_C}} \right) = \mathcal{E} \cdot (1 - e^{-2}) = 100 \cdot 8.8647 = 86.47 \text{ В}.$$

Закон изменения тока в процессе зарядки конденсатора:

$$i_3 = \frac{\mathcal{E}}{R + r_0} e^{-\frac{t}{\tau_C}} = \frac{100}{9 + 1} e^{-\frac{t}{\tau_C}} = 10 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_C}}$$

Энергия, израсходованная в сопротивлении  $R$  при зарядке конденсатора:

$$W_1 = \int_0^{2\tau_3} i_3^2 R dt = R \int_0^{2\tau_3} i_3^2 dt;$$

$$W_1 = 9 \cdot 10^2 \cdot \int_0^{2\tau_3} e^{-\frac{2t}{\tau_C}} dt;$$

$$W_1 = -\frac{900 \cdot \tau_3 \cdot e^{-\frac{2t}{\tau_C}}}{2} = 450 \cdot \tau_3 \cdot (1 - e^{-4}) = 450 \cdot \tau_3 \cdot (1 - 0.01832).$$

$$\tau_3 = (R + r_0) \cdot C = (9 + 1) \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 10^{-4} \text{ с}; \quad W_1 \approx 450 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

При разрядке конденсатора энергия, израсходованная в элементе цепи с сопротивлением  $R$ , равна убыли энергии электрического поля конденсатора в одно и то же время. Энергия электрического поля к концу зарядки конденсатора:

$$W_{\dot{\gamma}} = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{10 \cdot 10^{-6} \cdot 86.47^2}{2} = 375 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Вся эта энергия выделяется в виде тепла в сопротивлении  $R$  при разрядке конденсатора. Таким образом, общая энергия, выделенная в сопротивлении  $R$  при зарядке и разрядке, составляет

$$W = W_1 + W_{\dot{\gamma}} = (450 + 375) \cdot 10^{-4} = 825 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Определить энергию, выделенную в сопротивлении  $R$ , если конденсатор заряжался в течение времени  $t = 3\tau_3$ , а разряжался в течение времени  $t_{\delta} = 2\tau_{\delta}$ ; после чего цепь разрядки была разомкнута;  $\tau_3$  и  $\tau_{\delta}$  – постоянные времени цепи при зарядке и разрядке конденсатора.
2. Определить скорость изменения напряжения на конденсаторе при зарядке в начальный момент времени  $t = 0$  и при  $t = \tau_3$ .
3. Определить скорость изменения тока при разрядке конденсатора в начальный момент времени  $t = 0$  и при  $t = \tau_p$ .

**Задание № 4.** Решить задачу.

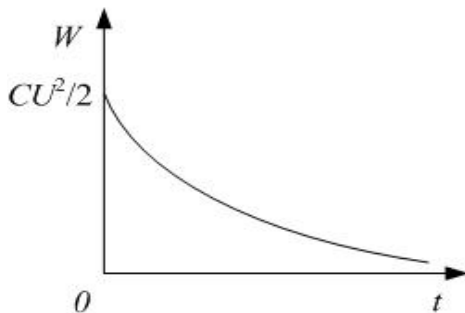


Рис. 4.10

1. Конденсатор емкостью  $C$  заряжен до разности потенциалов  $U$  и разряжается через сопротивление  $R$ . Найти, как меняется со временем энергия конденсатора  $W$ . Выразить эту зависимость аналитически и графически.

Ответ:  $W = \frac{C \cdot U^2}{2} \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot t}{RC}\right)$ , рис.4.10.

2. Конденсатор емкостью  $C=1$  мкФ разряжается через сопротивление  $R=1000$  Ом. Через какое время  $t$  от начала разрядки напряжение на пластинах конденсатора уменьшится вдвое?

Ответ:  $t = 6.9 \cdot 10^{-4}$  с.

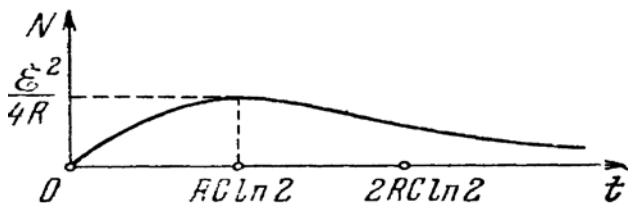


Рис. 4.11

3. Конденсатор емкостью  $C$  заряжается от батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$  через сопротивление  $R$ . Определить, как меняется со временем мощность  $N$ , подводимая к конденсатору. Построить график зависимости  $N$  от времени  $t$ .

Ответ:  $N = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ , рис.4.11.



4. Конденсатор емкостью  $C$  заряжается через сопротивление  $R$  до разности потенциалов, равной ЭДС заряжающей батареи  $\mathcal{E}$ : 1) определить энергию  $Q$ , переходящую в тепло при зарядке; 2) определить КПД установки, заряжающей конденсатор (полезная энергия – энергия, накопленная в конденсаторе).

$$\text{Ответ: } Q = \int_0^{\infty} I^2 R dt = \frac{I_0^2 \cdot R^2 \cdot C}{2} = \frac{\mathcal{E}^2 \cdot C}{2}; \quad \eta = \frac{1}{2}.$$

5. В предыдущей задаче предполагалось, что начальный ток, т.е. ток в момент включения,  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ . Между тем до замыкания цепи ток был равен нулю. Следовательно, после замыкания цепи должен был бы мгновенно установиться ток  $I_0$ . Возможен ли такой скачок в реальных условиях?

Ответ: полученный при решении предыдущей задачи результат, что ток мгновенно возрастает от нуля до  $I_0$ , объясняется пренебрежением индуктивностью цепи. В каждой реальной цепи есть хотя бы малая индуктивность,

вследствие чего возрастание тока до  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$  не будет мгновенным. Если индуктивность достаточно мала, то нарастание тока будет протекать так быстро, что во многих случаях его можно рассматривать как мгновенный скачок.

6. На рис. 4.12 показана простейшая схема сглаживающего фильтра. На вход подают напряжение  $U_1 = U_0 \cdot (1 + \cos(\omega \cdot t))$ . Найдите напряжение на выходе как функцию времени  $U_2 = f(t)$ .

Ответ:  $U_2 = U_0 + U_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t - \alpha)$ , где

$$U_{\max} = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\omega \cdot RC)^2}},$$

$$\alpha = \arctg(\omega \cdot RC).$$

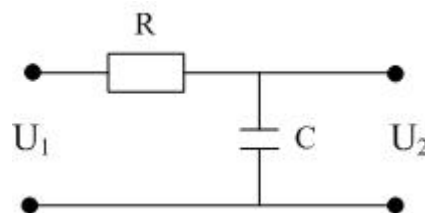


Рис. 4.12

9. Для передачи только переменной составляющей напряжения  $U_1$  в цепь включен конденсатор  $C$  (рис. 4.13). Напряжение  $U_2$  снимается с сопротивления  $R$ . Определить наименьшую величину емкости конденсатора из условия, что потери напряжения должны быть не более 5% в диапазоне частот от 50 до 10000 Гц. Сопротивление  $R = 0.5$  МОм.

Ответ:  $\tilde{N} = 0.1 \cdot 10^6$ .

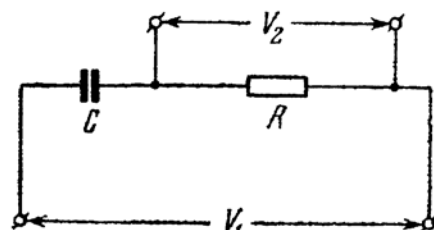


Рис. 4.13

## Пример решения задачи

В схеме, указанной на рис.4.14, один конденсатор зарядили до напряжения  $U_0$  и в момент времени  $t=0$  замкнули ключ. Найти ток в цепи как функцию времени.

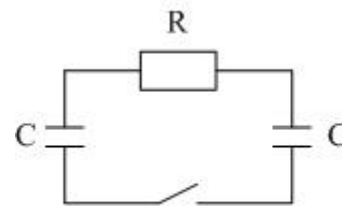


Рис. 4.14

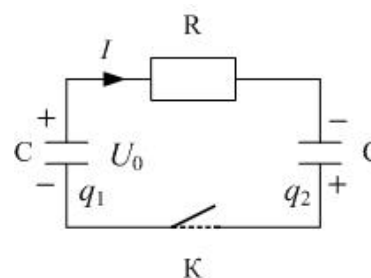


Рис. 4.15

Дано:

$U_0$

$R$

$C$

Найти:

$I=f(t)$

$U_{0L}=?$

Решение

По второму правилу Кирхгофа (направление обхода контура – против часовой стрелки на рис.4.15):

$$U_{\tilde{N}1} + U_{\tilde{N}2} + I \cdot R = 0, \quad (1)$$

или

$$I \cdot R = -U_{\tilde{N}1} - U_{\tilde{N}2} = -\frac{q_1}{C} - \frac{q_2}{C}. \quad (2)$$

По закону сохранения заряда

$$\tilde{N} \cdot U_0 = q_0 = q_1 - q_2 = \text{const}. \quad (3)$$

Тогда  $q_2 = q_1 - \tilde{N} \cdot U_0$ , и из (1) и (2) получим:

$$I \cdot R = -\frac{q_1}{C} - \frac{q_1 - \tilde{N} \cdot U_0}{C}, \text{ или}$$

$$I \cdot R = U_0 - \frac{2q_1}{C}. \quad (4)$$

Зависимость  $q_1 = f(t)$  будем искать в виде:

$$q_1 = A \cdot e^{Bt} + D. \quad (5)$$

Найдём силу тока как производную заряда конденсатора:

$$I = \frac{dq_1}{dt} = \left( A \cdot e^{Bt} + D \right)' = AB e^{Bt}. \quad (6)$$

Подставим силу тока из (6) и заряд  $q_1$  из (5) в (4):

$$AB e^{Bt} \cdot R = U_0 - \frac{2(A \cdot e^{Bt} + D)}{C}. \quad (7)$$

Равенство (7) должно быть тождеством для любого  $t$ , тогда

$$\begin{cases} ABR = -\frac{2A}{C} \\ 0 = U_0 - \frac{2D}{C} \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} B = -\frac{2}{RC} \\ D = \frac{CU_0}{2} \end{cases}. \quad (8)$$

Подставив (8) в (5), получим зависимость заряда  $q_1 = f(t)$  от времени:

$$q_1 = A \cdot e^{-\frac{2}{RC}t} + \frac{CU_0}{2}. \quad (9)$$

Константу  $A$  можно найти из граничного условия: при  $t=0$  заряд  $q_1 = q_0$ :

$$q_0 = A \cdot e^0 + \frac{CU_0}{2}, \text{ откуда } A = q_0 - \frac{CU_0}{2} = CU_0 - \frac{CU_0}{2} = \frac{CU_0}{2}.$$

Окончательно для заряда и для тока (6):

$$q_1 = \frac{CU_0}{2} \cdot e^{-\frac{2}{RC}t} + \frac{CU_0}{2} = \frac{CU_0}{2} \left( 1 + e^{-\frac{2}{RC}t} \right),$$

$$I = \frac{CU_0}{2} \cdot \left( -\frac{2}{RC} \right) e^{-\frac{2}{RC}t} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{2}{RC}t}.$$

Ответ:  $I = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{2}{RC}t}.$

В выводах по лабораторной работе отразить следующие вопросы:

1. Достижение цели лабораторной работы.
2. Соответствие полученных физических величин теоретическим соотношениям для закономерностей процессов заряда и разряда конденсатора.
3. Задать относительную погрешность элементов цепи  $R$  и  $C$  в пределах 10 –15% от номинала и оценить погрешность измерения постоянной времени.

### Библиографический список

1. Трофимова, Т.И. курс физики: учебное пособие для вузов/ Т.И. Трофимова – М.: Высшая школа, 1990. – С.149 – 150.
2. Детлаф, А.А. курс физики: учебное пособие для вузов/ А.А. Детлаф, Б.М.Яворский. М.: Высшая школа, 2002. – С.202 – 208.
3. Трофимова, Т.И. сборник задач по курсу физики с решениями: учебное пособие для вузов/ Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова. – М. : Высшая школа, 2002. – С. – 231 – 232.

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5**  
**ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА НАПРЯЖЕНИЙ**  
**В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ RLC КОНТУРЕ**

*Цель работы:*

1. Изучить физические основы процесса колебаний в последовательном RLC контуре, определить его основные параметры.
2. Исследовать частотные свойства последовательного колебательного контура при резонансе.
3. Приобрести навыки исследования электрических цепей методом моделирования.
4. В выводах по лабораторной работе представить графические зависимости наблюдаемых физических величин.

**Состав моделируемой электрической цепи:**

- генератор периодических синусоидальных колебаний;
- амперметр;
- вольтметр;
- осциллограф.

**Краткие сведения из теории**

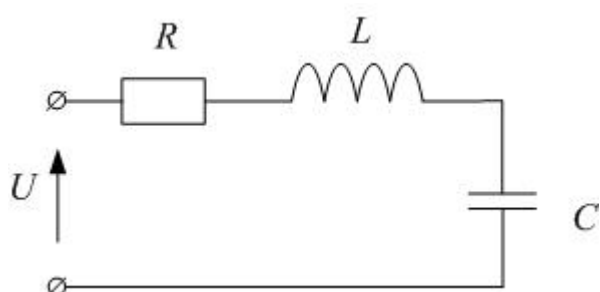


Рис. 5.1. Последовательная RLC-цепь

Последовательным колебательным контуром называется электрическая цепь, состоящая из последовательно включённых элементов: катушки индуктивности  $L$ , конденсатора ёмкости  $C$ , резистора сопротивлением  $R$ , генератора синусоидальных колебаний амплитудой  $U$  (рис.5.1).

Чтобы в реальном колебательном контуре получить незатухающие электромагнитные колебания, генератор должен вырабатывать ЭДС, меняющуюся с течением времени по гармоническому закону:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_m \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Величина активного сопротивления  $R$  должна быть много меньше реактивного сопротивления контура, иначе процесс может иметь аperiodический характер.

В колебательном контуре устанавливаются вынужденные колебания. Эти колебания можно рассматривать как протекание в цепи переменного тока, который можно считать квазистационарным.

Для замкнутой цепи по правилу Кихгофа

$$U_R + U_C = \mathcal{E}(t) + \mathcal{E}_{si},$$

где напряжение на активном сопротивлении равно  $U_R = R \cdot I = R \cdot \frac{dq}{dt}$ , напряжение на ёмкости  $U_C = \frac{q}{C}$ , ЭДС самоиндукции в катушке индуктивности  $\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$ , тогда получим дифференциальное уравнение колебаний заряда  $q$  в контуре:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tilde{N}} = \mathcal{E}_m \cdot \cos(\omega \cdot t), \text{ или}$$

$$L\ddot{q} + R \cdot \dot{q} + \frac{1}{\tilde{N}} \cdot q = \mathcal{E}_m \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

где  $\mathcal{E}_m$  – амплитудное значение ЭДС генератора колебаний;  $\omega$  – круговая (циклическая) частота генератора колебаний.

Амплитудное значение тока в контуре определяется законом Ома:

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z},$$

где  $Z$  – полное сопротивление цепи (импеданс цепи). Полное сопротивление является комплексной величиной:

$$Z = R + i \cdot \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right).$$

Модуль полного сопротивления равен:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

где  $X_L = \omega L$  – величина индуктивного сопротивления;  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  – величина ёмкостного сопротивления цепи.

Фазовый сдвиг между приложенным напряжением  $U$  и током в цепи равен:

$$\varphi = \arctg \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}.$$

Соотношение величин  $X_C$  и  $X_L$  определяет характер сопротивления RLC цепи: активный, индуктивный, ёмкостной.

Явление возрастания амплитуды вынужденных электромагнитных колебаний при изменении частоты задающего генератора называется **электрическим резонансом**. Значение  $\omega$ , при которой ток в контуре достигает максимальной величины, называют **резонансной частотой**.

Характеристики  $I = F(\omega)$  при различных значениях  $R$  называются резонансными кривыми колебательного контура.

Эти соотношения можно проиллюстрировать графиком реактивных сопротивлений на оси частот генератора задающих колебаний (рис.5.3), при этом удобно считать  $X_C < 0$ , как и  $U_C < 0$ . При  $|X_C| = |X_L|$  и максимальном значении тока в цепи имеем  $U_L = I \cdot X_L$ ,  $U_C = I \cdot X_C$ .

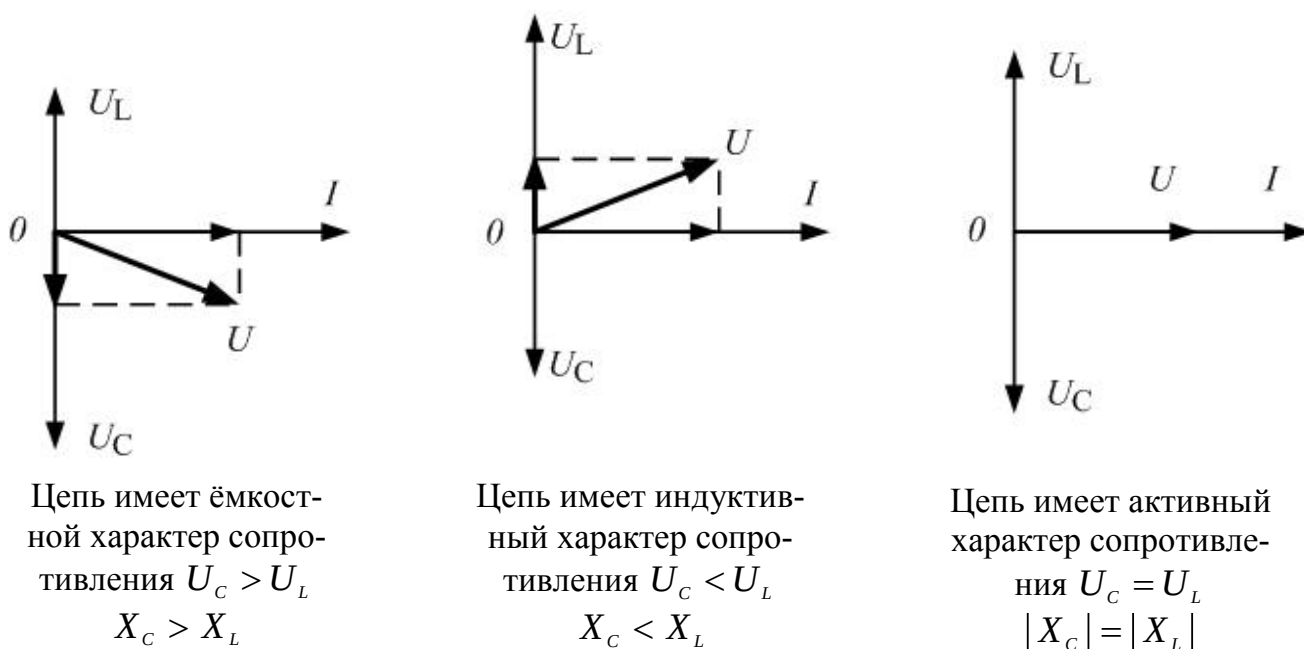


Рис.5.2. Векторные диаграммы



Рис.5.3. Зависимость реактивных сопротивлений от частоты

Амплитуда напряжений на реактивных элементах контура возрастает (резонанс напряжений). Эти напряжения изменяются в противофазе.

Для оценки способности цепи поддерживать колебания на резонансной частоте вводится понятие добротности контура.

Если потери энергии в реактивных элементах пренебрежительно малы, то добротность цепи  $Q$  определяется отношением  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}$ , где  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  – волновое сопротивление цепи. Добротность можно определить по отношениям мощностей или напряжений:  $Q = \frac{P_L}{P_R} = \frac{P_C}{P_R} = \frac{U_C}{U} = \frac{U_L}{U}$ .

Частотную характеристику RLC цепи определяют по зависимости тока или напряжения от частоты (рис.5.4).

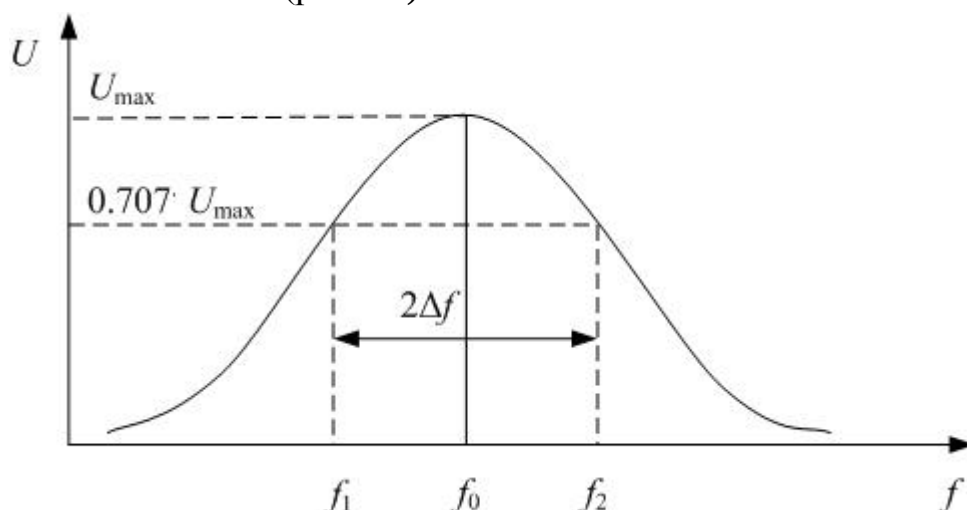


Рис.5.4. Примерный вид частотной характеристики

Значение разности  $(f_2 - f_1)$  определяет полосу пропускания колебательного контура. Она обозначается в радиотехнике символом  $2\Delta f = (f_2 - f_1)$  и определяет избирательность колебательной системы, т.е. способность выделить отдельно частоты, на которых амплитуда не менее  $0.707 \cdot U_{\max}$ . Чем уже полоса пропускания, тем выше селективность колебательной системы.

### Порядок выполнения работы

**Задание №1.** Рассчитать параметры последовательного колебательного контура при следующих исходных данных:

- индуктивность  $L = 0.25$  мГн;
- ёмкость  $C = 250$  пФ;
- активное сопротивление  $R = 25$  Ом.

Контур питается от генератора с синусоидальным напряжением амплитудой  $U = 1.5$  В.

Заполнить таблицу 5.1.

Таблица 5.1

| №  | Параметр                                                                    | Расчётные соотношения                  | Размерность | Числовое значение |
|----|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|-------------|-------------------|
| 1  | Резонансная частота с пренебрежением активного сопротивления                | $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$       |             |                   |
|    |                                                                             | $f_0$                                  |             |                   |
| 2  | Волновое (характеристическое) сопротивление                                 | $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$            |             |                   |
| 3  | Добротность контура                                                         | $Q = \frac{\rho}{R}$                   |             |                   |
| 4  | Напряжения на индуктивном и ёмкостном элементах                             | $U_L = U \cdot Q$<br>$U_C = U \cdot Q$ |             |                   |
| 5  | Индуктивное сопротивление.                                                  | $X_L = \omega \cdot L$                 |             |                   |
| 6  | Ёмкостное сопротивление                                                     | $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$       |             |                   |
| 7  | Угол сдвига по фазе между входным напряжением и входным током при резонансе | $tg \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$     |             |                   |
|    |                                                                             | $\varphi$                              |             |                   |
| 8  | Ток в цепи контура                                                          | $I = \frac{U}{R}$                      |             |                   |
| 9  | Мощность, рассеиваемая на активном сопротивлении                            | $P = I^2 \cdot R$                      |             |                   |
| 10 | Реактивная мощность на индуктивности                                        | $P_L = I^2 \cdot X_L$                  |             |                   |
| 11 | Реактивная мощность на ёмкости                                              | $P_C = I^2 \cdot X_C$                  |             |                   |
| 12 | Энергия магнитного поля катушки                                             | $W_L = \frac{L \cdot I_m^2}{2}$        |             |                   |
| 13 | Энергия электрического поля конденсатора                                    | $W_C = \frac{C \cdot U_m^2}{2}$        |             |                   |
| 14 | Полоса пропускания контура (по графику)                                     | $2\Delta f$                            |             |                   |



**Задание № 2.** Провести моделирование процесса исследования колебательного контура. Синтезировать схему в соответствии с рисунком 5.5. Задать параметры входного воздействия и параметры измерительных приборов.

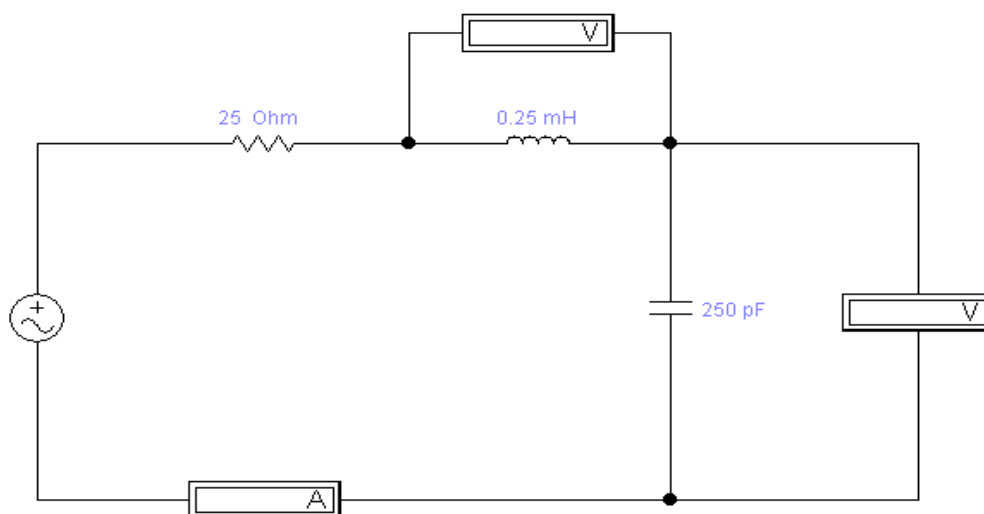


Рис. 5.5. Схема к заданию № 2

При моделировании задать следующие параметры приборов (рис.5.6):

- амперметр: сопротивление прибора 0,2 Ома;  
вид тока – переменный;
- вольтметр: сопротивление прибора 2 Мом;  
вид тока – переменный.

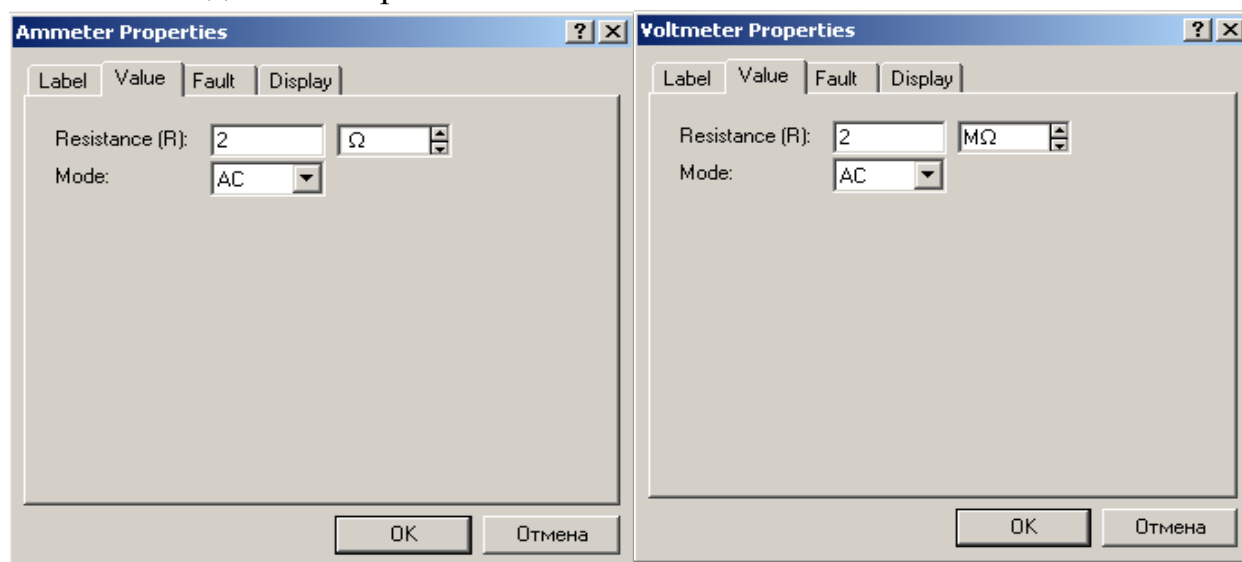
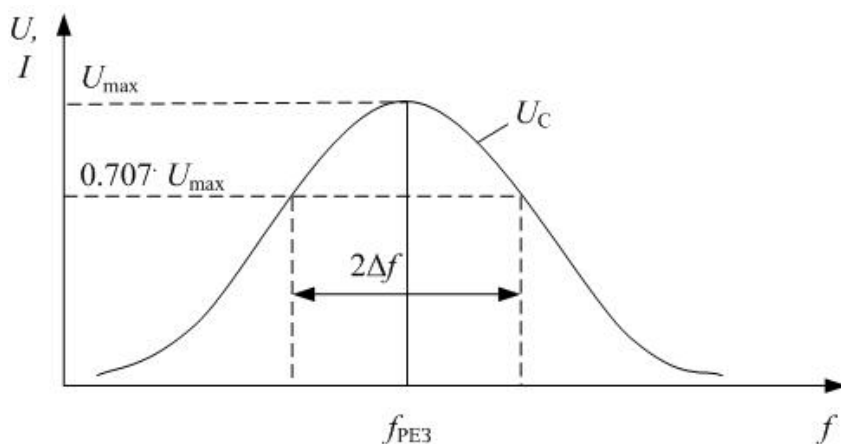


Рис.5.6. Параметры приборов

При снятии частотной характеристики цепи сначала определить резонансную частоту и убедиться, что амперметр показывает максимальный ток в цепи. Тогда показания вольтметров  $V_L$  и  $V_C$  тоже будут максимальными.

Построить графические зависимости тока и напряжений от частоты (рис.5.7):



$$I = F(t);$$

$$U_c = F(f);$$

$$U_L = F(f).$$

Первая точка на графике должна быть точкой максимальных значений.

По графику определить полосу пропускания и добротность колебательной системы.

Рис.5.7. Зависимости тока и напряжений от частоты

В выводах по лабораторной работе отразить следующие вопросы:

1. Достижение цели лабораторной работы.
2. Соответствие полученных физических величин теоретическим соотношениям.
3. Задать относительную погрешность приборов 1,5 – 2 % от измеряемого параметра. Задать разброс параметров элементов цепи 8 – 10 %.
4. Оценить погрешность измерений физических величин.

**Задание № 3.** Решить задачу.

1. Цепь переменного тока с напряжением 220 В и частотой 50 Гц состоит из активного сопротивления 10 Ом, емкости 50 мкФ и индуктивности 0.01 Гн, соединенных последовательно. Найти: 1) эффективную силу тока в цепи; 2) частоту, при которой в данном контуре наступит резонанс напряжений.

Ответ:  $I = 3.58 \text{ А}$ ,  $\omega = 1.4 \cdot 10^3 \text{ рад/с}$ .

2. В цепь переменного тока напряжением 220 В включены последовательно емкость, активное сопротивление и индуктивность. Найти падение напряжения на активном сопротивлении, если падение напряжения на конденсаторе  $U_c = 2U_R$  и падение напряжения на индуктивности  $U_L = 3U_R$ .

Ответ:  $U_{0R} = 220 \text{ В}$ .

3. Для определения индуктивности дросселя его сначала включают в цепь постоянного тока, а затем в цепь переменного тока частотой 50 Гц. Определить индуктивность дросселя, если при прохождении через него постоянного тока силой 3 А напряжение равно 15 В, а при переменном токе 2 А напряжение 120 В.

Ответ:  $L = 0.19 \text{ Гн}$ .

4. В сеть с эффективным напряжением 220 В включены последовательно катушка с индуктивностью 0.16 Гн, активное сопротивление 200 Ом и конденсатор емкостью 64 мкФ. Определить эффективный ток в цепи, если частота его 200 Гц. При какой частоте наступит резонанс напряжений и каковы будут при этом амплитудные значения тока и напряжения на зажимах катушки и конденсатора?

Ответ:  $I = 0.8 \text{ А}$ ,  $\omega_{\text{рез}} = 313 \text{ рад/с}$ ;  $I_{0D\hat{A}C} = 1.54 \text{ А}$ ,  $U_{0\hat{N}} = U_{0\hat{N}} = 77 \text{ В}$ .

### Пример решения задачи

В цепь переменного тока напряжением 220 В и частотой 50 Гц включены последовательно емкость 35.4 мкФ, активное сопротивление 100 Ом и индуктивность 0.7 Гн. Найти силу тока и падение напряжения на емкости, активном сопротивлении и индуктивности.

#### Решение

Дано:

$U_{\text{ЭФФ}} = 220 \text{ В}$   
 $\nu = 50 \text{ Гц}$   
 $C = 35.4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$   
 $R = 100 \text{ Ом}$   
 $L = 0.7 \text{ Гн}$

Найти:

$I_{\text{ЭФФ}} = ?$   
 $U_{0C} = ?$   
 $U_{0R} = ?$   
 $U_{0L} = ?$

По закону Ома для переменного тока:  $I_0 = \frac{U_0}{Z}$ , где  
 $Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$  – полное сопротивление цепи переменного тока. Амплитудные значения напряжения и тока

связаны с эффективными формулами:  $U_{\text{ЭФФ}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$  и

$I_{\text{ЭФФ}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ , а циклическая частота равна:  $\omega = 2\pi\nu$ . Тогда

$I_{\text{ЭФФ}} = \frac{U_{\text{ЭФФ}}}{Z}$ , или

$$I_{\text{ЭФФ}} = \frac{U_{\text{ЭФФ}}}{\sqrt{R^2 + \left( 2\pi\nu \cdot L - \frac{1}{2\pi\nu \cdot C} \right)^2}}. \quad (1)$$

Падение напряжения на каждом участке цепи можно найти по закону Ома для данного участка, используя формулы ёмкостного  $R_C = \frac{1}{\omega C}$  и индуктивного  $R_L = \omega L$  сопротивлений:

$$U_{0C} = I_0 \cdot R_C = \frac{\sqrt{2} \cdot I_{\text{ЭФФ}}}{2\pi\nu \cdot C}; \quad (2)$$

$$U_{0L} = I_0 \cdot R_L = \sqrt{2} \cdot I_{\text{ЭФФ}} \cdot 2\pi\nu \cdot L; \quad (3)$$

$$U_{0R} = I_0 \cdot R. \quad (4)$$

Подставим численные значения в (1)-(4):

$$I_{\text{eff}} = \frac{220}{\sqrt{100^2 + \left( 2\pi \cdot 50 \cdot 0.7 - \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 35.4 \cdot 10^{-6}} \right)^2}} = 1.34 \text{ A};$$

$$U_{0C} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1.34}{2\pi \cdot 50 \cdot 35.4 \cdot 10^{-6}} = 170 \text{ V};$$

$$U_{0L} = \sqrt{2} \cdot 1.34 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0.7 = 417 \text{ V};$$

$$U_{0R} = 1.34 \cdot 100 = 134 \text{ V}.$$

Ответ:  $I_{\text{eff}} = 1.34 \text{ A}$ ;  $U_{0C} = 170 \text{ V}$ ;  $U_{0L} = 417 \text{ V}$ ;  $U_{0R} = 134 \text{ V}$ .

### Библиографический список

1. Трофимова, Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов/ Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1990. – С. 238 – 240.
2. Детлаф, А.А. Курс физики: учебное пособие для вузов/ А.А.Детлаф, Б.М.Яворский. – М.: Высшая школа, 2002. – С. 363 – 367.
3. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями: учебное пособие для вузов/ Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова. – М.: Высшая школа, 2002. – С. 324 – 325.

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА ТОКОВ В ПАРАЛЛЕЛЬНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ RLC КОНТУРЕ

*Цель работы:*

1. Изучить физические основы процесса колебаний энергии в параллельном RLC контуре, определить его основные параметры.
2. Исследовать частотные свойства параллельного колебательного контура при резонансе.
3. Приобрести навыки исследования электрических цепей методом моделирования.

#### Состав моделируемой электрической цепи:

- генератор периодических синусоидальных колебаний;
- амперметр;
- осциллограф;
- вольтметр.

## Краткие сведения из теории

Параллельным колебательным контуром называется цепь, содержащая катушку индуктивности  $L$  и конденсатор ёмкости  $C$ , соединённые параллельно к источнику колебаний (рис. 6.1).

Так как проволочные катушки индуктивности всегда обладают некоторым сопротивлением, то при выполнении исследований целесообразно учитывать наличие активного сопротивления  $R$  (рис. 6.1, б, в).

К параллельной ветви приложено переменное напряжение, изменяющееся по закону:  $U = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$ .

В рассматриваемых случаях общим является напряжение между узлами цепи, а сила тока в параллельных ветвях зависит от параметров  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . По первому закону Кирхгофа ток в неразветвлённой части цепи равен сумме токов ветвей, поэтому задача исследования сводится к сложению колебаний тока. Используя метод векторных диаграмм, целесообразно строить векторные диаграммы токов.

В цепях, изображённых на рисунке 6.1, можно изменять параметры  $L$ ,  $C$  или частоту генератора. Следовательно, будут изменяться: амплитуда полного тока в неразветвлённой части цепи, величина сдвига фаз между током и напряжением. При некотором соотношении между  $L$  и  $C$  сдвиг фаз между током и напряжением станет равным нулю, и контур ведёт себя как активное сопротивление.

Разность фаз равна:

$$\phi = \arctg \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}.$$

Здесь  $(\omega \cdot L) = X_L$  – реактивное сопротивление индуктивности  $L$ ;  $\frac{1}{\omega \cdot C} = X_C$  – реактивное сопротивление ёмкости  $C$ ;  $R$  – активное сопротивление цепи.

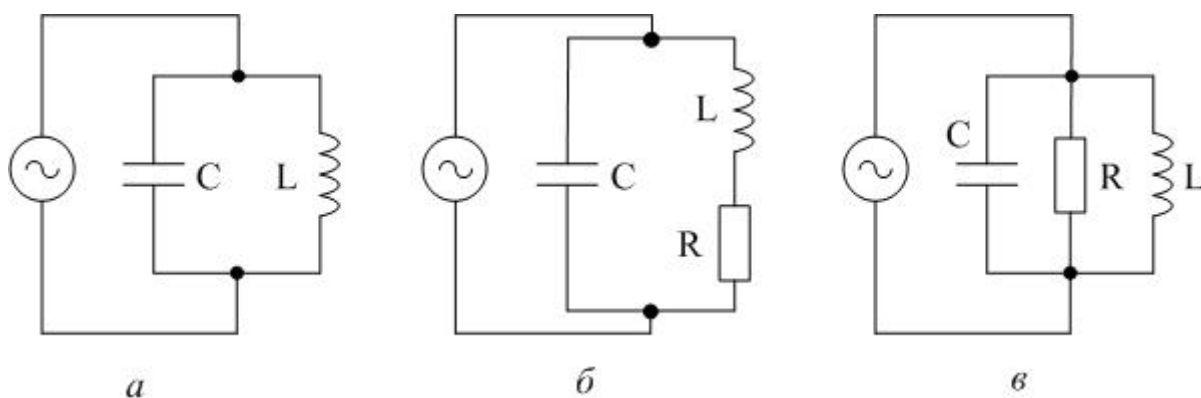


Рис. 6.1. Типовой состав параллельного колебательного контура:  
а) идеального; б), в) реального

Наиболее наглядным случаем является рисунок 6.1,в. Токи в ветвях определяются из выражений:

$$I_R = g \cdot U; I_L = b_L \cdot U; I_C = b_C \cdot U,$$

где  $g = \frac{1}{R}$  – проводимость активной ветви;  $b_L = \frac{1}{X_L} = -i \frac{1}{\omega \cdot L}$  – проводимость индуктивной ветви;  $b_C = \frac{1}{X_C} = i \cdot \omega \cdot C$  – проводимость ёмкостной ветви.

Следовательно, ток в активной (резистивной) ветви совпадает по фазе с приложенным напряжением, ток в индуктивной ветви отстаёт по фазе от напряжения на угол  $\frac{\pi}{2}$ , а ток в ёмкостной ветви опережает напряжение на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Этот вывод основан на представлении мнимой единицы в показательной форме записи комплексного числа:

$$\pm i = e^{\pm i \cdot \frac{\pi}{2}}.$$

Докажем это:

$$e^{\pm i \cdot \frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm i.$$

Вычислим:  $e^{i \cdot \pi} = \cos \pi + i \cdot \sin \pi = -1$ , то есть  
 $-1 = e^{i \cdot \pi}.$

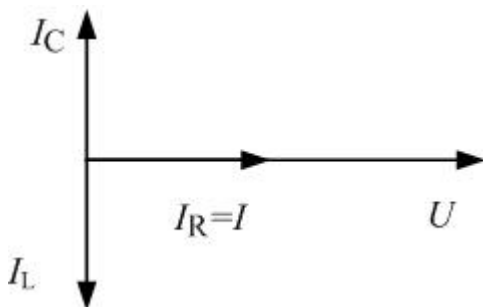


Рис. 6.2. Резонанс токов

При некоторой частоте  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  реактивные сопротивления  $X_L$  и  $X_C$  будут равны, модули токов в индуктивной и ёмкостной ветвях будут равны, ток в неразветвлённой части цепи совпадает по фазе с напряжением источника колебаний. Векторная диаграмма для такого случая приведена на рис. 6.2.

Такое явление называется резонансом токов, а частота  $\omega_0$ , при которой это явление возникает, называется резонансной частотой колебательного контура.

Равенство модулей токов вытекает из равенства проводимостей  $b_L = b_C$ ;

$$X_L = X_C, \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C}, \text{ откуда}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Из описанных условий очевидно, что ток в неразветвлённой части цепи при резонансе приблизительно равен разности токов в реактивных ветвях

контура:  $I \approx I_L - I_C$ , а для наблюдения резонанса следует включить измерительные приборы в ветви контура.

При определении частотных свойств параллельного колебательного контура можно экспериментально снять зависимость тока или напряжения от частоты  $\omega$  при  $R=\text{const}$ ,  $L=\text{const}$ ,  $C=\text{const}$ .

Для параллельной RLC цепи экспериментально снимают частотную характеристику, т.е. зависимость напряжения на контуре от частоты  $f$ .

Для оценки избирательности цепи (остроты резонансной кривой) вводят понятие полосы пропускания т.е. области частот, в пределах которой напряжение не меньше  $\frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$ , т.е.

$$U \geq \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \cdot U_{\max}.$$

Примерный вид частотной характеристики приведён на рисунке 6.3.

Полоса пропускания определяется из соотношения:  $2 \cdot \Delta f = f_A - f_i$ , где  $f_A$  – верхняя частота;  $f_i$  – нижняя частота колебательного контура.

Для оценки способности цепи поддерживать колебания на резонансной частоте вводят понятие **добротности**  $Q$ . Заметим, что при определении добротности контура в установившемся режиме можно брать отношение мощностей:

$$Q = \frac{P_L}{P_R} = \frac{P_C}{P_R} = \frac{I_L}{I_R} = \frac{I_C}{I_R},$$

где  $I_C$  и  $I_L$  – токи в реактивных ветвях;  $I_R$  – ток в неразветвлённой части контура.

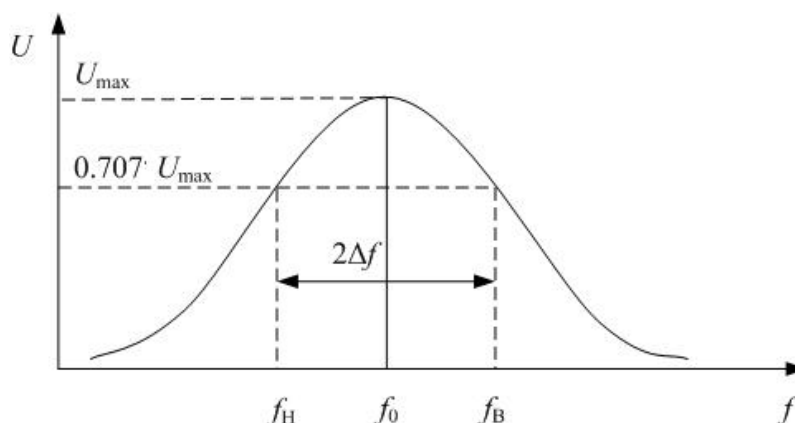


Рис. 6.3 Частотная характеристика

### Порядок выполнения работы

**Задание № 1.** Рассчитать параметры параллельного колебательного контура (рис. 6.4) при следующих исходных данных:

- ёмкость конденсатора  $C = 200$  пФ;
- ЭДС генератора питающего контур  $\varepsilon = 300$  В;

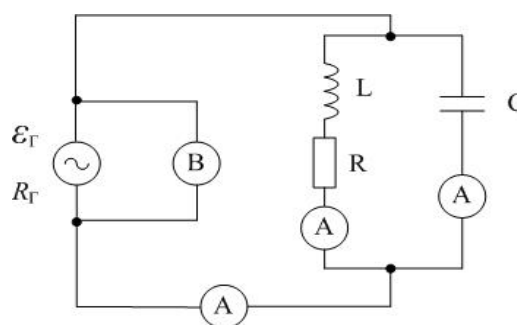


Рис.6.4. Моделируемая цепь

- внутреннее сопротивление генератора  $R_A = 4 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 40 \text{ кОм}$  ;
- активное сопротивление индуктивной ветви 7 Ом.

При резонансе напряжение на контуре составляет 120 В.

Заполнить таблицу 6.1 параметров контура.

Таблица 6.1

| №   | Определяемый параметр                                                     | Математические соотношения для расчёта                                                       | Численное значение параметра |
|-----|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| 1.  | Амплитуда тока генератора                                                 | $I = \frac{\mathcal{E}_{\text{ген}} - U_{\text{вн}}}{R_A}$                                   |                              |
| 2.  | Входное сопротивление контура                                             | $R_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{конт}}}{I}$                                                  |                              |
| 3.  | Индуктивность контура                                                     | $R_{\text{вх}} = \frac{L}{\tilde{N} \cdot R}$<br>$L = R_{\text{вх}} \cdot \tilde{N} \cdot R$ |                              |
| 4.  | Волновое сопротивление контура                                            | $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$                                                                  |                              |
| 5.  | Добротность контура                                                       | $Q = \frac{\rho}{R}$                                                                         |                              |
| 6.  | Амплитуда токов в ветвях контура                                          | $I_{\text{вет}} = I \cdot Q$                                                                 |                              |
| 7.  | Резонансная частота контура                                               | $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$<br>$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{LC}}$            |                              |
| 8.  | Построить зависимость тока в реактивных ветвях от частоты                 |                                                                                              |                              |
| 9.  | Построить частотную характеристику контура, определить полосу пропускания |                                                                                              |                              |
| 10. | Записать данные приборов при моделировании цепи.                          |                                                                                              |                              |

**Задание № 2.** Провести моделирование процесса исследования колебательного контура. Синтезировать схему (рис.6.5) в соответствии с рисунком 6.4. Задать параметры входного воздействия и параметры измерительных приборов в соответствии с условиями задачи (рис. 6.6).

При снятии частотной характеристики цепи сначала настроить контур на резонансную частоту и убедиться, что в реактивных ветвях амперметр показывает максимальное значение тока.

Построить графические зависимости тока и напряжения от частоты.



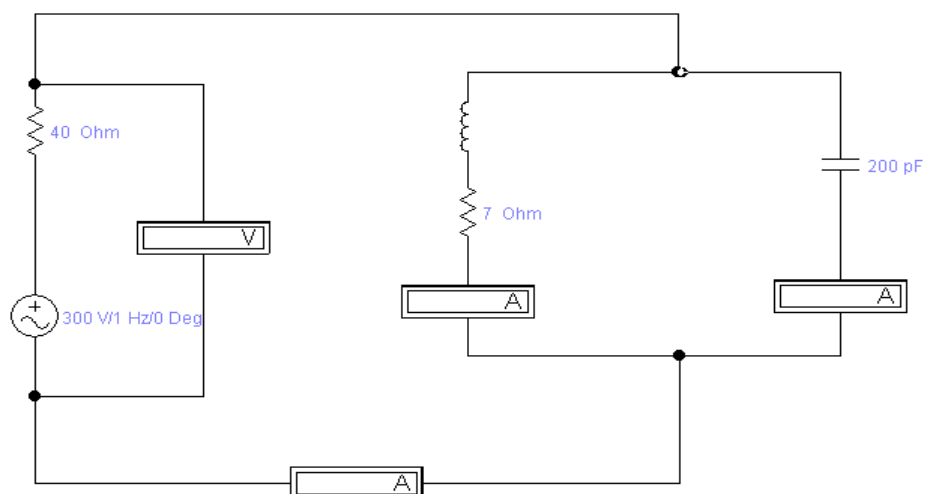


Рис. 6.5. Схема к заданию № 2

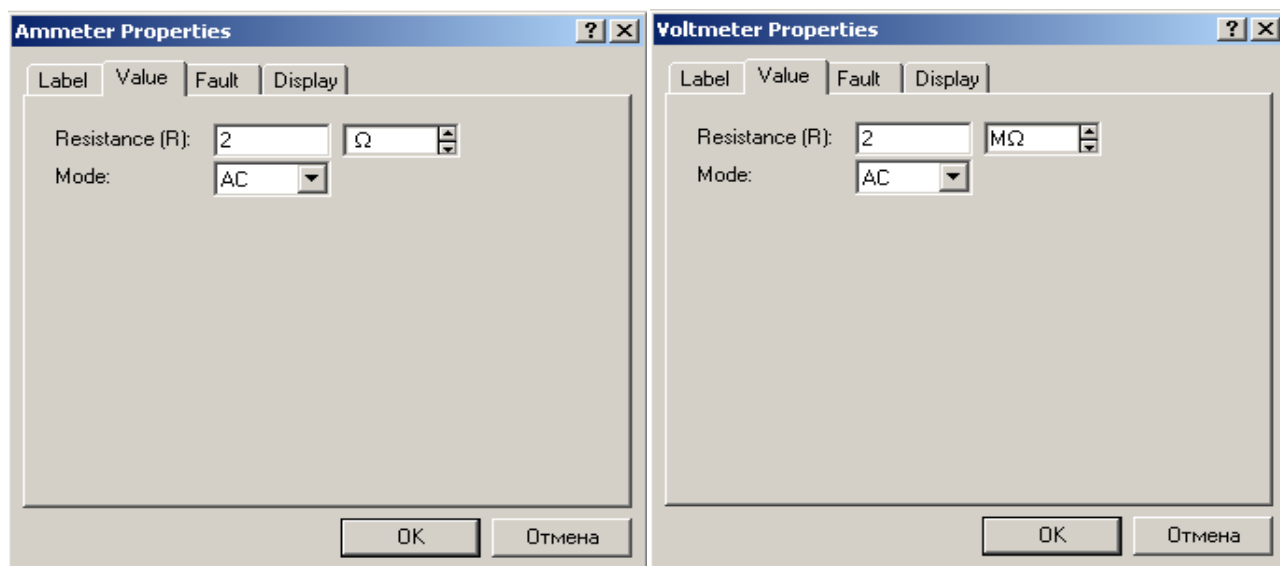


Рис.6.6. Параметры приборов и состав моделируемой цепи

При подготовке к лабораторной работе ознакомиться со списком литературы и ответить на вопросы:

|                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <div data-bbox="320 376 612 595" data-label="Diagram"> </div> <div data-bbox="659 434 970 539" data-label="Text"> <p>Выберите векторную диаграмму, соответствующую данной цепи при резонансе токов</p> </div>              | <div data-bbox="1023 192 1278 315" data-label="Figure"> </div> <div data-bbox="1023 349 1254 472" data-label="Figure"> </div> <div data-bbox="1015 506 1270 629" data-label="Figure"> </div> <div data-bbox="1023 663 1270 775" data-label="Figure"> </div>                              |
| <div data-bbox="309 882 970 958" data-label="Text"> <p>Как изменяется сопротивление контура <math>z_k</math> при уменьшении сопротивления катушки <math>R_k</math> в режиме резонанса?</p> </div>                          | <div data-bbox="1054 824 1238 853" data-label="Text"> <p>Уменьшается</p> </div> <div data-bbox="991 893 1302 949" data-label="Text"> <p>Практически не изменяется</p> </div> <div data-bbox="1031 987 1238 1016" data-label="Text"> <p>Увеличивается</p> </div>                          |
| <div data-bbox="272 1106 954 1162" data-label="Text"> <p>Потребляется ли энергия контуром при резонансе токов, если <math>R_k = 0</math>?</p> </div>                                                                       | <div data-bbox="1110 1028 1166 1057" data-label="Text"> <p>Да</p> </div> <div data-bbox="1110 1097 1174 1126" data-label="Text"> <p>Нет</p> </div> <div data-bbox="975 1176 1302 1232" data-label="Text"> <p>Это зависит от соотношения между <math>L</math> и <math>C</math></p> </div> |
| <div data-bbox="272 1615 959 1693" data-label="Text"> <p>Выберите кривую, соответствующую зависимости <math>z_k(f)</math>, если <math>R_k = 0</math> при параллельном включении <math>L</math> и <math>C</math></p> </div> | <div data-bbox="991 1267 1270 1447" data-label="Figure"> </div> <div data-bbox="991 1469 1270 1648" data-label="Figure"> </div> <div data-bbox="975 1671 1286 1850" data-label="Figure"> </div> <div data-bbox="991 1872 1270 2051" data-label="Figure"> </div>                          |

**Задание № 3.** Решить задачу.

1. Найти полное сопротивление участка цепи, состоящего из параллельно включенного конденсатора ёмкости 73 мкФ и активного сопротивления 100 Ом для переменного тока частотой 50 Гц.

Ответ:  $Z = \frac{R}{\sqrt{(R\omega C)^2 + 1}} = 40 \hat{\phantom{0}} \text{ } \Omega$ .

2. Изобразить примерные векторные диаграммы токов в электрических контурах, показанных на рис.6.7. Предполагается, что подаваемое между точками А и В напряжение синусоидальное и параметры каждого контура подобраны так, что суммарный ток через контур отстает по фазе от внешнего напряжения на  $\varphi$ .

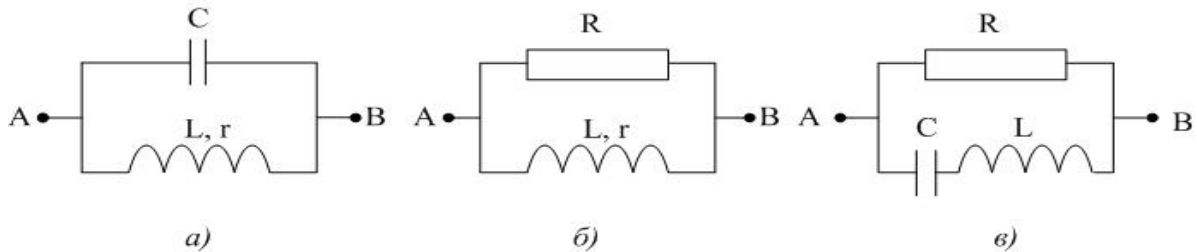


Рис. 6.7

Ответ – см. рис.6.8.

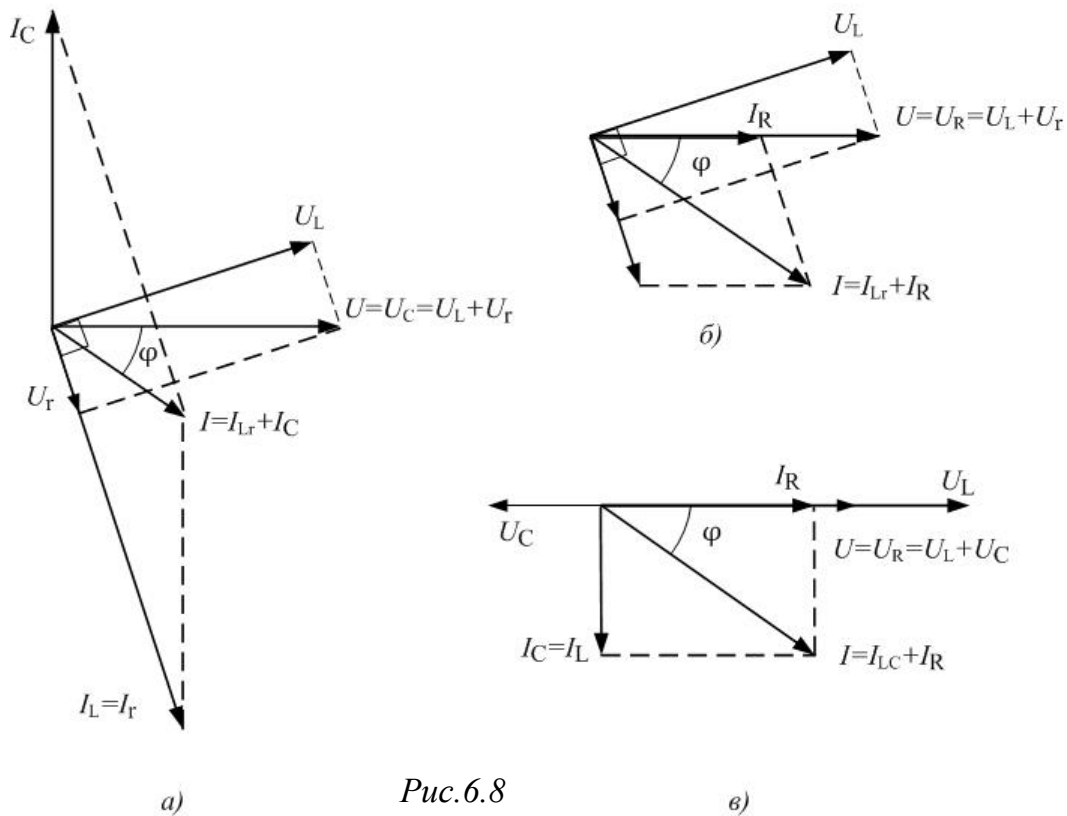


Рис.6.8

3. К источнику синусоидального напряжения с частотой  $\omega$  подключили параллельно конденсатор ёмкости  $C$  и катушку с активным сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$ . Найти разность фаз между подводимым к контуру током и напряжением на источнике.

Ответ:  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{(R^2 + (\omega L)^2) \omega C - \omega L}{R}$ .

4. Участок цепи состоит из параллельно включенных конденсатора ёмкостью  $C$  и катушки с активным сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$ . Найти полное сопротивление этого участка для переменного напряжения с частотой  $\omega$ .

Ответ:  $Z = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega \cdot L)^2}{(\omega \cdot C \cdot R)^2 + (1 - \omega^2 C \cdot L)^2}}$ .

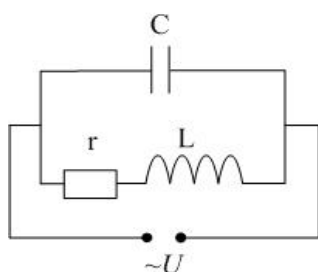
### Пример решения задачи

Конденсатор ёмкости  $C=1$  мкФ и катушку с активным сопротивлением  $r=0.1$  Ом и индуктивностью  $L=1$  мГн подключили параллельно к источнику синусоидального напряжения с действующим значением  $U=31$  В. Найти частоту, при которой наступает резонанс; действующее значение подводимого тока при резонансе, а также соответствующие токи через катушку и конденсатор.

Решение:

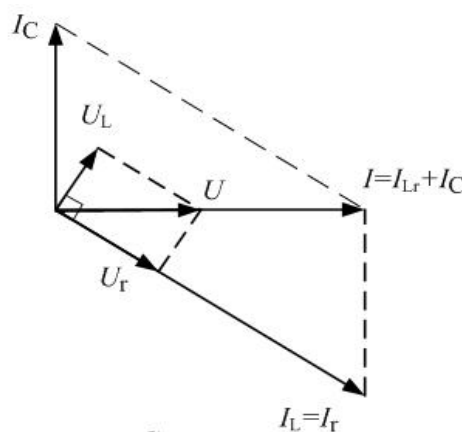
Дано:  
 $U=31$  В  
 $C=1$  мкФ  
 $r=0.1$  Ом  
 $L=1$  мГн

Найти:  
 $\omega_{\text{рез}}=?$   
 $I=?$   
 $I_C=?$   
 $I_L=?$



а)

Рис. 6.9



б)

Цепь и её векторная диаграмма изображены на рис.6.9. Из подобия треугольников

$$\frac{I_C}{I_L} = \frac{U_L}{U}, \quad (1)$$

где  $U_L = I_L \cdot R_L = I_L \cdot \omega L, \quad (2)$

$$I_C = \frac{U}{R_C} = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = U \omega C. \quad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1):

$$\frac{U \omega \cdot C}{I_L} = \frac{I_L \cdot \omega \cdot L}{U}. \quad (4)$$

Из треугольника напряжений по теореме Пифагора:

$$U^2 = U_r^2 + U_L^2, \quad (5)$$

где  $U_r = I_L \cdot r. \quad (6)$

Из (2), (5) и (6):  $U^2 = (I_L \cdot r)^2 + (I_L \cdot \omega L)^2. \quad (7)$

Преобразуем (4):  $U^2 C = I_L^2 \cdot L, \quad (8)$

откуда  $U^2 = \frac{I_L^2 \cdot L}{\tilde{N}}. \quad (9)$

Подставляем (9) в (7):

$$\frac{I_L^2 \cdot L}{\tilde{N}} = (I_L \cdot r)^2 + (I_L \cdot \omega L)^2. \quad (10)$$

После сокращения на  $I_L^2$  и преобразований получим резонансную частоту:

$$\frac{L}{\tilde{N}} = r^2 + (\omega L)^2, \quad \omega L = \sqrt{\frac{L}{\tilde{N}} - r^2},$$

$$\omega_{\text{Д\AA}\zeta} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{N}L} - \frac{r^2}{L^2}}. \quad (11)$$

Ток через конденсатор найдём из (3):

$$I_C = U \omega_{\text{Д\AA}\zeta} C = UC \sqrt{\frac{1}{\tilde{N}L} - \frac{r^2}{L^2}} = U \sqrt{\frac{\tilde{N}}{L} - \left(\frac{r \cdot \tilde{N}}{L}\right)^2}, \quad (12)$$

Из (8) найдём ток через индуктивность:

$$I_L = U \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (13)$$

Из треугольника токов по теореме Пифагора

$$I^2 = I_L^2 - I_C^2, \quad (14)$$

откуда с учётом (12) и (13)

$$I^2 = \frac{U^2 C}{L} - U^2 \left( \frac{\tilde{N}}{L} - \left( \frac{r \cdot \tilde{N}}{L} \right)^2 \right) = U^2 \left( \frac{r \cdot \tilde{N}}{L} \right)^2.$$

Для подводимого тока окончательно получим:

$$I = \frac{U \cdot r \cdot \tilde{N}}{L}. \quad (15)$$

Вычисления по (11), (12), (13) и (15):

$$\omega_{\text{Д\AA}\zeta} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{N}L} - \frac{r^2}{L^2}} = \sqrt{\frac{1}{10^{-6} \cdot 10^{-3}} - \left( \frac{0.1}{10^{-3}} \right)^2} = 3.2 \cdot 10^8 \text{ н}^{-1};$$

$$I_C = U \sqrt{\frac{\tilde{N}}{L} - \left( \frac{r \cdot \tilde{N}}{L} \right)^2} = 31 \sqrt{\frac{10^{-6}}{10^{-3}} - \left( \frac{0.1 \cdot 10^{-6}}{10^{-3}} \right)^2} = 1 \text{ \AA};$$

$$I_L = U \sqrt{\frac{C}{L}} = 31 \sqrt{\frac{10^{-6}}{10^{-3}}} = 1 \text{ \AA};$$

$$I = \frac{U \cdot r \cdot \tilde{N}}{L} = \frac{31 \cdot 0.1 \cdot 10^{-6}}{10^{-3}} = 3.1 \text{ \AA}.$$

Ответ:  $\omega_{\text{Д\AA}\zeta} = 3.2 \cdot 10^8 \text{ н}^{-1}$ ;  $I_C = 1 \text{ \AA}$ ;  $I_L = 1 \text{ \AA}$ ;  $I = 3.1 \text{ \AA}$ .

Сделать выводы по проведенной работе.

### Библиографический список

1. Трофимова, Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1990. – С. 239 – 241.
2. Детлаф, А.А. Курс физики: учебное пособие для вузов/ А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высшая школа, 2002.- С. 379 – 380.
3. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями: учебное пособие для вузов/ Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова. – М.: Высшая школа, 2002. – С. 307 – 309.

## Содержание

|                                                                                                                                                                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение Порядок пользования программой Electronics Workbench<br>при выполнении лабораторных работ.....                                                                                                                                       | 3  |
| <i>Лабораторная работа № 1</i> Исследование основных параметров<br>периодических колебаний осциллографическим методом.<br>Моделирование физических процессов при исследовании<br>параметров колебаний .....                                   | 5  |
| <i>Лабораторная работа № 2</i> Исследование процесса сложения<br>ортогональных гармонических колебаний осциллографическим методом.<br>Моделирование физических процессов при амплитудно-фазовых<br>рассогласованиях .....                     | 19 |
| <i>Лабораторная работа № 3</i> Исследование процесса сложения<br>ортогональных гармонических колебаний осциллографическим методом.<br>Моделирование физических процессов сложения колебаний,<br>отличающихся по частоте .....                 | 28 |
| <i>Лабораторная работа № 4</i> Исследование процесса заряда и разряда<br>конденсатора при использовании его в RC цепях. Моделирование<br>физических процессов заряда и разряда конденсатора<br>в дифференцирующих и интегрирующих цепях ..... | 33 |
| <i>Лабораторная работа № 5</i> Исследование явления резонанса<br>напряжений в последовательном колебательном RLC контуре .....                                                                                                                | 44 |
| <i>Лабораторная работа № 6</i> Исследование явления резонанса токов в<br>параллельном колебательном RLC контуре.....                                                                                                                          | 52 |

---

Подписано в печать 4.05.2011. Усл. печ. л. . Тираж .  
Печать офсетная. Бумага офисная. Заказ № \_\_\_\_\_

---

Отпечатано: РИО ВоГТУ, г. Вологда, ул. Ленина, 15