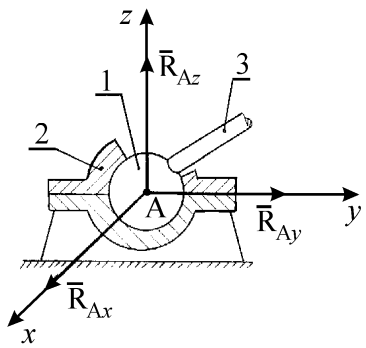
О. Г. Максимова
А. В. Максимов
Я.А. Соловьева

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ



Учебное пособие

Вологда
2014

Министерство образования и науки Российской Федерации

Вологодский государственный университет

О. Г. Максимова

А. В. Максимов

Я.А. Соловьева

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

в качестве учебного пособия

Вологда

2014

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
М 17

Рецензенты:

Н.О.Сорокина – канд. физ.-мат. наук, доцент Череповецкого государственного университета;

П.Г. Филин – канд. пед. наук, доцент Вологодского государственного университета;

О. Г. Максимова
М 17 **Основы теоретической механики в примерах и задачах:** учебное пособие / О. Г. Максимова, А. В. Максимов, Я.А. Соловьева. – Вологда: ВоГУ, 2014. – 95 с.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с требованиями федеральных образовательных стандартов 3-го поколения. В пособии рассматриваются принципиальные вопросы статики для произвольной плоской и пространственной системы сил, кинематики и динамики материальной точки и механической системы и содержат сведения, необходимые при изучении основ теоретической механики. Большое внимание уделено методам решения практических задач, подготовленных как авторами, так и задач из других источников.

Учебное пособие предназначено для самостоятельного выполнения контрольных заданий и подготовки к экзамену студентов заочной формы обучения технических специальностей.

.

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73

Введение

Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики. Теоретическая механика и ее место среди естественных и технических наук. Механика как теоретическая база ряда областей современной техники. Объективный характер законов механики. Основные исторические этапы развития механики. Связь механики с производственными задачами.

Статика твердого тела

Предмет статики. Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, сила, эквивалентная система сил, равнодействующая, уравновешенная система сил, силы внешние и внутренние. Аксиомы статики. Связи и реакции связей. Основные виды связей и их реакции: гладкая плоскость (поверхность и опора), гибкая нить, цилиндрический шарнир (подшипник), сферический шарнир (подпятник), невесомый (идеальный) стержень.

Система сходящихся сил. Геометрический и аналитический способы сложения сил. Сходящиеся силы, равнодействующая, геометрическое условие их равновесия. Аналитические условия равновесия для пространственной и плоской систем сходящихся сил. Теорема о равновесии трех непараллельных сил.

Теория пар сил. Момент силы относительно точки (центра) как вектор. Алгебраическое значение момента силы относительно точки. Момент пары сил как вектор и его алгебраическое значение. Теоремы об эквивалентности пар. Сложение пар сил в плоскости и произвольно расположенных в пространстве. Условия равновесия системы пар.

Плоская система сил. Теорема о параллельном переносе силы. Основная теорема статики о приведении плоской системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент системы сил и их расчет. Частные случаи приведения: приведение систем сил к паре сил, к равнодействующей. Аналитические условия равновесия для плоской системы сил:

а) равенство нулю сумм проекций сил на две координатные оси и суммы их моментов относительно любого центра;

б) равенство нулю сумм моментов сил относительно двух центров и суммы их проекций на одну ось;

в) равенство нулю сумм моментов сил относительно трех центров. Условия равновесия системы параллельных сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Сосредоточенные и распределенные силы. Силы, распределенные по отрезку прямой, и их равнодействующая. Реакция жесткой заделки. Равновесие системы тел. Статически определимые и неопределимые системы. Равновесие при наличии сил трения. Коэффициент трения. Предельная сила трения. Угол и конус трения. Условие самоторможения. Трение качения, коэффициент трения качения и момент трения качения.

Пространственная система сил. Момент силы относительно оси и его расчет. Зависимость между моментом силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр. Аналитические формулы для вычисления моментов силы относительно координатных осей. Приведение пространственной системы сил к данному центру. Вычисление главного вектора и главного момента для пространственной системы сил. Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

Центр тяжести. Центр параллельных сил. Формулы для определения координат центра параллельных сил. Способы и формулы для определения положения (координат) центра тяжести объема, площади и линии его. Центры тяжести дуги окружности, треугольника и кругового сектора.

Кинематика

Кинематика точки. Предмет и задачи кинематики. Пространство и время в классической механике. Относительность механического движения.

Системы отсчета. Векторный способ задания движения точки. Траектория точки. Скорость точки как производная ее радиуса-вектора по времени. Ускорение точки как производная от ее вектора скорости по времени.

Координатный способ задания движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Определение траектории точки. Определение скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси.

Естественный способ задания движения точки. Естественный трехгранник и его оси. Алгебраическая величина скорости точки. Определение ускорения точки по его проекциям на оси естественного трехгранника; касательное и нормальное ускорения точки. Выражение касательного ускорения точки через проекции скорости и ускорения на координатные оси.

Поступательное движение твердого тела. Определение поступательного движения твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении.

Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Определение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси. Уравнение (закон) вращательного движения твердого тела. Угловая скорость и ускорение твердого тела. Законы равномерного и равнопеременного вращения. Скорость и ускорение точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Векторы угловой скорости и ускорения тела. Выражение скорости точки вращающегося тела и ее касательного и нормального ускорений в виде векторных произведений.

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в его плоскости. Разложение движения плоской фигуры на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. Независимость угловой скорости и ускорения от выбора полюса. Теорема о скоростях точек и их проекциях для плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей (МЦС) и доказательство его существования. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью МЦС. Теорема об ускорениях точек тела при плоском движении. Мгновенный центр ускорений (МЦУ).

Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной точки (сферическое движение). Углы Эйлера. Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Мгновенная ось вращения тела. Определение скорости и ускорения любой точки тела при его сферическом движении.

Свободное движение твердого тела. Уравнения движения для свободного твердого тела. Разложение свободного движения на поступательное движение вместе с полюсом и вращение вокруг полюса. Определение скоростей и ускорений точек свободного твердого тела.

Составное (сложное) движение точки. Переносное, относительное и абсолютное движения точки. Теорема Кориолиса о сложении скоростей и ускорений. Модуль и направление кориолисова ускорения (правило Н. Е. Жуковского). Случаи равенства нулю ускорения Кориолиса.

Составное движение твердого тела. Сложение поступательных движений. Сложение вращательных движений твердого тела вокруг параллельных и пересекающихся осей. Пара мгновенных вращений. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось.

Динамика

Основные законы динамики. Прямая и обратная задачи динамики. Уравнения движения механической системы. Закон изменения и сохранения импульса. Момент импульса, его изменение и сохранение. Кинетическая энергия, работа. Теорема об изменении кинетической энергии. Динамика поступательного и вращательного движения твердого тела и плоского движения.

1. Статика

1.1. Основные положения

Статикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются операции с силами и состояние равновесия тел под действием на них сил не только в состоянии покоя, но и при движении их по инерции. В основе статики лежат экспериментально установленные аксиомы (законы).

1. Аксиома инерции. Под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.
2. Аксиома равновесия двух сил. Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, будут уравновешены тогда и только тогда, когда они равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.
3. Аксиома присоединения и исключения уравновешивающихся сил. Действие системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или отнять уравновешенную систему сил. Следствие: Действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия.
4. Аксиома параллелограмма сил. Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.
5. Аксиома равенства действия и противодействия (3-й закон Ньютона). Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.
6. Принцип отвердевания. Равновесие сил, приложенных к нетвердому телу, не нарушается при его затвердевании.

Равновесие свободных тел может быть нарушено при действии на них сил. Тела или системы тел считаются *несвободными*, если их перемещению препятствуют другие тела (связи), скрепленные или соприкасающиеся с ними. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещению, называется силой *реакции связи* или просто *реакцией связи*. Значения реакций связей определяются в процессе решения соответствующей задачи механики. Реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда она не дает перемещаться телу. На рис.1.1. представлены наиболее часто встречающиеся типы связей и их направления: в случае *гладкой плоскости* (поверхности) или опоры, для которых реакция $\overline{N}$ направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке. Связь, осуществленная в виде гибкой *нерастяжимой нити* (каната, цепи, ремня и пр.), не дает телу *M* удаляться от точки ее подвеса *A* по направлению *AM* (рис. 1.1 *г*). Поэтому реакция $\overline{T}$ натянутой нити направлена вдоль нее от тела к точке подвеса.

Цилиндрическим шарниром или подшипником (шарнирно-неподвижной опорой) называется совокупность неподвижной обоймы (втулки) 1 и помещенного в нее валика (пальца) 2, жестко соединенного с телом 3 (рис.1. 2*а*). В точке *C* соприкосновения втулки с валиком возникает сила опорной реакции, проходящая через геометрический центр *A* валика и направленная по нормали к идеально гладким поверхностям. Так как положение точки *C* соприкосновения валика со втулкой заранее не известно, то невозможно сразу указать направление силы реакции $\overline{R}$, но можно утверждать, что линия действия реакции $\overline{R}$ всегда пройдет через центр *A* шарнира. На расчетных схемах для шарнирно-неподвижной опоры (рис. 1.2 *б*) при решении задач неизвестную по модулю и направлению реакцию $\overline{R}_A$ представляют в виде двух ее взаимно перпендикулярных составляющих $\overline{R}_{Ax}$ и $\overline{R}_{Ay}$. После определения их значений находят значение реакции $\overline{R}_A$ и ее направление по формулам: $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}$, $\cos\alpha = R_{Ax}/R_A$.

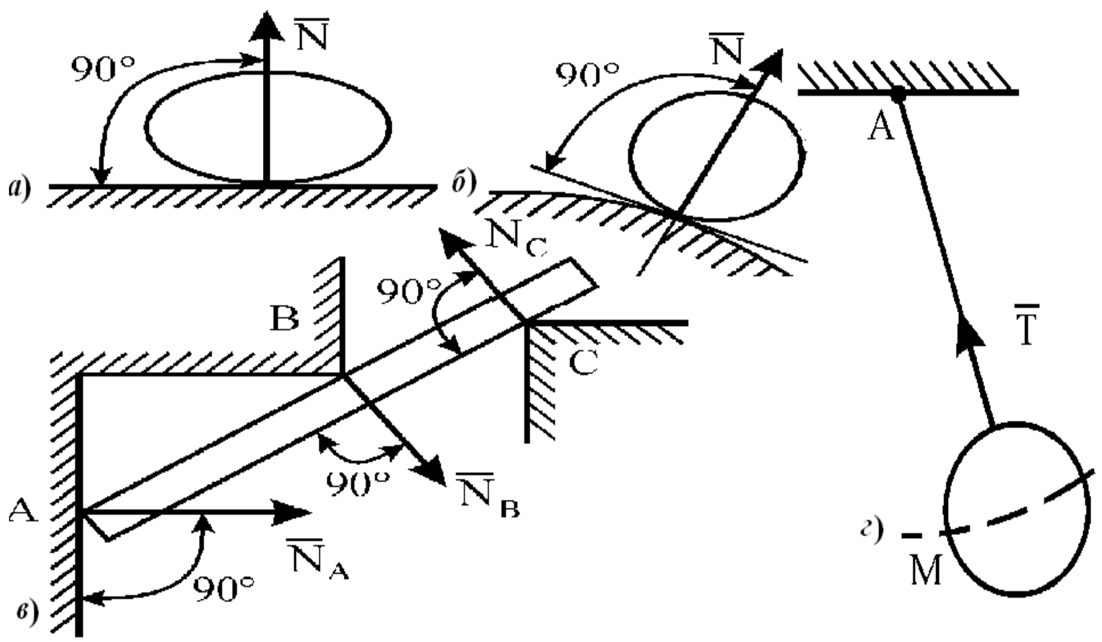


Рис. 1.1. Примеры наиболее часто встречающихся типов связей: в случае гладкой плоскости (а, б), опоры (в), гибкой нерастяжимой нити (г)

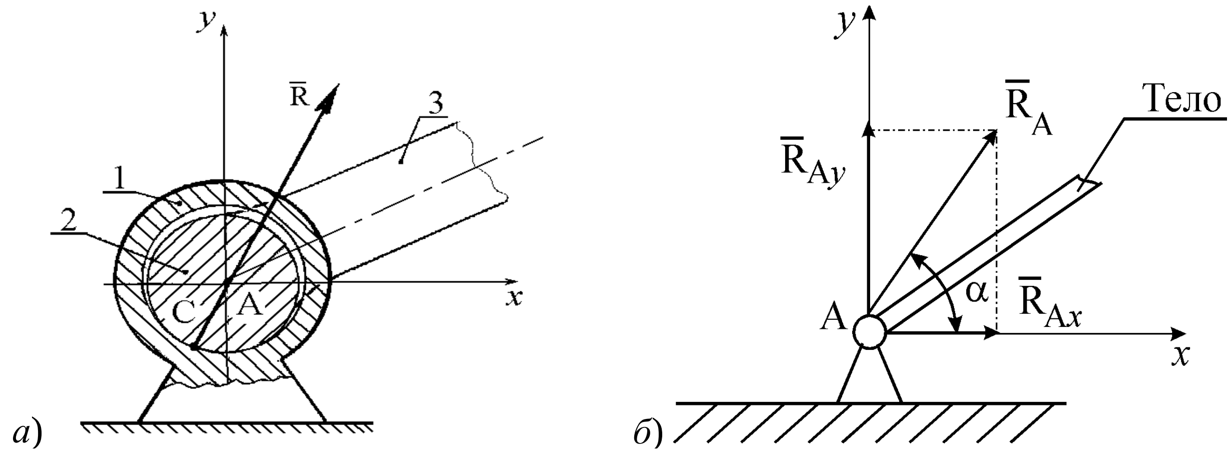


Рис. 1.2. Цилиндрический шарнир/подшипник (шарнирно-неподвижная опора) (а) и ее расчетная схема (б)

Реакция связи $\overline{R}$ *шарнирно-подвижной опоры (опоры на катках)* проходит через ее центр (рис. 1.3 *а* и *б*) и перпендикулярно к опорной плоскости. *Сферическим шарниром* называется устройство, выполненное в виде двух контактирующих сфер, геометрический центр *А* которых неподвижен (рис. 1.3*в*). Тело *3* в равновесии жестко связано с внутренней подвижной сферой *1*. Для гладкой сферической поверхности реакция $\overline{R}_A$ направлена по нормали к этим поверхностям и проходит через центр *А* сферы. На расчетных схемах реакцию $\overline{R}_A$ представляют в виде трех ее взаимно перпендикулярных составляющих $\overline{R}_{Ax}$, $\overline{R}_{Ay}$ и $\overline{R}_{Az}$, направленных вдоль координатных осей.

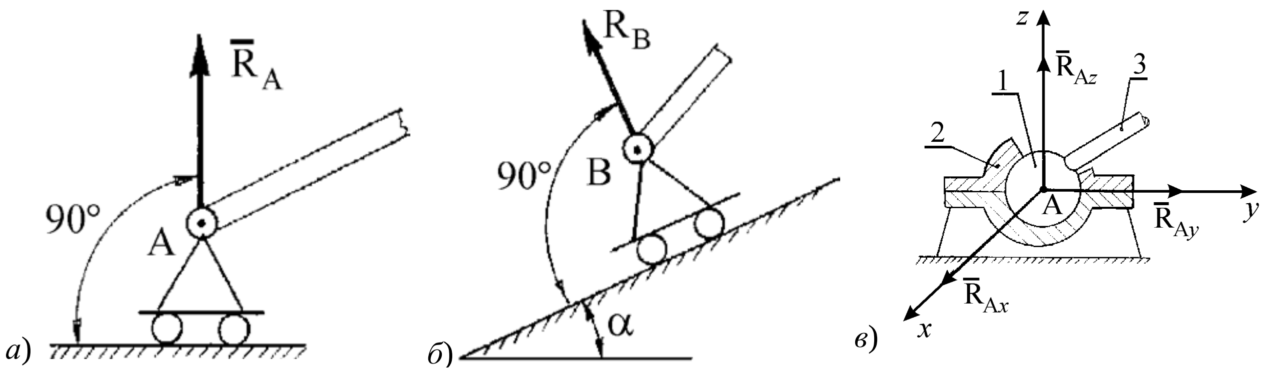


Рис. 1.3. Шарнирно-подвижная опора (а), опора на катках (б), сферический шарнир (в)

Подпятник представляет собой соединение цилиндрического шарнира 2 и опорной плоскости 3, на которую опирается вал 1(рис. 1.4*а*). Реакция подшипника, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вала, представляется двумя ее взаимно перпендикулярными составляющими $\overline{R}_{Ax}$ и $\overline{R}_{Ay}$, а реакция опорной плоскости – реакцией $\overline{R}_{Az}$, направленной по нормали к этой плоскости.

Реакция $\bar{S}$ прямолинейного *невесомого (идеального) стержня* направлена вдоль него (рис. 1.4 *б*). Если связью является криволинейный стержень, то реакция направлена вдоль прямой *AB*, соединяющей концевые шарниры *A* и *B* (рис. 1.4 *в*).

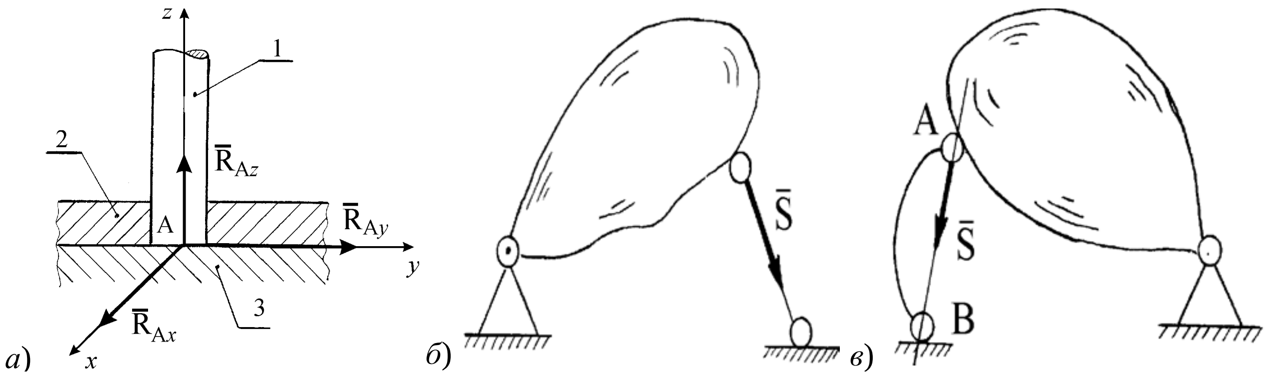


Рис. 1.4. Подпятник (а), невесомые прямолинейный (б) и криволинейный (в) стержни

Жесткая заделка (*неподвижное защемление*) конца балки не допускает не только линейных перемещений балки *1* вдоль координатных осей, но и вращения балки в плоскости *xAy* (рис. 1.5). Нахождение реакций жесткой заделки сводится к определению трех неизвестных величин: составляющих $\bar{R}_{Ax}$ и $\bar{R}_{Ay}$ реакции $\bar{R}_A$ и так называемого *реактивного момента* M_A, препятствующего вращению балки в плоскости *xAy* вокруг точки *A*.

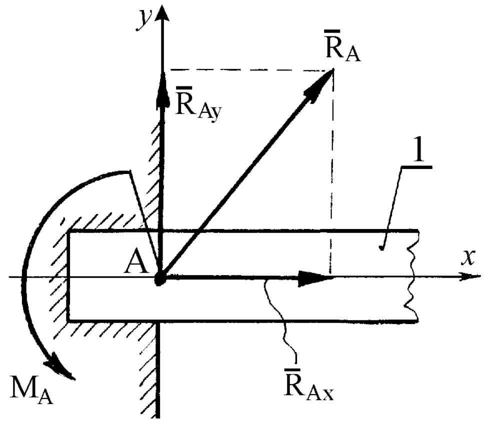


Рис. 1.5. Жесткая заделка (неподвижное защемление)

Для составления уравнений равновесия в статике необходимо уметь вычислять проекции сил на координатные оси и выполнять операции сложения и разложения сил. *Проекцией силы на ось* называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Так, для сил, изображенных на рис. 1.6 *а* и *б*:

$$F_x = a_1b_1 = F\cos\alpha;$$
$$F_y = a_2b_2 = F\cos(90° - \alpha) = F\sin\alpha;$$
$$Q_x = c_1d_1 = Q\cos\beta = Q\cos(180° + \gamma) = -Q\cos\gamma;$$
$$Q_y = c_2d_2 = Q\cos(90° + \gamma) = -Q\sin\gamma.$$

Проекцией силы $\bar{F}$ на плоскость O*xy* называется вектор $\bar{F}_{xy} = \overline{OB}_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\bar{F}$ на эту плоскость (рис. 1.6 *в*). По модулю $F_{xy} = F\cos\theta$, где θ – угол между направлением силы $\bar{F}$ и ее проекцией $\overline{F}_{xy}$. В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось удобнее сначала найти ее проекцию на плоскость, в которой расположена эта ось, а затем полученный вектор спроецировать на данную ось. Например, на рис. 1.6 *в* $F_x = OB_2 = F_{xy} \cos\varphi = F\cos\theta \cdot \cos\varphi$, $F_y = OB_3 = F_{xy} \sin\varphi = F\cos\theta \cdot \sin\varphi$.

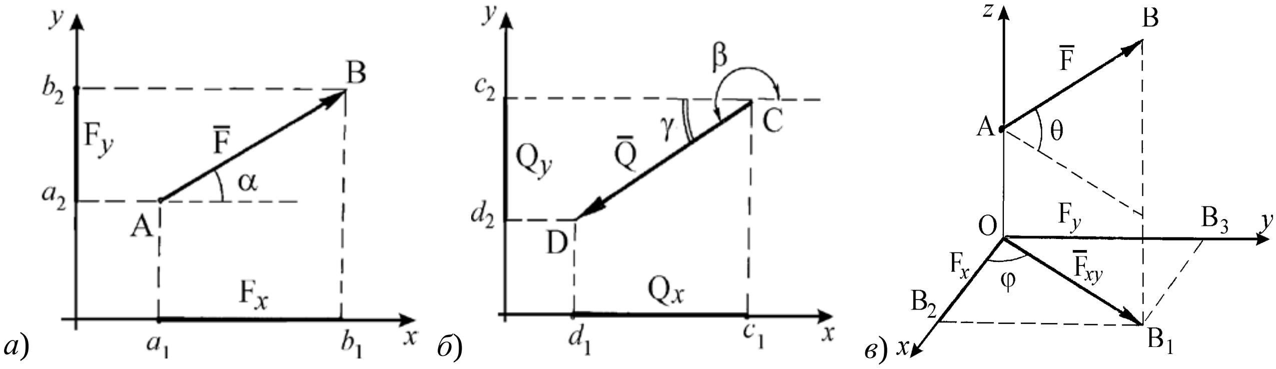


Рис. 1.6. Проекции сил на оси координат (а и б) и плоскость (в)

Геометрический метод сложения сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ основан на построении в масштабе векторного (силового) многоугольника, замыкающая сторона которого представляет эту сумму и называется *главным вектором* $\overline{R}$: $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n = \sum \overline{F}_k$, $(k = 1, 2, ..., n)$ (рис. 1.7*а*).

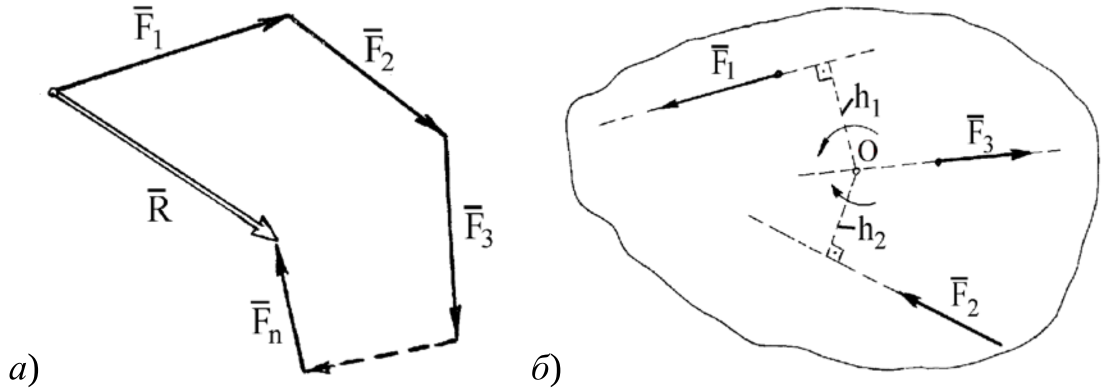


Рис. 1.7. Геометрический метод сложения сил (а). Определение момента силы относительно точки О на плоскости (б)

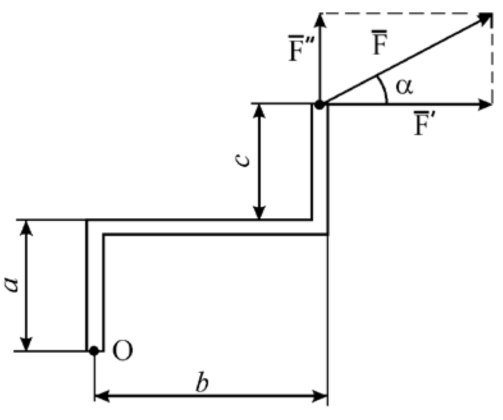
Аналитический метод сложения сил основан на известной теореме векторной алгебры: проекция вектора суммы на ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось: $R_x = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = \sum F_{kx}$, $R_y = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = \sum F_{ky}$, $R_z = F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz} = \sum F_{kz}$. Модуль (численное значение) главного вектора равен $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$.

Действие силы на твердое тело может вызвать вращательный эффект, который для плоской системы сил можно оценить с помощью *момента силы* относительно какой-либо точки О на плоскости: $m_O(\overline{F}_1) = F_1 \cdot h_1$; $m_O(\overline{F}_2) = -F_2 \cdot h_2$

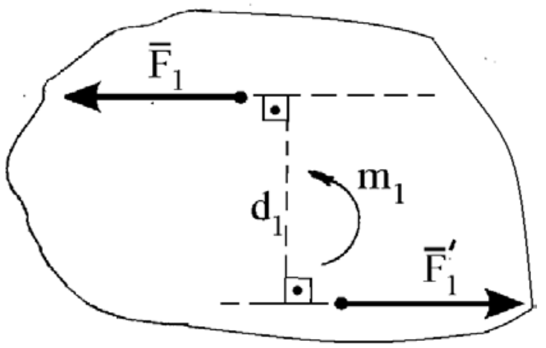
(рис. 7*б*), где h_1 и h_2 – плечи сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ относительно точки О. *Плечом* называется длина перпендикуляра, опущенного из точки О на линию действия соответствующей силы. Если данная сила стремится вращать тело вокруг точки О против хода часовой стрелки, то ее моменту относительно этой точки приписывают знак “+”. Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через эту точку, так как при этом плечо равно нулю (например, $m_O(\overline{F}_3)=0$).

Вычисление момента силы относительно какой-либо точки во многих случаях упрощается, если эту силу разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие и применить *теорему Вариньона*, согласно которой момент равнодействующей сходящихся сил относительно любого центра равен сумме моментов составляющих сил относительно того же центра. Например, для равнодействующей силы $\overline{F}$ и ее составляющих $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$ (рис. 1.8*а*) имеем: $m_O(\overline{F})= \; m_O(\overline{F}')+m_O(\overline{F}'')$, где $|\overline{F}'|=F'=F\cdot\cos\alpha$, $|\overline{F}''|=F''=F\cdot\sin\alpha$. Таким образом, $m_O(\overline{F})=-F\cdot cos\,\alpha\cdot(a+c)+F\cdot sin\,\alpha\cdot b$.

Вращательный эффект вызывает также пара сил – совокупность двух сил, равных по модулю, направленных в противоположные стороны и линии действия которых параллельны (рис. 1.8*б*). Пара сил, стремящаяся вращать тело против хода часовой стрелки, считается положительной, а по ходу часовой стрелки – отрицательной. Пара сил характеризуется ее моментом m, который равен взятому со знаком “плюс” или “минус” произведению модуля одной из сил данной пары на плечо пары, т. е. на кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары (d). Моменты сил на рис. 1.8*б* равны: $m_1 = F_1 \cdot d_1$; $m_2 = -F_2 \cdot d_2$. Систему пар сил, расположенных в одной плоскости, можно заменить одной эквивалентной парой, момент которой M равен алгебраической сумме моментов пар: $M = m_1 + m_2 + ... + m_n = \sum m_k$ (k = 1, 2, ..., n).



а)



б)

Рис. 1.8. Иллюстрация теоремы Вариньона (а). Пара сил (б)

1.2. Произвольная плоская система сил

Произвольная система сил – совокупность сил, расположенных в одной плоскости, линии действия которых не пересекаются в одной точке. Эту систему можно значительно упростить, приведя силы к одному центру приведения О, в котором будет приложена сила $\overline{R}$, называемая *главным векто*ром, и к паре сил с *главным моментом* M_{O} относительно этого центра. Главный вектор $\overline{R}$ равен геометрической сумме сил, входящих в данную систему: $\overline{R} = \sum \overline{F}_k$, а главный момент M_{O} – алгебраической сумме моментов сил относительно центра приведения: $M_O = \sum m_O\left(\overline{F}_k\right)$. Численное значение главного вектора определяется по его проекциям на координатные оси: $R = \sqrt{R_{\text{x}}^2 + R_{\text{y}}^2}$, где $R_{\text{x}} = \sum F_{k\,\text{x}}$ и $R_{\text{y}} = \sum F_{k\,\text{y}}$. Направление главного вектора находят по косинусам направляющих углов:

$$\cos\left(\overline{R},\ \bar{i}\right) = \frac{R_{\text{x}}}{R},\ \cos\left(\overline{R},\ \bar{\text{j}}\right) = \frac{R_{\text{y}}}{R},$$ где $\bar{i}$, $\bar{j}$ – орты вдоль осей Оx и Оy.

Условиями равновесия тела для произвольной плоской системы сил являются равенство нулю главного вектора и главного момента относительно любого центра О: $\overline{R} = 0$ и $M_{\text{O}} = 0$. Эти условия выполняются, если

$$\begin{cases} \sum F_{k\,\text{x}} = 0, \\ \sum F_{k\,\text{y}} = 0, \\ \sum m_O\left(\overline{F}_k\right) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Уравнения (1.1) называются *основными уравнениями равновесия*. Существуют еще две формы уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0, \\ \sum m_B\left(\overline{F}_k\right) = 0, \\ \sum F_{k\,\text{x}} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} \sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0, \\ \sum m_B\left(\overline{F}_k\right) = 0, \\ \sum m_C\left(\overline{F}_k\right) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

В системе уравнений (1.2) ось x не должна быть перпендикулярной к прямой, проходящей через центры A и B, а центры A, B и C в системе (1.3) не должны лежать на одной прямой.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется связью, наложенной на твердое тело?
2. Что называется силой реакции связи?
3. Перечислите основные виды связей и укажите их реакции.
4. Что называется равнодействующей системы сил?
5. Как сложить силы: *а*) геометрически, *б*) аналитически?
6. Как разложить силу по двум заданным направлениям?
7. Что называется моментом силы относительно центра на плоскости?
8. Чему равен момент пары сил?
9. Чему равен главный вектор и главный момент для произвольной плоской системы сил?
10. Сформулируйте три условия (уравнения) равновесия для произвольной плоской системы сил.
11. Какие задачи статики называют статически определимыми и какие статически неопределимыми?
12. Как определить проекцию силы на ось?
13. Сформулируйте условия равновесия системы сходящихся сил на плоскости и в пространстве.
14. Если связью является невесомый стержень, то как направлена сила его реакции в случае, когда он: *а*) прямолинейный, *б*) криволинейный?

1.3. Произвольная пространственная система сил

Моментом силы $\overline{F}$ относительно центра О называется приложенный в этом центре вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$, модуль которого равен произведению модуля силы $\overline{F}$ на ее плечо h. Момент силы направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр О и линию действия силы в ту сторону, откуда “вращение”, совершаемое силой вокруг точки О, представляется происходящим против хода часовой стрелки (рис. 1.9): $|\overline{m}_O(\overline{F})| = F \cdot h$.

Момент силы $\overline{F}$ *относительно центра* О может быть представлен в виде векторного произведения: $\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$, где $\overline{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы, так как модуль векторного произведения равен

$$|\overline{m}_O(\overline{F})| = |F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot h.$$

Вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\overline{r}$ и $\overline{F}$, в ту сторону, откуда кратчайший поворот вектора $\overline{r}$ к направлению вектора $\overline{F}$ представляется происходящим против хода часовой стрелки.

Моментом силы $\overline{F}$ *относительно оси* z, проходящей через центр O, называется скалярная величина, равная проекции вектора $\overline{m}_O(\overline{F})$ на эту ось: $m_Z(\overline{F}) = |\overline{m}_O(\overline{F})| \cdot \cos\gamma$. Механический смысл величины $m_Z(\overline{F})$ состоит в том, что она характеризует вращательный эффект силы, когда эта сила стремится повернуть тело вокруг оси z. В самом деле, если разложить силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F}_{xy}$ и $\overline{F}_z$, где $\overline{F}_z$ || Oz (рис. 1.10 *а*), то поворот вокруг оси z будет совершать только составляющая $\overline{F}_{xy}$ и вращательный эффект всей силы $\overline{F}$ будет определяться величиной $m_Z(\overline{F}) = \pm F_{xy} \cdot h$. Составляющая же $\overline{F}_z$ повернуть тело вокруг оси z не может, она лишь может сдвинуть тело вдоль оси z.

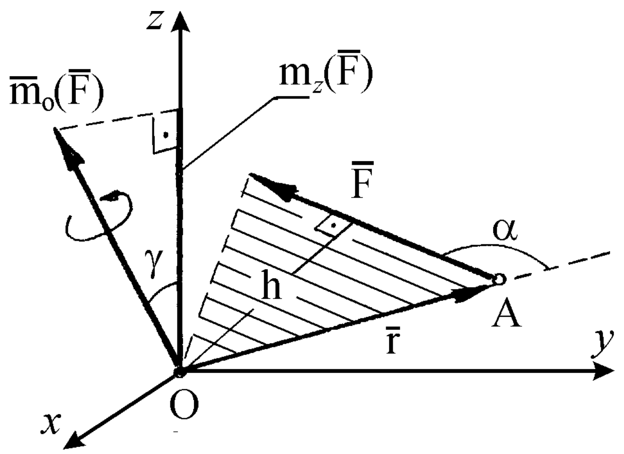


Рис. 1.9. Определение момента силы $\overline{F}$ *относительно центра O*

Момент силы относительно оси z будет иметь знак “плюс”, когда с положительного конца этой оси поворот, который стремится совершить сила $\overline{F}_{xy}$ вокруг этой оси, виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак “минус” – когда по ходу часовой стрелки. Для расчета момента какой-либо силы $\overline{F}$ относительно какой-либо оси z (рис. 1.10 *б*) нужно провести любую плоскость (*xy*), перпендикулярную к данной оси и, спроектировав силу на эту плоскость, найти алгебраическую величину момента полученной проекции $\overline{F}_{xy}$ относительно точки O пересечения оси z с плоскостью *xy* по формуле:

$$m_Z(\overline{F}) = m_O(\overline{F}_{xy}) = F \cdot \cos\alpha \cdot h..$$

Поэтому момент силы относительно оси равен нулю, когда угол α=0, т.е. сила параллельна оси z или, когда линия действия силы пересекает эту ось.

При изучении равновесия произвольной пространственной системы сил приходится определять моменты пар сил относительно осей в виде вектора, направленного по перпендикуляру к плоскости действия пары в ту сторону, откуда вращение тела этой парой сил представляется происходящим против направления вращения часовой стрелки. Изображенные на рис.1.11, *а* и *б* векторы $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$ представляют собой соответственно моменты пар сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$ и $(\overline{F}_2, \overline{F}_2')$.

Так как пару сил можно переносить в ее плоскости действия и в любую другую плоскость, ей параллельную, то ее момент $\overline{M}$ не имеет определенной точки приложения и является *свободным вектором*, который можно переносить параллельно самим себе в любую точку тела.

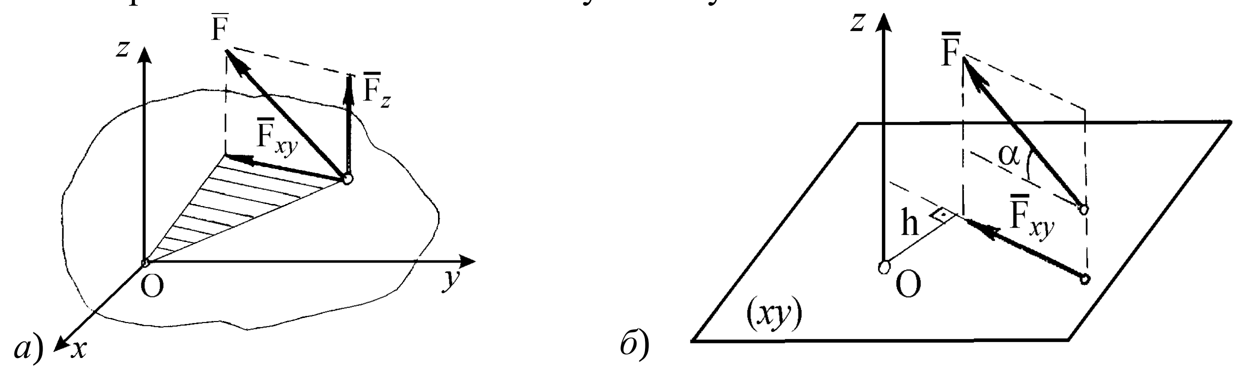


Рис. 1.10. Определение момента силы $\overline{F}$ относительно оси z, проходящей через центр O (а) и схема его расчета (б)

При определении момента пары сил относительно какой-либо оси достаточно найти проекцию вектора этой пары на данную ось, например, на рис. 1.11 *а* и *б*, величины $M_{1x} = M_{1z} = 0$; $M_{1y} = M_1$; $M_{2x} = M_{2y} = 0$; $M_{2z} = - M_2$.

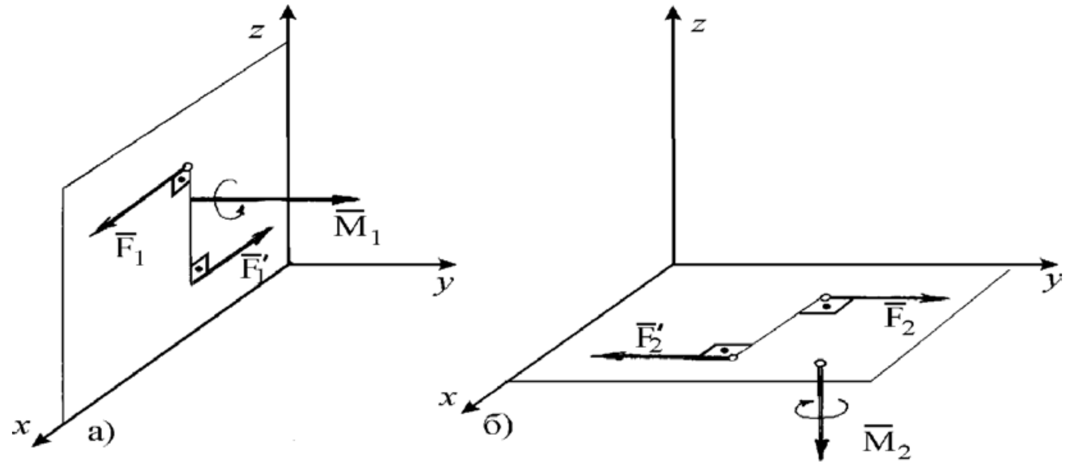


Рис. 1.11. Определение момента пары сил как вектора

Для сложения пар сил достаточно перенести их моменты как свободные векторы (параллельно самим себе) в общую точку и применить правило сложения векторов. Так, на примере двух пар сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_1'\right)$ и $\left(\overline{F}_2, \overline{F}_2'\right)$, расположенных в плоскостях *xBy* и *xBz* соответственно (рис. 1.12), выполняется соотношение: $\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$. Модуль *M* результирующего вектора $\overline{M}$ находится как величина диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$: $M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$, или в проекциях на координатные оси: $M_x = M_{1x} + M_{2x} = 0$; M_y

$= \; = M_{1y} + M_{2y} = - M_2$; $M_z = M_{1z} + M_{2z} = M_1$, следовательно, $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-M_2)^2 + M_1^2}$.

Любую пространственную систему сил можно привести к некоторому центру O с главным вектором $\overline{R}$, приложенным в этом центре, и главным моментом $\overline{M}_O$ относительно этого центра. Главный вектор равен геометрической сумме всех сил: $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n = \sum \overline{F}_k$ и не зависит от выбора центра приведения, а главный момент $\overline{M}_O$ равен геометрической сумме векторов-моментов всех сил относительно этого центра (включая и векторы-моменты всех пар сил) и зависит от выбора центра приведения: $\overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k)$.

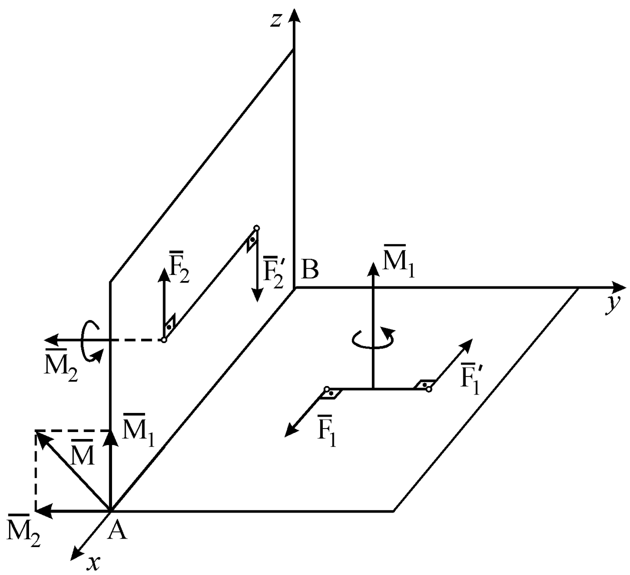


Рис. 1.12. Сложение моментов пар сил

Условиями равновесия произвольной пространственной системы сил являются равенство нулю главного вектора и главного момента этой системы сил относительно любого центра, что выражается шестью уравнениями в проекциях на оси декартовой системы координат: $R_x = \sum F_{kx} = 0$; $R_y = \sum F_{ky} = 0$; $R_z = \sum F_{kz} = 0$; $M_{Ox} = \sum m_x(\overline{F}_k) = 0$; $M_{Oy} = \sum m_y(\overline{F}_k) = 0$; $M_{Oz} = \sum m_z(\overline{F}_k) = 0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определить момент силы относительно оси?
2. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
3. Как представить вектор-момент пары сил, расположенной в пространстве?
4. Как складываются пары сил в пространстве?
5. Как вычислить главный вектор и главный момент пространственной произвольной системы сил?
6. Каковы условия (уравнения) равновесия для произвольной пространственной системы сил?

1.4. Примеры решения задач

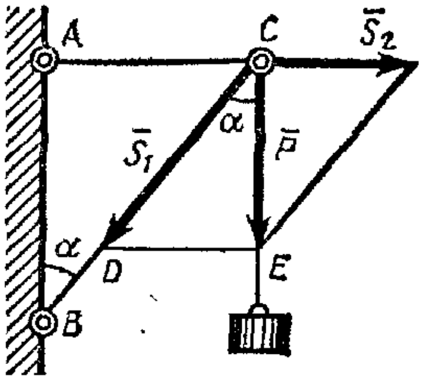


Рис. 1.13. К задаче 1.1

Задача 1.1.

Кронштейн состоит из стержней AC и BC, соединенных со стеной и друг с другом шарнирами, причем $BAC = 90°$, $ABC = \alpha$ (рис.1.13). В точке С подвешен груз весом Р. Определить усилия в стержнях, пренебрегая их весом.

Решение.

Под усилиями в стержнях понимают значения сил, растягивающих или сжимающих эти стержни. Так как стержни считаются невесомыми, то их реакции (они действуют на шарнир С) направлены вдоль стержней. Тогда для определения искомых усилий приложим силу $\vec{P}$ в точке С и разложим ее по направлениям АС и СВ. Составляющие $\vec{S_1}$ и $\vec{S_2}$ и будут искомыми силами. Из треугольника CDE находим:

$$S_1 = Pcos\alpha, S_2 = Ptg\alpha.$$

Таким образом, стержень ВС сжимается силой S_1 а стержень АС растягивается силой S_2. С увеличением угла α усилия в стержнях растут и при α, близком к 90°, могут достигать очень больших размеров.

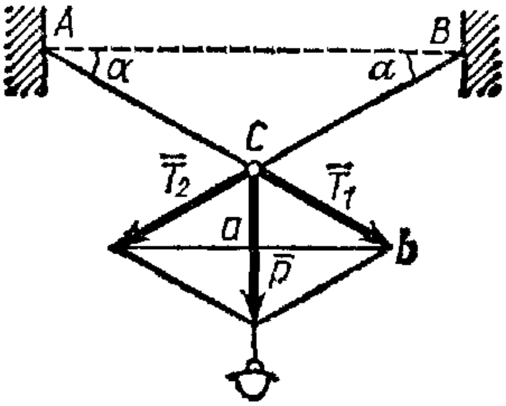


Рис. 1.14. К задаче 1.2

Задача 1.2.

Фонарь весом Р=200 Н (рис. 1.14) подвешен на двух тросах АС и ВС, образующих с горизонтальной прямой одинаковые углы α=5°. Определить, с какой силой натянуты тросы.

Решение.

Приложим силу $\bar{P}$ в точке С и разложим ее по направлениям тросов. Параллелограмм сил в данном случае будет ромбом; диагонали его взаимно перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам. Из треугольника *aCb* находим, что $P/2=T_1 sin\alpha$. Тогда

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{2sin\alpha} \approx 1150\text{Н}.$$

Из полученной формулы видно, что с уменьшением угла α натяжение тросов значительно увеличивается (например, при α= 1° Т=5730 Н). Натянуть трос так, чтобы он стал горизонтальным, практически нельзя, так как при $\alpha \to 0$ $T \to \infty$.

Задача 1.3

Груз весом Р лежит на гладкой наклонной плоскости с углом наклона α, (рис. 1.15, а). Определить значение горизонтальной силы $\bar{F}$, которую надо приложить к грузу, чтобы удержать его в равновесии, и найти, чему при этом равна сила давления $\bar{Q}$ груза на плоскость.

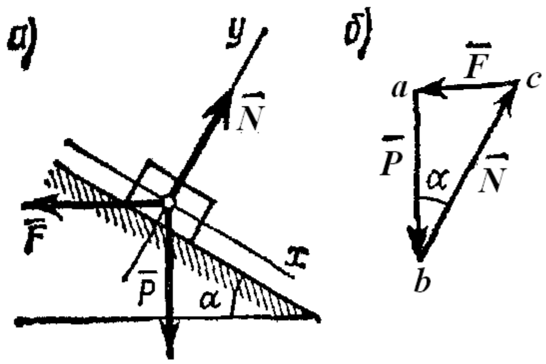


Рис. 1.15. К задаче 1.3

Решение.

Искомые силы действуют на разные тела: сила $\vec{F}$ на груз, сила $\vec{Q}$ — на плоскость. Для решения задачи вместо силы $\vec{Q}$ будем искать равную ей по модулю, но противоположно направленную реакцию плоскости $\vec{N}$. Тогда заданная сила $\vec{P}$ и искомые силы $\vec{F}$ и $\vec{N}$ будут действовать на груз, т. е. на одной то же тело. Рассмотрим равновесие груза и изобразим действующие на этот груз силы $\vec{P}$ и $\vec{F}$ и реакцию связи $\vec{N}$. Для определения искомых сил можно воспользоваться или геометрическим, или аналитическим условиями равновесия. Рассмотрим оба способа решения.

Геометрический способ. При равновесии треугольник, построенный из сил $\vec{P}$, $\vec{F}$ и $\vec{N}$, должен быть замкнутым. Построение треугольника начинаем с заданной силы. От произвольной точки *а* в выбранном масштабе откладываем силу $\vec{P}$ (рис. 1.15, б). Через начало и конец этой силы проводим прямые, параллельные направлениям сил $\vec{F}$ и $\vec{N}$. Точка пересечения этих прямых дает третью вершину с замкнутого силового треугольника *abc*, в котором стороны *bc* и *са* равны в выбранном масштабе искомым силам. Направление сил определяется правилом стрелок: так как здесь равнодействующая равна нулю, то при обходе треугольника острия стрелок нигде не должны встречаться в одной точке.

Модули искомых сил из треугольника *abc* можно найти и путем численного расчета (в этом случае соблюдать масштаб при изображении сил не надо). Замечая, что $\angle bac = 90^0$, а $\angle abc = \alpha$, получим:

$$F = Ptg\alpha, \quad N = P / \cos\alpha .$$

Аналитический способ. Так как система действующих сходящихся сил является плоской, для нее надо составить два условия равновесия. Сначала проводим координатные оси; при этом для получения более простых уравнений ось x направляем перпендикулярно неизвестной силе $\bar{N}$. Далее вычисляем проекции сил $\vec{P}$, $\vec{F}$, $\vec{N}$ на оси x и y, внося их в таблицу.

$\overline{F_k}$	$\vec{P}$	$\vec{F}$	$\vec{N}$
F_{kx}	$P\sin\alpha$	$-F\cos\alpha$	0
F_{ky}	$-P\cos\alpha$	$-F\sin\alpha$	N

Теперь составляем уравнения $\sum F_{kx}=0,\quad \sum F_{ky}=0$. Получим:

$$P\sin\alpha - F\cos\alpha = 0; \quad -P\cos\alpha - F\sin\alpha + N = 0,$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$F = Ptg\alpha, \quad N = P\cos\alpha + P\sin^2\alpha/\cos\alpha = P/\cos\alpha .$$

Геометрическое решение в подобных простых задачах (когда действующих сил три) оказывается более компактным, чем аналитическое. Как видно, при $\alpha < 45°$ $F < P$, а при $\alpha > 45°$ $F > P$; $N > P$ при любом $\alpha > 0$.

Искомая сила давления груза на плоскость численно равна N, но направлена в противоположную сторону ($\bar{Q}$=—$\bar{N}$).

Задача 1.4

Кронштейн состоит из горизонтального бруса AD (рис. 1.16) весом P_1=150 Н, прикрепленного стене шарниром, и подкоса CB весом P_2=120 Н, который с брусом AD и со стеной также соединен шарнирами (все размеры показаны на чертеже). К концу D бруса подвешен груз весом Q=300 Н. Определить реакции шарниров A и C, считая брус и подкос однородными.

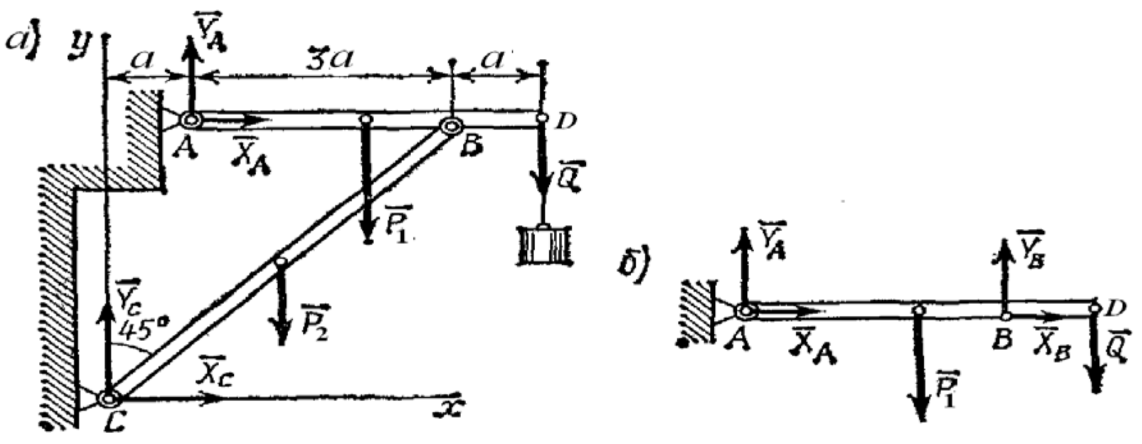


Рис. 1.16. К задаче 1.4

Решение.

Рассмотрим сначала равновесие всего кронштейна. На него действуют следующие внешние силы: заданные силы $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{Q}$ и реакции связей $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$. Кронштейн, освобожденный от внешних связей, не образует жесткой конструкции (брусья могут поворачиваться вокруг шарнира B), но по принципу отвердевания действующие на него силы при равновесии должны удовлетворять условиям равновесия статики.

Составляя эти условия, найдем:

$$\sum F_{kx} \equiv X_A + X_C = 0,$$

$$\sum F_{ky} \equiv Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0,$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) \equiv X_C \cdot 4a - Y_C \cdot a - P_1 \cdot 2a - P_2 \cdot a - Q \cdot 4a = 0.$$

Полученные три уравнения содержат, как видим, четыре неизвестных X_A, Y_A, X_C, Y_C. Для решения задачи рассмотрим дополнительно равновесие бруса AD (рис. 1.16, б). На него действуют силы $\bar{P}_1$, $\bar{Q}$, реакции $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ реакции $\bar{X}_B$, которые для бруса AD (когда рассматривается его равновесие) будут силами внешними. Недостающее четвертое уравнение составим, беря моменты действующих на брус AD сил относительно центра B (тогда в уравнение не войдут новые неизвестные X_B, Y_B):

Решая теперь систему четырех составленных уравнений (начиная с последнего), найдем:

$$Y_A = \frac{P_1 - Q}{3} = -50H, Y_C = \frac{2P_1}{3} + P_2 + \frac{4Q}{3} = 620H,$$

$$X_C = \frac{2P_1}{3} + \frac{P_2}{2} + \frac{4Q}{3} = 560H, X_A = -X_C = -560H.$$

Из полученных результатов видно, что силы $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$ имеют направления, противоположные показанным на чертеже. Реакции шарнира B, если их надо определить, найдутся из уравнений проекций на оси x и y сил, действующих на брус AD, и будут равны: X_B=— X_A, Y_B=P_1+Q—Y_A=500 Н.

Как видим, при решении задач статики не всегда надо составлять все условия равновесия для рассматриваемого тела. Если в задаче не требуется определять реакции некоторых связей, то надо пытаться сразу составить такие уравнения, в которые эти неизвестные реакции не будут входить. Так мы и поступили в данной задаче при рассмотрении равновесия бруса AD, составляя только одно уравнение моментов относительно центра B.

Задача 1.5

Горизонтальная балка AB весом Q=200 Н прикреплена к стене шарниром A и опирается на опору C (рис. 1.17, а). К ее концу B шарнирно прикреплен брус BK весом P=400Н, опирающийся на выступ D. При этом CB=AB/3, DK=BK/3, угол α=45°. Определить реакции опор, считая балку и брус однородными.

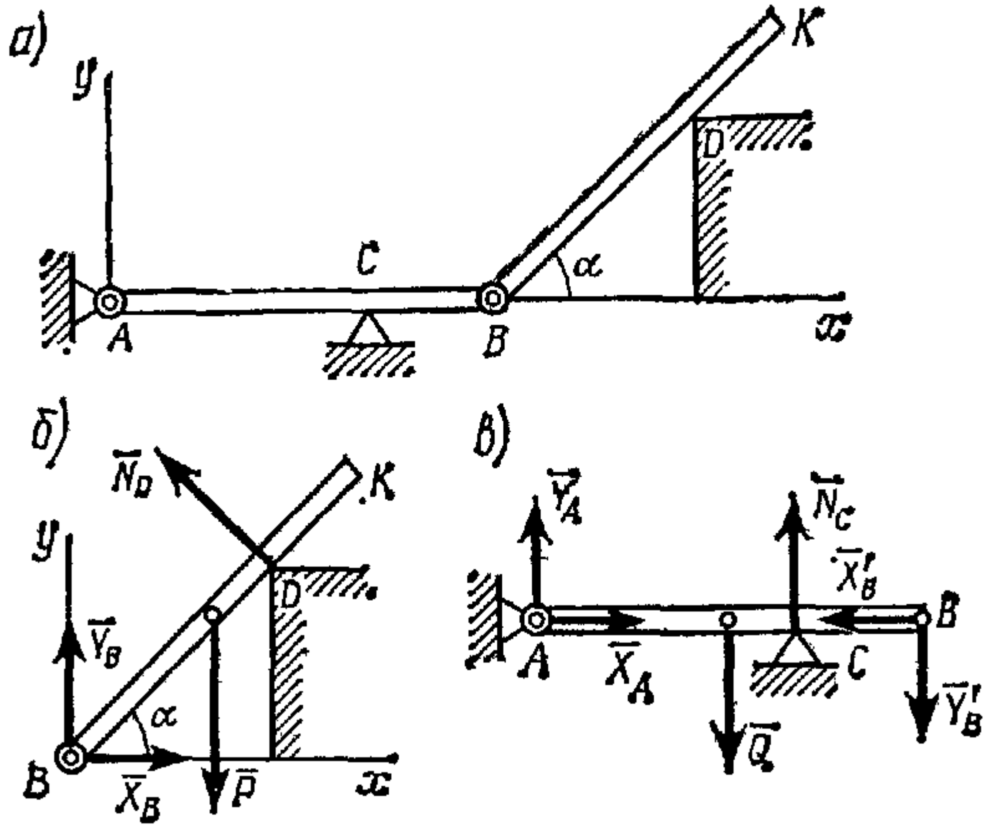


Рис. 1.17. К задаче 1.5

Решение.

Расчленяя систему на две части, рассматриваем равновесие бруса BK и балки AB в отдельности. На брус BK, (рис. 1.17, б) действуют сила $\bar{P}$ и реакции связей $\bar{N}_D$, $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$. Вводя обозначение BK=a и составляя для этих сил условия равновесия, получим:

$$\sum F_{kx} \equiv X_B - N_D sin\alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} \equiv Y_B - P + N_D \times cos\alpha = 0,$$

$$\sum m_B(\bar{F}_k) \equiv N_D \cdot 2a/3 - P(a/2)cos\alpha = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$N_D = \left(\frac{3P}{4}\right) cos\alpha = 212H,$$

$$X_B = \left(\frac{3P}{8}\right) sin2\alpha = 150H,$$

$$Y_B = P - \left(\frac{3P}{4}\right) cos^2\alpha = 250H.$$

На балку АВ, если ее рассматривать отдельно, действуют сила $\bar{Q}$, реакции внешних связей $\bar{N}_C, \bar{X}_A, \bar{Y}_A$ и силы давления $\bar{X}'_B$ и $\bar{Y}'_B$ бруса ВК, передаваемые через шарнир В (рис. 1.17, в). При этом по закону о действии и противодействии силы $\bar{X}'_B$ и $\bar{Y}'_B$ должны быть направлены противоположно $\bar{X}_B$ и $\bar{Y}_B$; по модулю же $X'_B=X_B$, $Y'_B=Y_B$.

Вводя обозначение АВ=b и составляя для сил, действующих на балку, условия равновесия , получим:

$$\sum F_{kx} \equiv X_A - X'_B = 0, \quad \sum m_A(\bar{F}_k) \equiv -Y'_B b + N_C \cdot \frac{2b}{3} - Q \cdot b/2 = 0,$$

$$\sum m_C(\bar{F}_k) \equiv -Y_A \cdot 2b/3 + Q \cdot \frac{b}{6} - Y'_B \cdot b/3 = 0.$$

Полагая в этих уравнениях $X'_B=X_B$ и $Y'_B=Y_B$ и решая их, найдем:

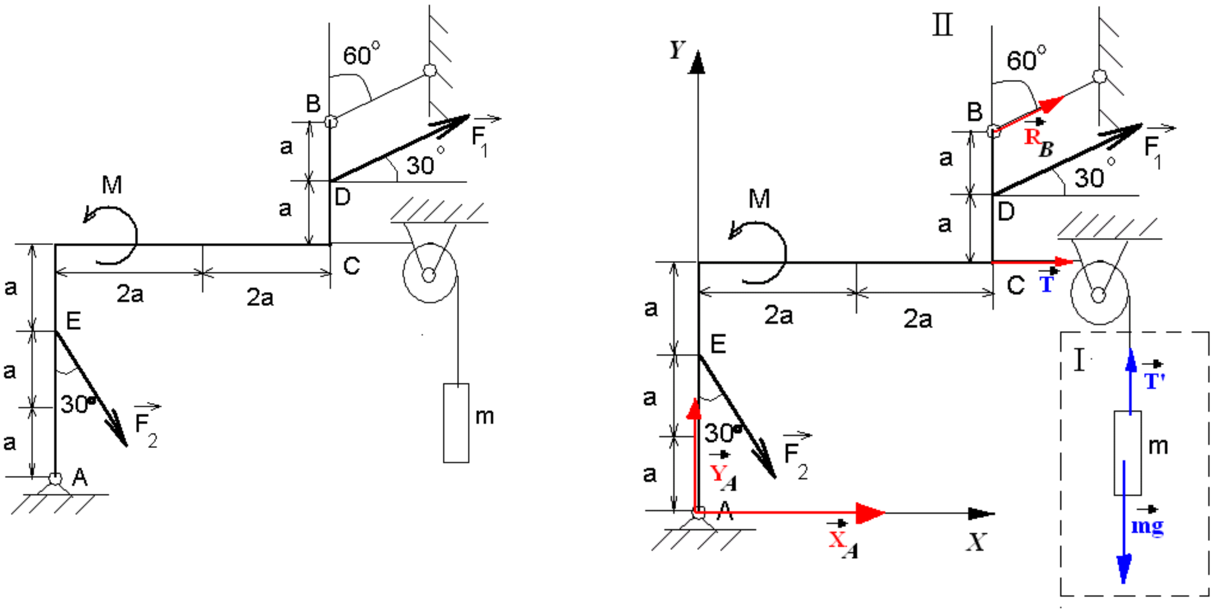
$X_A=X_B=150$Н, $Y_A=Q/4-Y_B/2=-75$Н, NC=3Q/4+3YB/2=525Н.

Из полученных результатов видно, что все реакции, кроме $\bar{Y}_A$, имеют направления, показанные на рис. 1.17, реакция же $\bar{Y}_A$ фактически направлена вниз.

При решении задач этим путем важно иметь в виду, что если давление какого-нибудь одного тела на другое изображено силой $\bar{R}$ или составляющими $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, то на основании закона о действии и противодействии давление второго тела на первое должно изображаться силой $\bar{R}'$, направленной противоположно $\bar{R}$ (причем по модулю R'=R) или составляющими $\bar{X}'$, $\bar{Y}'$, направленными противоположно $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ (причем по модулю X'=X, Y'=Y).

Задача 1.6

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости, закреплена в точке А шарнирно, а в точке В прикреплена к невесомому стержню с шарнирами на концах (рис.1.18 а). В точке *С* к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз массой 2,5 кг. На раму действует пара сил с моментом М=100 Нм и две силы F_1 =10 Н и F_2=40 Н, приложенные в точках *D* и *E*. Определить реакции связей в точках А и В, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять a=0,5 м, $g = 10\ \frac{м}{c^2}$.



а) *б)*

Рис. 1.18. К задаче 1.6

Решение.

Освободим раму, груз и блок от связей, заменив их реакциями (рис.1.18.б). Реакцию связи неподвижного шарнира изобразим как две взаимно перпендикулярные силы $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ (см.рис.1.2), сила реакции в точке B ($\vec{R}_B$) (направлена по невесомому стержню (см. рис. 1.4б), силы реакции гибкой нерастяжимой нити – вдоль нее ($\vec{T}$ и $\vec{T}'$) (см. рис.1.1). Добавим силу тяжести, действующую на груз. Разобьем рассматриваемую систему тел на две части: груз (I) и жесткая рама (II) .

Часть I

Уравнение равновесия в проекции на ось Y.

$T' - mg = 0$, поэтому $T' = 25\ H$.

Если рассмотреть условие равновесия блока (правило моментов), можно показать, что $T' = T$.

Часть II

Сумма проекций на ось X

$$X_A + F_1 \cos 30^0 + F_2 \cos 60^0 + T + R_B \cos 30^0 = 0$$

Сумма проекций на ось Y

$$Y_A + F_1 \cos 60^0 - F_2 \cos 30^0 + R_B \cos 60^0 = 0$$

Если сила пересекает центр (например $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$), то ее момент относительно этого центра равен нулю. Поэтому оптимально составлять уравнения моментов относительно точки, в которой пересекается наибольшее число неизвестных сил.

Сумма моментов сил относительно точки А.

$$-F_2\cos 60^0 \cdot 2a - T \cdot 3a - F_1\cos 30^0 \cdot 4a + F_1\cos 60^0 \cdot 4a - R_B\cos 30^0 \cdot 5a + R_B\cos 60^0 \cdot 4a + M = 0$$

Из полученных уравнений имеем:

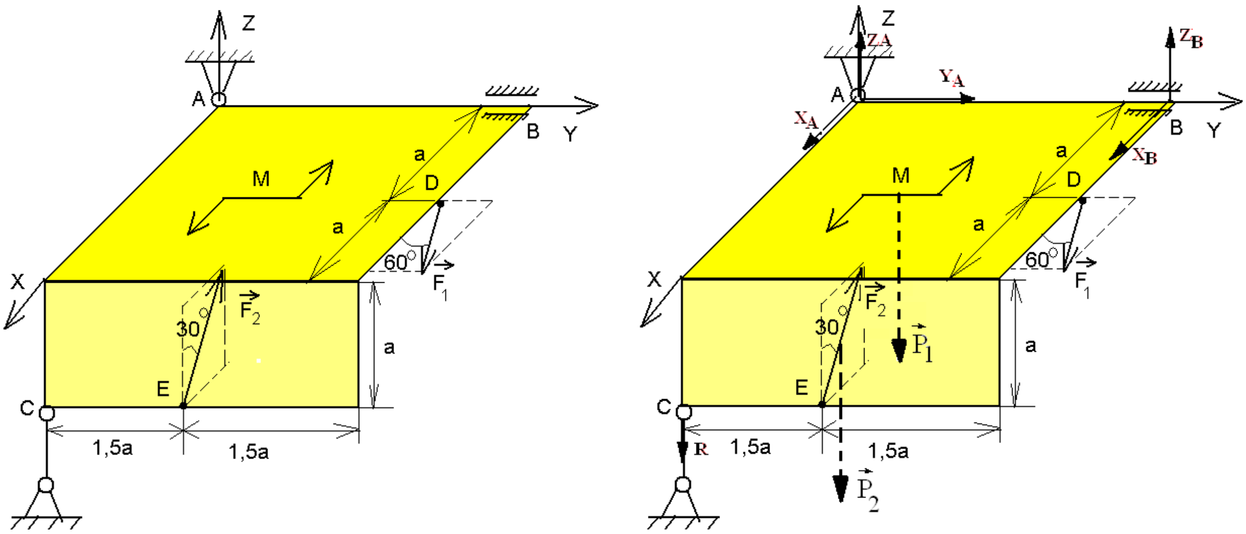
X_A = -80 H , Y_A = 14,5 H и R_B = 30,2 H.

Применив теорему Пифагора, получим R_A = 81,3 H

Задача 1.7

Две однородные прямоугольные плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим шарниром в точке B и невесомым стержнем в точке С (рис.1.19.а). Размеры плит указаны на рисунке. Масса большей плиты 500 кг, меньшей 300 кг. На плиты действуют пары сил с моментом 4 кНм в плоскости XOY и две силы. Сила F_1 лежит в плоскости XOY и равна 6 кН, Сила F_2 лежит в плоскости XOZ и равна 8 кН.

Определить реакции связей в точках A и B и реакцию стержня. При подсчетах принять a=0,6 м.



а) *б)*

Рис.1.19. К задаче 1.7

Применим теорему освобождения от связей и заменим их реакциями (рис. 1.19 б). Запишем условия равновесия

Уравнения равновесия представляют собой систему из шести уравнений

$$\begin{cases} X_A + X_B + F_1 \cdot \cos 60^0 - F_2 \cdot \cos 60^0 = 0 \\ Y_A + F_1 \cos 30^0 = 0 \\ Z_A + Z_B - R + F_2 \cdot \cos 30^0 - P_1 - P_2 = 0 \\ Z_B \cdot 3a + F_2 \cdot \cos 30^0 \cdot 1.5a - P_1 \cdot 1.5a - P_2 \cdot 1.5a = 0 \\ R \cdot 2a + F_2 \cdot \cos 60^0 \cdot a - F_2 \cdot \cos 30^0 \cdot 2a + P_1 \cdot a + P_2 \cdot 2a = 0 \\ -X_B \cdot 3a - F_1 \cdot \cos 60^0 \cdot 3a + F_1 \cdot \cos 30^0 \cdot a + F_2 \cdot \cos 60^0 \cdot 1.5a + M = 0 \end{cases}$$

Решение системы приводит к следующему результату

X_A = -2 кН, Y_A = -5,2 кН, Z_A = 0, X_B = 3 кН, Z_B = 0,5 кН, R = -0,5 кН.

2. Кинематика

2.1. Кинематика точки

Определить движение точки – это значит определить ее положение по отношению к выбранной системе отсчета в любой момент времени. Для решения этой задачи в кинематике применяются три способа задания движения точки: *векторный, координатный и естественный*.

При векторном описании движения точки *M* ее радиус-вектор определяется как векторная функция от времени, т. е. $\bar{r} = \bar{r}(t)$ (рис. 2. 1*а*). Скорость $\bar{V}$ точки, характеризующая быстроту и направление движения точки, равна производной по времени от ее радиуса-вектора: $\bar{V} = d\bar{r}/dt$. Ускорение $\bar{a}$ точки, характеризующее изменение скорости по модулю и направлению, равно производной по времени от вектора скорости: $\bar{a} = d\bar{V}/dt = d^2\bar{r}/dt^2$.

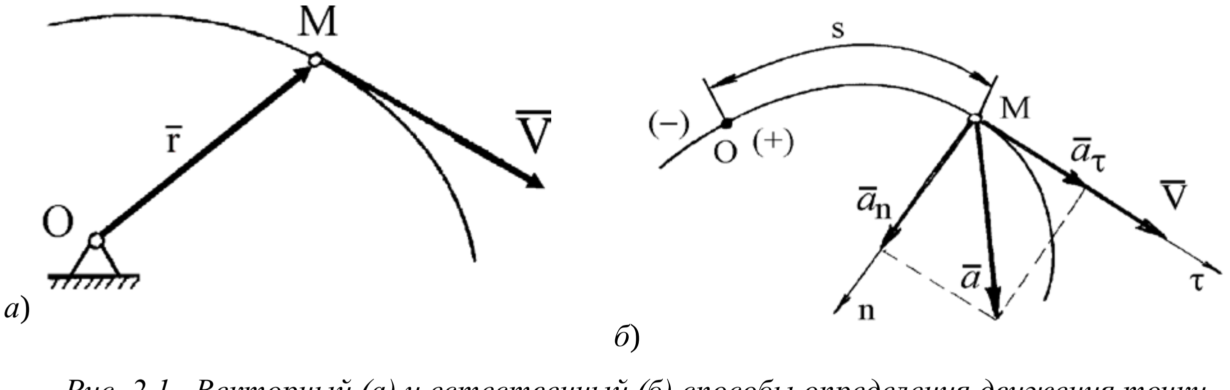


Рис. 2.1. Векторный (а) и естественный (б) способы определения движения точки

Координатный способ определения (задания) движения точки состоит в том, что ее координаты в выбранной системе координат выражаются как функции времени *t*. Уравнения движения точки в декартовых координатах имеют вид: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Если точка движется в плоскости O*xy*, то для ее описания достаточно только двух уравнений движения: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Для того чтобы найти траекторию точки, необходимо из уравнений движения исключить время *t*. Векторы скорости и ускорения определяются по их проекциям на оси декартовых координат следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \dot{x} = dx/dt, \\ V_y &= \dot{y} = dy/dt, \\ V_z &= \dot{z} = dz/dt; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = d^2x/dt^2, \\ a_y &= \ddot{y} = d^2y/dt^2, \\ a_z &= \ddot{z} = d^2z/dt^2. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Отсюда получаем формулы разложения векторов скорости $\bar{V}$ и ускорения $\bar{a}$ по координатным осям: $\bar{V} = \dot{x}\cdot\bar{i} + \dot{y}\cdot\bar{j} + \dot{z}\cdot\bar{k}$, $\bar{a} = \ddot{x}\cdot\bar{i} + \ddot{y}\cdot\bar{j} + \ddot{z}\cdot\bar{k}$. Модули векторов скорости и ускорения вычисляем по формулам: $|\bar{V}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$, $|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$.

При естественном способе движение точки задается ее траекторией и уравнением движения по этой траектории: $s = \overset{\cup}{OM} = s(t)$, где точка О – начало отсчета дуг на траектории; *s* – дуговая координата точки *M* или взятая с соответствующим знаком длина дуги, отсчитываемая вдоль траектории от начала отсчета до точки *M* (рис. 2.1 *б*). Если заданы траектория точки и закон ее движения по этой траектории *s* = *s*(*t*), то вектор скорости направлен по касательной к этой траектории, а его проекция на направление касательной определяется по формуле $V = ds/dt$, причем абсолютное значение этой проекции равно модулю скорости: $|V| = |ds/dt|$. Вектор ускорения определяется по его проекциям на естественные оси (касательную, главную нормаль и бинормаль): $a_\tau = dV/dt = d^2s/dt^2$, $a_n = V^2/\rho$, $a_в = 0$, где ρ – радиус кривизны траектории в данной точке. Следовательно, $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Отметим важные частные случаи:

1. Если точка движется прямолинейно и неравномерно, то радиус кривизны траектории $\rho \to \propto$ и, следовательно, $a_n = 0$. В этом случае ускорение направлено вдоль траектории точки и по модулю равно $a = |a_\tau| = |dV/dt| = |d^2s/dt^2|$.

2. Если точка движется по криволинейной траектории равномерно, то $V =$ const, и $a_\tau = dV/dt = 0$, и поэтому ускорение направлено по нормали к траектории и по модулю равно $a = a_n = V^2/\rho$.

3. Если точка движется прямолинейно и равномерно, то $a_n = 0$, $a_\tau = 0$ и $a = 0$.

В том случае, когда движение точки задано в координатной форме, касательное ускорение определяется по формуле $a_\tau = dV/dt = d\left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\right)/dt$, или $a_\tau = (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})/V$. После этого нормальное ускорение можно найти из равенства $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$, где $a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2$. Определив a_n, найдем радиус кривизны по формуле $\rho = V^2 / a_n$.

Если плоская траектория задана уравнением $y = y(x)$, то радиус кривизны траектории вычисляется по формуле: $\rho = \sqrt{(1 + y'^2)^3} / y''$, где $y' = dy/dx$ и $y'' = d^2 y / dx^2$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется траекторией точки?
2. Опишите способы задания движения.
3. Как при координатном способе задания движения точки определяется ее траектория?
4. Как найти проекции векторов скорости и ускорения точки на оси декартовой системы координат?
5. Как вычислить модули векторов скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси?
6. Как определяются и что характеризуют нормальное и касательное ускорения точки?
7. Как найти радиус кривизны траектории в какой-либо ее точке?

2.2. Кинематика плоскопараллельного движения твердого тела

Плоскопараллельным (*плоским*) *движением* твердого тела называется такое движение, при котором траектории всех его точек лежат в плоскостях,

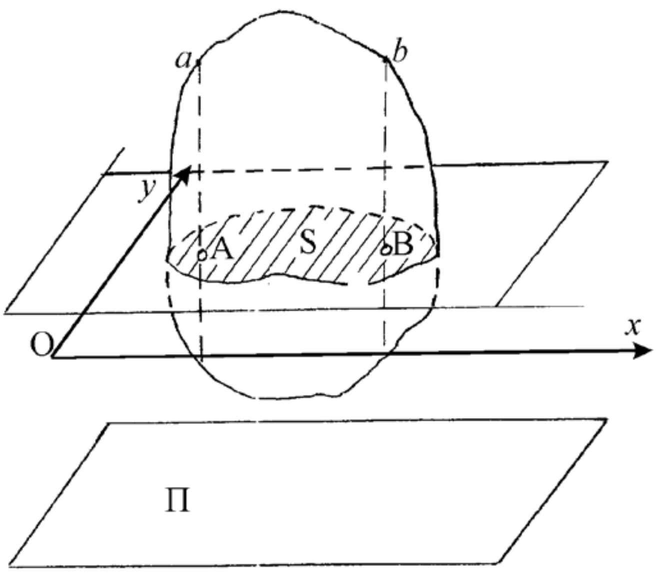


Рис. 2.2. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела

кости *П* (рис. 2.2). При пересе-
этой плоскости, в его сечении
ıя будет перемещаться при дви-
оскости *xOy*. При таком движе-
уляре *Aa* к плоскости фигуры,
ık и точка *A* этой фигуры. Все
к плоскости фигуры, движутся
ıс. 2.2). Поэтому для определе-
ıть движение этой фигуры в ее

Положение неизменяемой плоскости S вполне определяется положением двух произвольных ее точек A и B. Следовательно, изучение движения этой фигуры сводится к изучению движения прямолинейного отрезка AB в плоскости этой фигуры. Положение этого отрезка определяется двумя координатами x_A и y_A точки A, называемой *полюсом*, и углом φ, который образует этот отрезок с некоторой осью неизменного направления, лежащей в плоскости данной фигуры (рис. 2.3). Таким образом, движение плоской фигуры в ее плоскости можно определить тремя уравнениями, из которых следует, что движение плоской фигуры можно разложить на два движения: 1) поступательное движение вместе с полюсом A, определяемое уравнениями: $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$, и 2) вращательное движение вокруг полюса, определяемое уравнением: $\varphi = \varphi(t)$.

При этом угловая скорость вращательного движения не зависит от выбора полюса. Поэтому скорость любой точки B этой фигуры равна геометрической сумме скорости полюса $\overline{V}_A$ и скорости $\overline{V}_{BA}$ точки B во вращательном движении вокруг него (рис. 1.6), т. е. $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$, причем $\overline{V}_{BA} \perp AB$ и $V_{BA} = \omega \cdot AB$. Отсюда следует *теорема о проекциях скоростей точек плоской фигуры*: проекции скоростей двух точек на ось η, проходящую через эти точки, равны между собой.

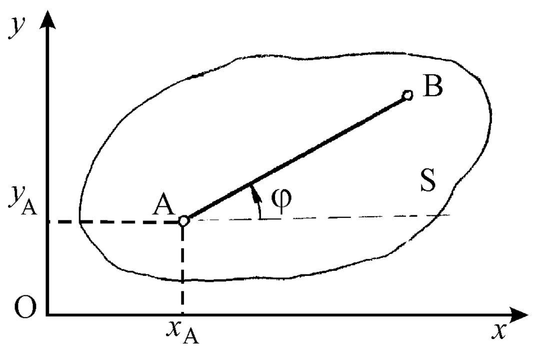


Рис. 2.3. Положение отрезка AB, с которым неизменно связана фигура S

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется такая точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю. Если известны скорость $\overline{V}_A$ какой-либо точки A плоской фигуры и угловая скорость ω этой фигуры, то, повернув вектор $\overline{V}_A$ вокруг точки A на угол 90°в направлении вращения фигуры и отложив на этой полупрямой отрезок $AP = V_A/\omega$, получим точку P, которая является МЦС (рис. 2.4).

Если же известны направления скоростей двух точек плоской фигуры, то МЦС находят как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных в этих точках к направлениям их скоростей. Если известны МЦС и угловая скорость фигуры, то вектор скорости $\overline{V}_B$ любой точки B фигуры – ее скорость во вращательном движении вокруг МЦС – перпендикулярна к отрезку PB, и по модулю равен $\omega \cdot PB$. Отсюда следует, что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей, т. е. $V_A/V_B = PA/PB$.

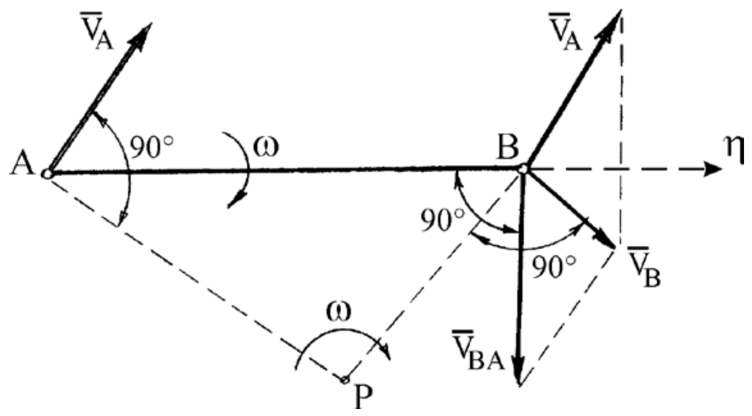


Рис. 2.4. Определение мгновенного центра скоростей

Отметим другие случаи нахождения положения МЦС, применяемые при решении задач. Если скорости точек A и B параллельны и $AB \perp \overline{V}_A$, то для определения положения МЦС следует воспользоваться свойством пропорциональности скоростей расстояниям точек до МЦС (рис. 2.5 *а* и *б*). Если скорости $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$ параллельны, но скорость $\overline{V}_A$ неперпендикулярна отрезку AB (рис.2.5 *в*), то прямые Aa и $Bв$, перпендикулярные $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$, пересекаются в бесконечности и мгновенного центра скоростей не существует, и угловая скорость фигуры равна нулю (ω =0). На основании теоремы о проекциях скоростей $V_A \cdot \cos\alpha = V_B \cdot \cos\alpha$, отсюда $V_A = V_B$ и $\overline{V}_A = \overline{V}_B$, т.е. в данный момент времени скорости всех точек плоской фигуры равны по модулю и направлению.

При качении без скольжения одного тела по поверхности неподвижного другого (рис. 2.5 *г*) МЦС совпадает с точкой P соприкосновения тел (так как при отсутствии скольжения скорость точки соприкосновения равна нулю).

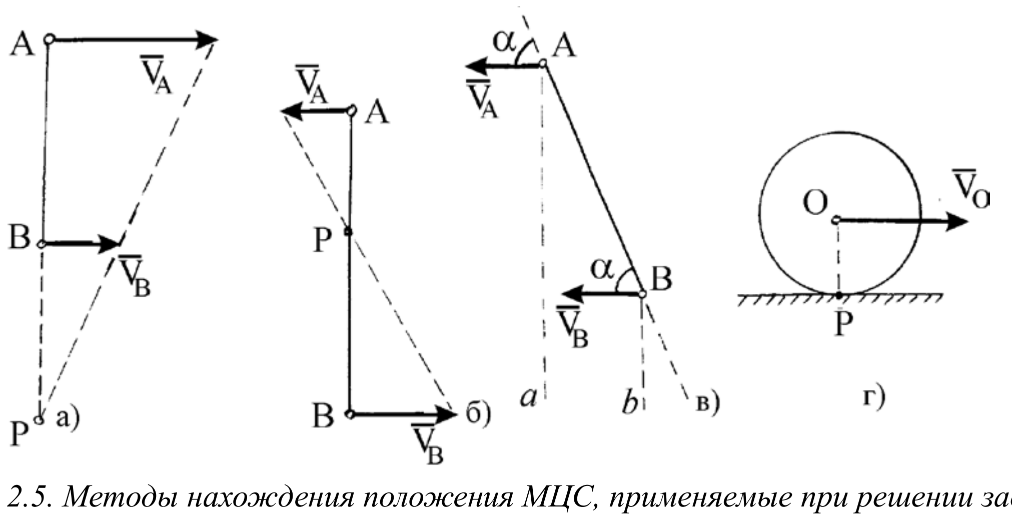


Рис. 2.5. Методы нахождения положения МЦС, применяемые при решении задач

Ускорение любой точки плоской фигуры можно определить как геометрическую сумму ускорений этой точки в поступательном движении вместе с некоторым полюсом и вращательным движением вокруг этого полюса. Если известны ускорение $\bar{a}_A$ некоторой точки A фигуры (полюса), а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε фигуры, то ускорение любой ее точки B определяется по формуле: $\bar{a}_{\text{B}} = \bar{a}_{\text{A}} + \bar{a}_{\text{BA}} = \bar{a}_{\text{A}} + \bar{a}^{\text{n}}_{\text{BA}} + \bar{a}^{t}_{BA}$, где вектор $\bar{a}_{\text{BA}}$ – ускорение точки B во вращательном движении вокруг полюса A; $\bar{a}^{\text{n}}_{\text{BA}}$ и $\bar{a}^{\tau}_{\text{BA}}$ – нормальная и касательная составляющие этого вектора, которые вычисляются по формулам: $a^{\text{n}}_{\text{BA}} = \omega^2 \cdot AB$, $a^{\tau}_{\text{BA}} = \varepsilon \cdot AB$. При этом вектор $\bar{a}^{\text{n}}_{\text{BA}}$ направлен вдоль отрезка BA, а вектор $\bar{a}^{\tau}_{\text{BA}}$ перпендикулярен к BA (рис. 2.6). Ускорение точки B можно определить, если спроецировать векторное равенство: $\bar{a}_{\text{B}} = \bar{a}_{\text{A}} + \bar{a}^{\text{n}}_{\text{BA}} + \bar{a}^{\tau}_{\text{BA}}$ на оси x и y (см. рис. 2.6) и найти проекции этого ускорения: $a_{\text{B}x} = a_{\text{A}x} - a^{\text{n}}_{\text{BA}}$, $a_{\text{B}y} = a_{\text{A}y} + a^{\tau}_{\text{BA}}$. По проекциям находят модуль ускорения точки B по формуле: $a_{\text{B}} = \sqrt{a^2_{\text{B}x} + a^2_{\text{B}y}}$.

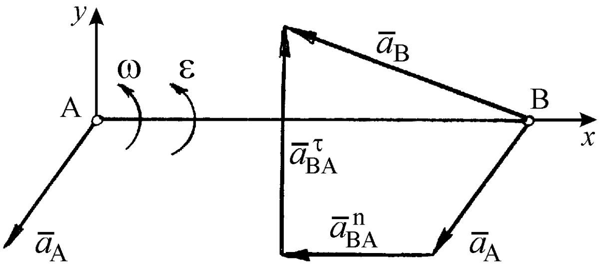


Рис. 2.6. Определение ускорения любой точки B фигуры ($\bar{a}_A$ - ускорение полюса A)

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным?
2. Какими уравнениями задается плоскопараллельное движение?
3. Как по уравнениям движения плоской фигуры найти скорость полюса и угловую скорость вращения вокруг полюса?
4. Как определить скорость любой точки плоской фигуры?
5. Сформулируйте теорему о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры.
6. Что называется мгновенным центром скоростей плоской фигуры и как найти его положение в различных случаях?
7. Сформулируйте теорему об ускорениях точек плоской фигуры.

2.3. Составное (сложное) движение точки

Составное движение точки – это движение, при котором точка одновременно участвует в нескольких движениях. Рассмотрим тело *A* (рис. 2.7), которое свободно движется по отношению к *неподвижной системе* координат $O_1x_1y_1z_1$. Пусть точка *M* совершает движение по поверхности этого тела. Через произвольную точку O движущегося тела проведем неизменно связанные с этим телом оси *x,y,z*. Систему осей O*xyz* называют *подвижной системой отсчета*. Движение точки *M* по отношению к неподвижной системе отсчета называют ее *абсолютным движением*, которое характеризуется изменением ее радиуса-вектора $\overline{r}$, абсолютной скорости $\overline{V}_{\text{абс}}$ и абсолютного ускорения $\overline{a}_{\text{абс}}$ (по модулю и направлению).

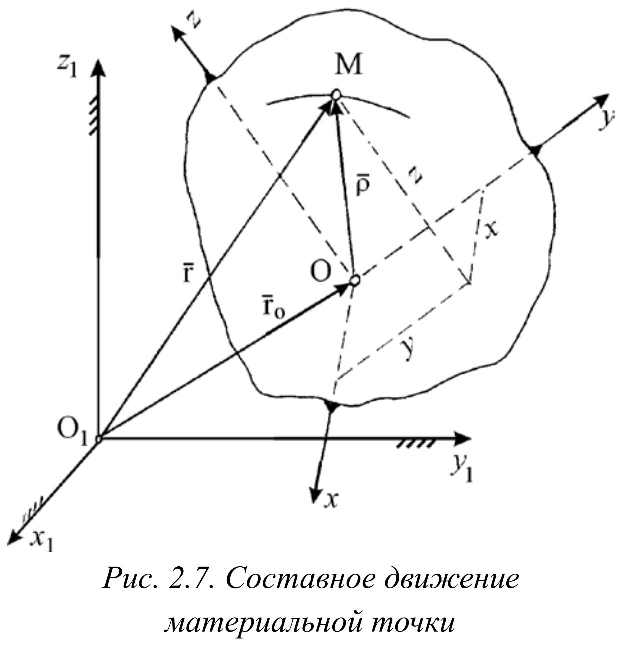


Рис. 2.7. Составное движение материальной точки

Движение точки *M* по отношению к подвижной системе отсчета называют *относительным движением точки*, которое при неизменных радиусах-векторах $\overline{r}$ и $\overline{r}_o$ характеризуется изменением только ее радиуса-вектора $\overline{\rho}$, т.е относительной скоростью $\overline{V}_{\text{отн}}$ и относительным ускорением $\overline{a}_{\text{отн}}$ в этой системе отсчета.

Движение подвижной системы отсчета Oxyz и неизменно связанного с ней тела A по отношению к неподвижной системе отсчета O$_1x_1y_1z_1$ является для точки M *переносным движением*. Переносное движение точки M при неизменном по модулю радиусе-векторе $\overline{\rho}$ характеризуется изменением радиусов-векторов $\overline{r}$ и $\overline{r}_o$ (по модулю и направлению) , *переносной скоростью* $\overline{V}_{\text{пер}}$ *и переносным ускорением* $\overline{a}_{\text{пер}}$ точки M.

Таким образом, для изучения относительного или переносного движения точки следует мысленно остановить соответственно переносное или относительное движение и определить далее характеристики движения точки по формулам кинематики точки в абсолютном движении. Если точка M участвует в составном движении, то имеют место следующие теоремы: абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей точки, т. е.$\overline{V}_{\text{абс}} = \overline{V}_{\text{пер}} + \overline{V}_{\text{отн}}$; абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова (поворотного) ускорений этой точки, т. е.$\overline{a}_{\text{абс}} = \overline{a}_{\text{пер}} + \overline{a}_{\text{отн}} + \overline{a}_{\text{кор}}$, или $\overline{a}_{\text{абс}} = \overline{a}^{\text{n}}_{\text{пер}} + \overline{a}^{\tau}_{\text{пер}} + \overline{a}^{\text{n}}_{\text{отн}} + \overline{a}^{\tau}_{\text{отн}} + \overline{a}_{\text{кор}}$.

Кориолисово ускорение $\overline{a}_{\text{кор}}$ равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного вращения на относительную скорость точки, т. е. $\overline{a}_{\text{кор}} = 2\cdot(\overline{\omega}_{\text{пер}} \times \overline{V}_{\text{отн}})$. Следовательно, модуль этого ускорения $a_{\text{кор}} = 2\cdot\omega_{\text{пер}}\cdot V_{\text{отн}}\cdot\sin\alpha$, где α – угол между векторами $\overline{\omega}_{\text{пер}}$ и $\overline{V}_{\text{отн}}$.Чтобы найти направление кориолисова ускорения $\overline{a}_{\text{кор}}$ точки M, достаточно в точке M построить векторы $\overline{\omega}_{\text{пер}}$ и $\overline{V}_{\text{отн}}$ и восстановить из этой точки перпендикуляр к плоскости, в которой лежат эти векторы $\overline{\omega}_{\text{пер}}$ и $\overline{V}_{\text{отн}}$. Вектор $\overline{a}_{\text{кор}}$ направлен по этому перпендикуляру так, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца этого вектора, видел поворот вектора $\overline{\omega}_{\text{пер}}$ на угол α против хода часовой стрелки до совмещения его с вектором $\overline{V}_{\text{отн}}$ (рис. 2.8).

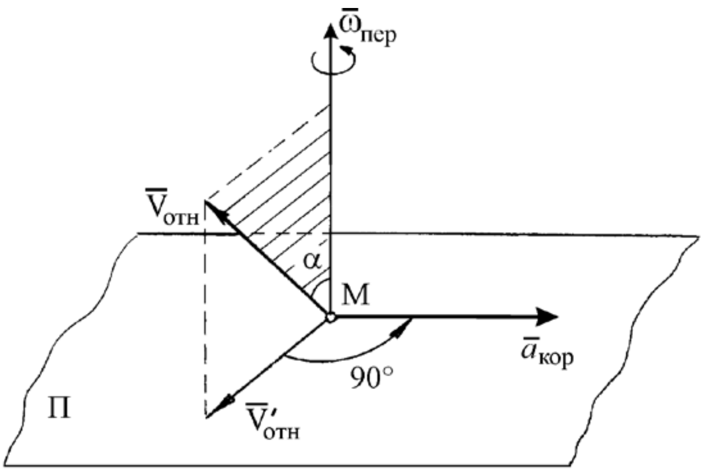


Рис. 2.8. Определение направление вектора кориолисова ускорения $\overline{a}_{\text{кор}}$

Направление вектора $\overline{a}_{кор}$ можно определить и другим способом (правило Н. Е. Жуковского): если провести через точку *М* плоскость *П*, перпендикулярную к вектору $\overline{\omega}_{пер}$ и повернуть проекцию $\overline{V}'_{отн}$ относительной скорости $\overline{V}_{отн}$ на эту плоскость на 90° вокруг точки *М* в направлении переносного вращения, то получим направление вектора $\overline{a}_{кор}$ (рис. 2.8).

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под составным (сложным) движением точки?
2. Что называется абсолютным, переносным и относительным движением точки?
3. Сформулируйте, что такое переносная скорость и переносное ускорение точки.
4. В чем заключается теорема об абсолютной скорости точки, совершающей составное движение.
5. Сформулируйте теорему об ускорении точки в составном движении.
6. Как определить модуль и направление кориолисова ускорения точки?
7. В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?

2.4. Примеры решения задач

Задача 2.1.

Движение точки задано уравнениями (x, y — в метрах, t — в секундах).

$$x = 8t - 4t^2, y = 6t - 3t^2.$$

Определить траекторию, скорость и ускорение точки.

Решение.

Для определения траектории исключаем из уравнений движения время t. Умножая обе части первого уравнения на 3, а обе части второго — на 4 и почленно вычитая из первого равенства второе, получим: $3x - 4y = 0$ или $y = 3x/4$.

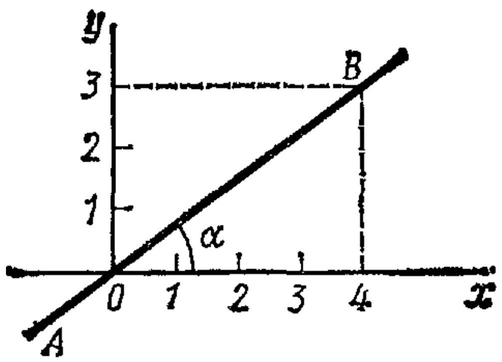


Рис. 2.9. К задаче 2.1

Следовательно, траектория — прямая линия, наклоненная к оси Ох под углом α, где $tg\alpha = 3/4$ (рис. 2.9).

Определяем скорость точки. По формулам (2.1) получаем:

$$v_x = \dot{x} = 8(1-t), v_y = \dot{y} = 6(1-t);$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10|1-t|.$$

Теперь находим ускорение точки. Формулы (2.1) дают:

$$a_x = \ddot{x} = -8, a_y = \ddot{y} = -6, a = 10\ м/с^2.$$

Направлены векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}$ вдоль траектории, т. е. вдоль прямой АВ. Проекции ускорения на координатные оси все время отрицательны, следовательно, ускорение имеет постоянное направление от В к А. Проекции скорости при 0<t<1 положительны, следовательно, в течение этого промежутка времени скорость точки

направлена от О к В. При этом в момент времени t=0 v=10м/с; в момент $= 1с\ v = 0$.

В последующие моменты времени (t>1 с) обе проекции скорости отрицательны и, следовательно, скорость направлена от В к А, т. е. так же, как и ускорение.

Заметим, наконец, что при $t = 0$ $x = 0$ и $y = 0$; при $t = 1с$ $x = 4, y = 3$ (точка В); при $t = 2с$ $x = 0, y = 0$; при $t > 2с$ значения x и y растут по модулю, оставаясь отрицательными.

Итак, заданные в условиях задачи уравнения движения рассказывают нам всю историю движения точки. Движение начинается из точки О с начальной скоростью $v_0 = 10\ м/с$ и происходит вдоль прямой АВ, наклоненной к оси Ох под углом α, для которого $tg\alpha = 3/4$. На участке ОВ точка движется замедленно (модуль ее скорости убывает) и через одну секунду приходит в положение В (4, 3), где ее скорость обращается в нуль. Отсюда начинается ускоренное движение в обратную сторону. В момент $t = 2с$ точка вновь оказывается в начале координат и дальше продолжает свое движение вдоль ОА, Ускорение точки все время равно 10 м/с^2.

Задача 2.2.

Движение точки задано уравнениями:

$$x = R\sin\omega t, \quad y = R\cos\omega t, \quad z = ut$$

где R, ω и u — постоянные величины. Определить траекторию, скорость и ускорение точки.

Решение.

Возводя первые два уравнения почленно в квадрат и складывая, получаем

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Следовательно, траектория лежит на круглом цилиндре радиуса R, ось которого направлена вдоль оси Oz (рис. 2.10). Определяя из последнего уравнения t и подставляя в первое, находим

$$x = R\sin\left(\omega z / u\right).$$

Таким образом, траекторией точки будет линия пересечения синусоидальной поверхности, образующие которой параллельны оси Oy (синусоидальный гофр) с цилиндрической поверхностью радиуса R.

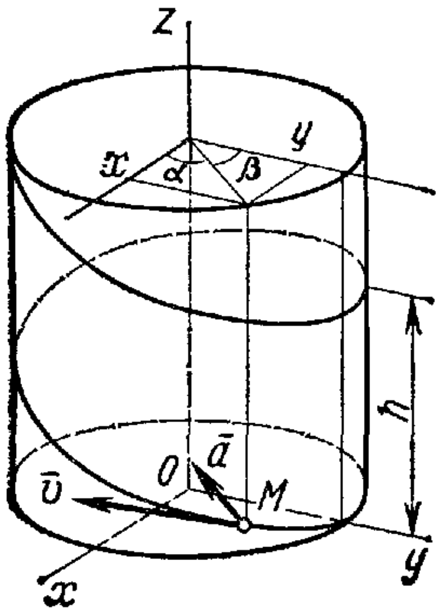


Рис. 2.10. К задаче 2.2

Эта кривая называется *винтовой линией*. Из уравнений движения видно, что один виток винтовой линии точка проходит за время t_1, определяемое из равенства $\omega t_1 = 2\pi$. При этом вдоль оси z точка за это время перемещается на величину $h = ut_1 = 2\pi u/\omega$, называемую шагом винтовой линии.

Найдем скорость и ускорение точки. Дифференцируя уравнения движения по времени, получаем:

$$v_x = \dot{x} = R\omega\cos\omega t, \quad v_y = \dot{y} = -R\omega\sin\omega t, \quad v_z = \dot{z} = u$$

откуда

$$v = \sqrt{R^2\omega^2(cos^2\omega t + sin^2\omega t) + u^2} = \sqrt{R^2\omega^2 + u^2}.$$

Стоящие под знаком радикала величины постоянны. Следовательно, движение происходит с постоянной по модулю скоростью, направленной по касательной к траектории. Теперь по формулам (2.1) вычисляем проекции ускорения;

$$a_x = \dot{v}_x = -R\omega^2\sin\omega t,$$

$$a_y = \dot{v}_y = -R\omega^2\cos\omega t,$$

$$a_z = \dot{v}_z = 0.$$

откуда

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2.$$

Итак, движение происходит с постоянным по модулю ускорением, Для определения направления ускорения имеем формулы:

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a} = -\sin\omega t = -\frac{x}{R},$$
$$\cos\beta_1 = \frac{a_y}{a} = -\cos\omega t = -\frac{y}{R},$$
$$\cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a} = 0.$$

Но, очевидно,

$$\frac{x}{R} = \cos\alpha, \frac{y}{R} = \cos\beta,$$

где α и β —углы, образуемые с осями Ox и Oy радиусом R, проведенным от оси цилиндра к движущейся точке. Так как косинусы углов α_1 и β_1 отличаются от косинусов α и β только знаками, то отсюда заключаем, что ускорение точки все время направлено по радиусу цилиндра к его оси.

Заметим, что хотя в данном случае движение и происходит со скоростью, постоянной по модулю, ускорение точки не равно нулю, так как направление скорости изменяется.

Задача 2.3.

На шестерню 1 радиуса r_1 действует пара сил с моментом m_1 (рис. 2.11 а). Определить момент m_2 пары, которую надо приложить к шестерне 2 радиуса r_2, чтобы сохранить равновесие.

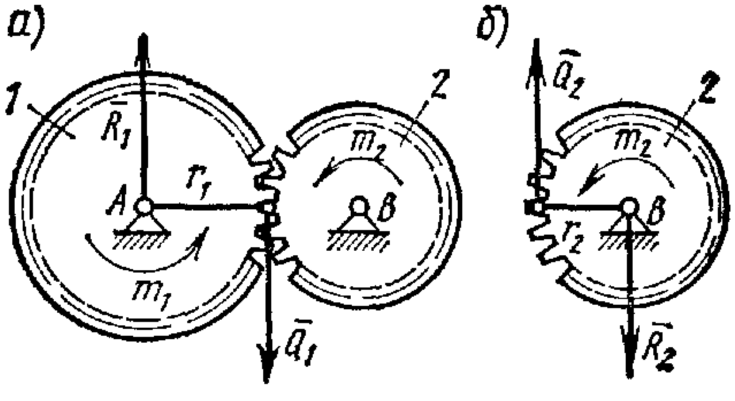


Рис. 2.11. К задаче 2.3

Решение.

Рассмотрим сначала условия равновесия шестерни 1. На нее действует пара с моментом m_1, которая может быть уравновешена только действием другой пары, в данном случае пары $\bar{Q}_1, \bar{R}_1$.

Здесь $\bar{Q}_1$ – перпендикулярная радиусу составляющая силы давления на зуб со стороны шестерни 2, а $\bar{R}_1$— тоже перпендикулярная радиусу составляющая реакции оси A (сила давления на зуб и реакция оси A имеют еще составляющие вдоль радиуса, которые взаимно уравновешиваются и в условие равновесия не войдут). При этом, согласно условию равновесия, $m_1 + (-Q_1 r_1) = 0$ и $Q_1 = m_1/r_1$.

Теперь рассмотрим условия равновесия шестерни 2 (рис. 2.11 б). По закону равенства действия и противодействия на нее со стороны шестерни 1 будет действовать сила $\bar{Q}_2 = -\bar{Q}_1$, которая с перпендикулярной радиусу составляющей реакции оси B образует пару $\bar{Q}_2$, $\bar{R}_2$ с моментом, равным $-Q_2r_2$. Эта пара и должна уравновеситься приложенной к шестерне 2 парой с моментом m_2; следовательно, по условию равновесия, $m_2 + (-Q_2r_2) = 0$. Отсюда, так как $Q_2=Q_1$ находим $m_2=m_1/r_2r_1$.

Естественно, что пары с моментами m_1 и m_2 не удовлетворяют условию равновесия , так как они приложены к разным телам. Полученная в процессе решения задачи величина Q_1 (или Q_2) называется окружным усилием, действующим на шестерню. Как видим, окружное усилие равно моменту вращающей пары, деленному на радиус шестерни: $Q_1=m_1/r_1 =m_2/r_2$.

Задача 2.4.

Человек ростом h удаляется от фонаря, висящего на высоте H, двигаясь прямолинейно со скоростью u. С какой скоростью движется конец тени человека?

Решение.

Для решения задачи найдем сначала закон, по которому движется конец тени. Выбираем начало отсчета в точке O, находящейся на одной вертикали с фонарем, и направляем вдоль прямой, по которой движется конец тени, координатную ось Ox (рис. 2.12). Изображаем человека в произвольном положении на расстоянии x_1 от точки O. Тогда конец его тени будет находиться от начала O на расстоянии x_2.

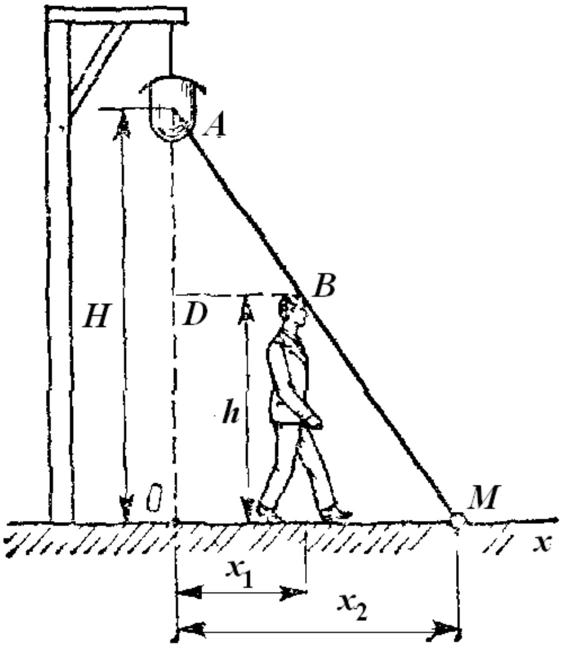


Рис. 2.12. К задаче 2.4

Из подобия треугольников OAM и DAB находим:

$$x_2 = \frac{H}{H-h} x_1.$$

Это уравнение выражает закон движения конца тени M, если закон движения человека, т.е. $x_1 = f(t)$, известен.

Взяв производную по времени от обеих частей равенства и замечая, что по формуле (2.1) $\dot{x}_1 = u_x = u, \dot{x}_2 = v_x = v$, где v — искомая скорость, получим

$$v = \frac{H}{H-h} u.$$

Если человек движется с постоянной скоростью ($u = const$), то скорость конца тени М будет тоже постоянна, но в $H/(H - h)$ раз больше, чем скорость человека.

Обращаем внимание на то, что при составлении уравнений движения надо изображать движущееся тело или механизм в произвольном положении. Только тогда мы получим уравнения, определяющие положение движущейся точки (или тела) в любой момент времени.

Задача 2.5.

Определить траекторию, скорость и ускорение середины М шатуна кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.13), если OA=AB=2b, а угол φ при вращении кривошипа растет пропорционально времени: $\varphi = \omega t$.

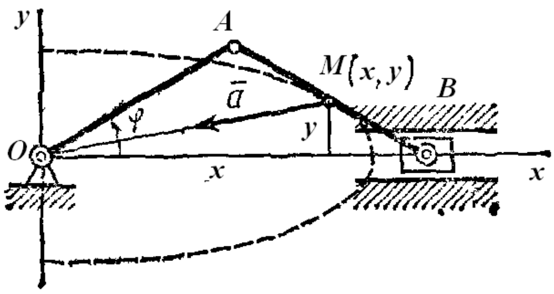


Рис. 2.13. К задаче 2.5.

Решение.

Начинаем с определения уравнений движения точки М. Проводя оси и обозначая координаты точки М в произвольном положении через x и y находим

$$x = 2b\cos\varphi + b\cos\varphi, y = b\sin\varphi.$$

Заменяя φ его значением, получаем уравнения движения точки М:

$$x = 3b \cdot \cos\omega t, y = b \cdot \sin\omega t.$$

Для определения траектории точки М представим уравнения движения в виде

$$\frac{x}{3b} = \cos\omega t, \frac{y}{b} = \sin\omega t.$$

Возводя эти равенства почленно в квадрат и складывая, получим

$$\frac{x^2}{9b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Итак, траектория точки М — эллипс с полуосями $3b$ и b.

Теперь по формуле (2.1) находим скорость точки М:

$$v_x = \dot{x} = -3b\omega\sin\omega t, v_y = \dot{y} = b\omega\cos\omega t;$$

$$v = b\omega\sqrt{9\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}.$$

Скорость оказывается величиной переменной, меняющейся с течением времени в пределах от $v_{min} = b\omega$ до $v_{max} = 3b\omega$.

Далее по формулам (2.1) определяем проекции ускорения точки М;

$$a_x = -3b\omega^2 cos\omega t = -\omega^2 x, a_y = -b\omega^2 sin\omega t = -\omega^2 y;$$

отсюда

$$a = \sqrt{\omega^4(x^2 + y^2)} = \omega^2 r,$$

где r — длина радиуса-вектора, проведенного из центра О до точки М. Следовательно, модуль ускорения точки меняется пропорционально ее расстоянию от центра эллипса.

Определелим направление ускорения $\bar{a}$:

$$cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a} = -\frac{x}{r}, cos\beta_1 = \frac{a_y}{a} = -\frac{y}{r}.$$

Отсюда находим, что ускорение точки М все время направлено вдоль МО к центру эллипса.

Задача 2.6.

Вал, делающий n=90 об/мин, после выключения двигателя начинает вращаться равнозамедленно и останавливается через t_1=40 с. Определить, сколько оборотов сделал вал за это время.

Решение.

Так как вал вращается равнозамедленно, то для него, считая $\varphi_0 = 0$, будет

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \omega = \omega_0 + \varepsilon t. \qquad (2.2)$$

Начальной угловой скоростью при замедленном вращении является та, которую вал имел до выключения двигателя. Следовательно,

$$\omega_0 = \pi n/30.$$

В момент остановки при $t=t_1$ угловая скорость вала ω_1=0. Подставляя эти значения во второе из уравнений (2.2), получаем:

$$0 = \pi n/30 + \varepsilon t_1 \text{ и } \varepsilon = -\pi n/30t_1.$$

Если обозначить число сделанных валом за время t_1 оборотов через N (не смешивать с n; n — угловая скорость), то угол поворота за то же время будет равен $\varphi_1 = 2\pi N$. Подставляя найденные значения ε и φ_1 в первое из уравнений, получим

$$2\pi N = \left(\frac{\pi n}{30}\right) t_1 - \left(\frac{\pi n}{60}\right) t_1 = \left(\frac{\pi n}{60}\right) t_1,$$

откуда

$$N = \frac{nt_1}{120} = 30 \text{ об}.$$

Задача 2.7.

Маховик радиусом R=0,6 м вращается равномерно, делая n=90 об/мин. Определить скорость и ускорение точки, лежащей на ободе маховика.

Решение.

Скорость точки обода $v = R\omega$, где угловая скорость ω должна быть выражена в радианах в секунду. Тогда $\omega = \frac{\pi n}{30} = 3\pi$ и $v = R \cdot 3\pi \approx 5{,}7$ м/с.

Далее, так как $\omega = const$, то ε=0, и, следовательно,

$a = a_n = R\omega^2 = R \cdot 9\pi^2 \approx 53.3$ м/с^2.

Ускорение точки направлено в данном случае к оси вращения.

Задача 2.8.

Найти скорость точки M обода колеса, катящегося по прямолинейному рельсу без скольжения (рис. 2.14), если скорость центра C колеса равна $\bar{v}_C$, а угол DKM=α.

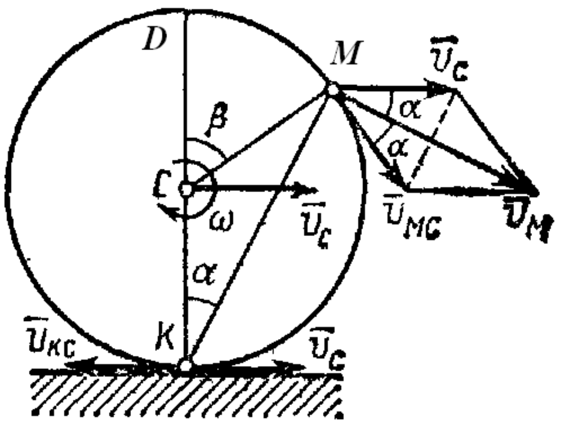


Рис. 2.14. К задаче 2.8.

Решение

Приняв точку C, скорость которой известна, за полюс, найдем, что $\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC}$, где $\vec{v}_{MC} \perp \overrightarrow{CM}$ по модулю $v_{MC} = \omega \cdot MC = \omega R$ (R – радиус колеса). Значение угловой скорости ω найдем из условия того, что точка K колеса не скользит по рельсу и, следовательно, в данный момент времени $v_K = 0$. С другой стороны, так же как и для точки M, $\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{v}_{KC}$ где $v_{KC} = \omega \cdot KC = \omega R$. Так как для точки *K* скорости $\vec{v}_{KC}$ и $\vec{v}_C$ направлены вдоль одной прямой, то при $v_K = 0$ $v_{KC} = v_C$, откуда $\omega = v_C R$. В результате находим, что $v_{MC} = \omega R = v_C$.

Параллелограмм, построенный на векторах $\vec{v}_{MC}$ и $\vec{v}_C$, будет при этом ромбом. Угол между $\vec{v}_{MC}$ и $\vec{v}_C$ равен β, так как стороны, образующие этот угол и угол β, взаимно перпендикулярны. В свою очередь угол β=2α, как центральный угол, опирающийся на ту же дугу, что и вписанный угол α. Тогда по свойствам ромба углы между $\bar{v}_C$ и $\bar{v}_M$ и между $\bar{v}_{MC}$ и $\bar{v}_M$ тоже равны α. Окончательно, так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, получим

$$v_M = 2v_C \cos\alpha \ \text{ и } \ \bar{v}_M \perp \overrightarrow{KM} \ .$$

Задача 2.9.

Определить скорость точки M обода катящегося колеса, рассмотренного в предыдущей задаче, с помощью мгновенного центра скоростей.

Решение.

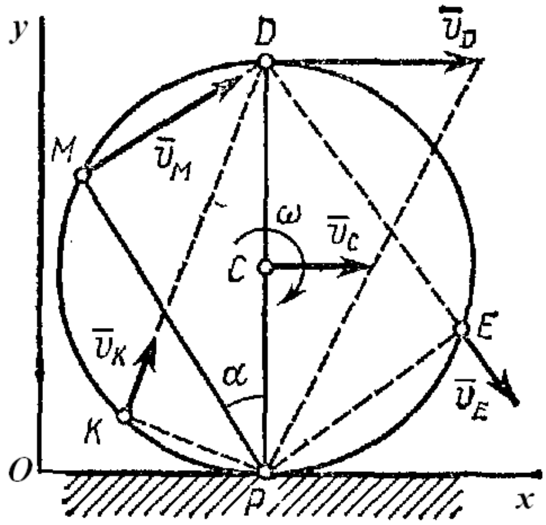


Рис. 2.15. К задаче 2.9

Точка касания колеса P (рис. 2.15) является мгновенным центром скоростей, поскольку $\bar{v}_D = 0$. Следовательно, $\bar{v}_M \perp PM$. Так как прямой угол PMD опирается на диаметр, то направление вектора скорости $\bar{v}_M$ любой точки обода проходит через точку D. Составляя пропорцию $v_M/PM = v_C/PC$ и замечая, что $PC = R$, а $PM = 2R\cos\alpha$, находим $v_M = 2v_C\cos\alpha$.

Чем точка M дальше от P, тем ее скорость больше; наибольшую скорость $v_D = 2v_C$ имеет верхний конец D вертикального диаметра. Угловая скорость колеса имеет значение

$$\omega = v_C/PC = v_C/R.$$

Аналогичная картина распределения скоростей имеет место при качении колеса или шестерни по любой цилиндрической поверхности.

Задача 2.10.

Центр O колеса, катящегося по прямолинейному рельсу (рис. 2.16), имеет в данный момент времени скорость $v_0 = 1\text{м/с}$ и ускорение $a_0 = 2\text{м/с}^2$. Радиус колеса R=0,2 м. Определить ускорение точки B — конца перпендикулярного OP диаметра AB и ускорение точки P, совпадающей с мгновенным центром скоростей.

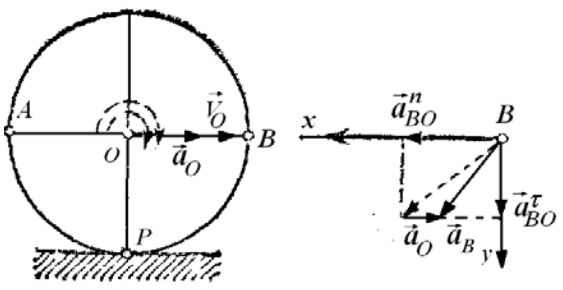


Рис. 2.16. К задаче 2.10

Решение.

1. Так как $\bar{v}_0$ и $\bar{a}_0$ известны, принимаем точку О за полюс.

2. Определение ω. Точка касания Р является мгновенным центром скоростей; следовательно, угловая скорость колеса

$$\omega = \frac{v_0}{PO} = v_0/R.$$

3. Определение ε. Так как величина PO=R остается постоянной при любом положении колеса, то $\varepsilon = \frac{v_O}{R}$

Знаки ω и ε совпадают, следовательно, вращение колеса ускоренное.

Примечания:

а) не следует думать, что если по условиям задачи $v_0 = 1 м/с$, то $v_0 = const$. Значение v_0 в задаче указано *для данного момента времени;* с течением же времени v_0 изменяется, так как $a_0 \neq 0$;

б) в данном случае $dv_0/dt = a_0$, так как движение точки О является прямолинейным. В общем случае $dv_0/dt = a_0^\tau$.

4. Определение a^τ_{BO} и a^n_{BO}. Так как за полюс взята точка О, то ускорение точки В определяется по фомуле:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_O + \bar{a}^\tau_{BO} + \bar{a}^n_{BO}$$

Учитывая, что в нашем случае BO=R, находим:

$$a^\tau_{BO} = BO \cdot \varepsilon = a_0 = \frac{2м}{с^2}, \quad a^n_{BO} = BO \cdot \omega^2 = \frac{v_0^2}{R} = 5 м/с^2.$$

Показав на чертеже точку В отдельно, изображаем (без соблюдения масштаба) векторы, из которых слагается ускорение $\bar{a}_B$, а именно: вектор $\bar{a}_O$ (переносим из точки О), вектор $\bar{a}^\tau_{BO}$ (в сторону вращения, так как оно ускоренное) и вектор $\bar{a}^n_{BO}$ (всегда от В к полюсу О).

5. Вычисление a_B. Проведя оси X и Y, находим, что

$$a_{B_x} = a^n_{BO} - a_0 = 3 м/с^2,\ a_{B_y} = a^\tau_{BO} - a_0 = 2 м/с^2,$$

откуда

$$a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}} = \sqrt{13} = 3.6\ м/с^2.$$

Аналогичным путем легко найти и ускорение точки Р: $a_p = a^n_{PO} = 5 м/с^2$ и направлено вдоль РО. Таким образом, ускорение точки Р, скорость которой в данный момент времени равна нулю, нулю не равно.

Задача 2.11.

Колесо катится по прямолинейному рельсу так, что скорость v_C его центра С постоянна. Определить ускорение точки М обода колеса (рис. 2.17).

Решение.

Так как по условиям задачи $\bar{v}_C = const$, то $\bar{a}_C = 0$ и точка С является мгновенным центром ускорений. Мгновенный центр скоростей находится в точке Р. Следовательно, для колеса

$$\omega = \frac{v_C}{PC} = \frac{v_C}{R} = const,$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0, tg\mu = \varepsilon/\omega^2 = 0, \mu = 0.$$

В результате ускорение точки М

$$a_M = MC \cdot \omega^2 = v_C^2/R.$$

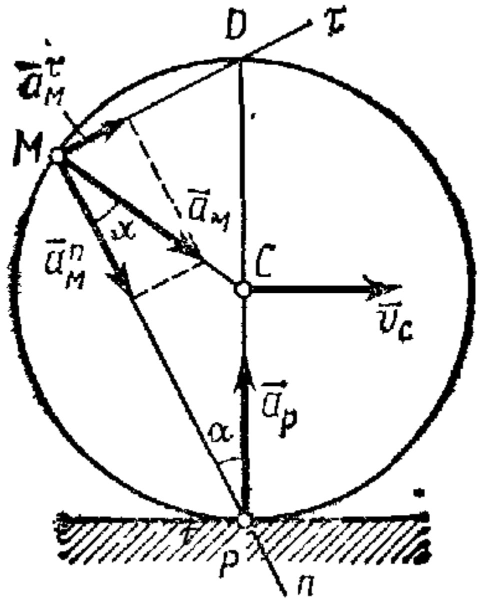


Рис. 2.17. К задаче 2.11.

Таким образом, ускорение любой точки М обода (в том числе и точки Р) равно v_C^2/R и направлено к центру С колеса, так как угол $\mu = 0$. Заметим, что это ускорение для точки М не будет нормальным ускорением. В самом деле, скорость точки М направлена перпендикулярно РМ. Следовательно, касательная M_τ к траектории точки М направлена вдоль линии MD, а главная нормаль M_n — вдоль МР. Поэтому

$$a_M^n = a_M cos\alpha, a_M^\tau = a_M sin\alpha.$$

Задача 2.12.

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна С, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами (рис. 2.17 *а*). Точка D находится в середине стержня АВ. Длины стержней равны соответственно L_1=0,4 м, L_2 =1,2 м, L_3=1,4 м, L_4=0,6 м.

Дано: ω_1 = 6 с$^{-1}$, ω_1 – величина постоянная. Заданную угловую скорость считать направленной против часовой стрелки.

Найти: скорости точек В и С; угловую скорость ω_{CD}; ускорение точки В; угловое ускорение ε_{AB}

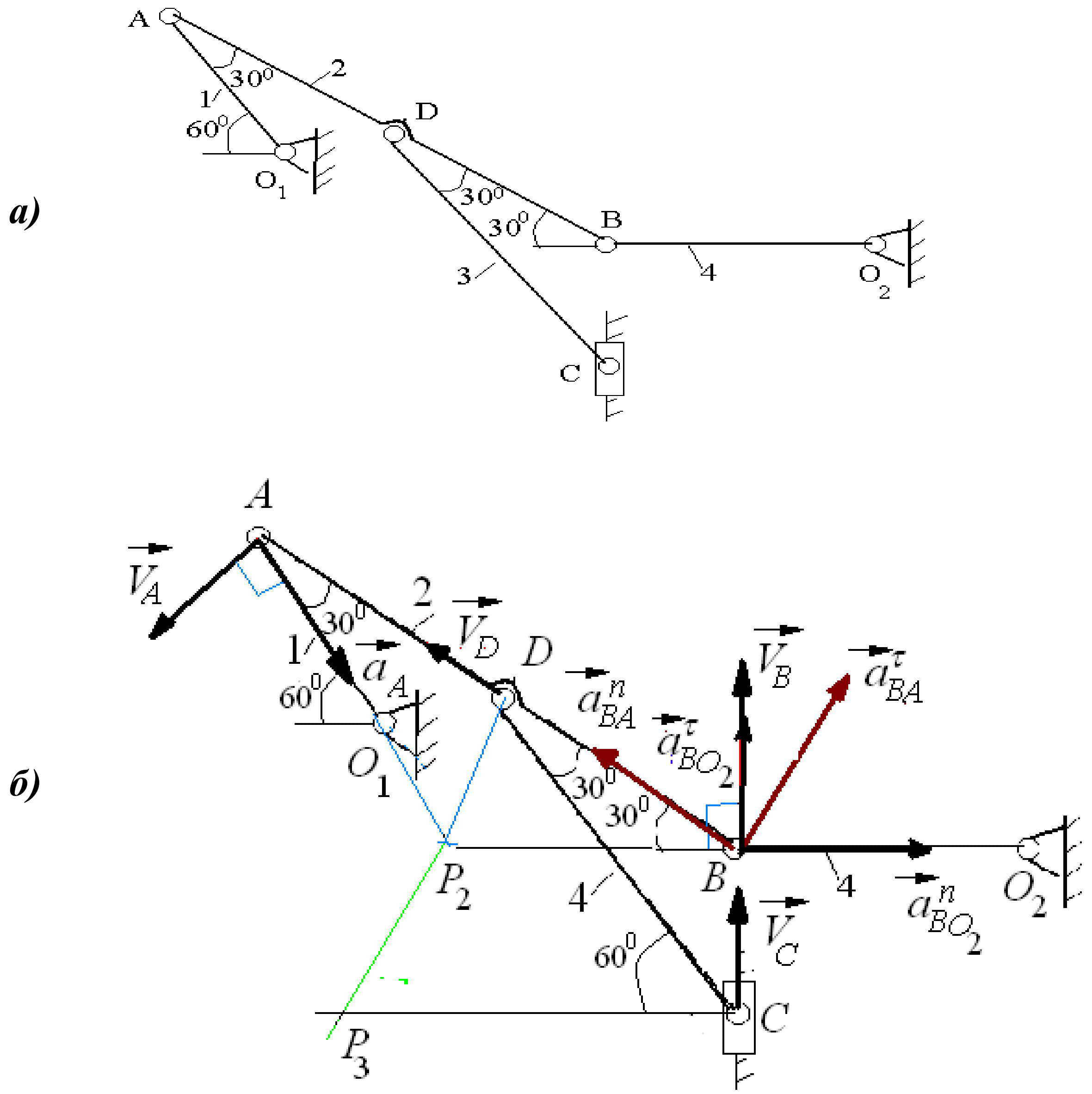


Рис.2.17. К задаче 2.12

Решение *(рис. 2.17 б)*

1. Определим скорость точки A. Стержень OA вращается вокруг точки O_1, поэтому скорость точки А определяется по формуле $V_A = \omega_1 \cdot L_1$ = 1,6 м/с и направлена перпендикулярно отрезку O_1A. V_A = **<u>1,6 м/с.</u>**
2. Определим угловую скорость стержня АВ. Точка B вращается вокруг центра O_2, поэтому ее скорость перпендикулярна отрезку O_2B. Для нахождения мгновенного центра скоростей отрезка АВ в точках А и В восстановим перпендикуляры к векторам $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$. Точка пересечения этих перпендикуляров P_2 является мгновенным центром скоростей второго стержня. Угловая скорость вычисляется по формуле $\omega_2 = V_A / |P_2A|$. Рас-

стояние P_2A определяется из равнобедренного треугольника P_2AB, то есть $P_2A = \dfrac{L_2}{2\cos 30^o} = 0,7$ м. Поэтому $\omega_2 =$ **<u>2,3 с</u>**$^{\mathbf{-1}}$.

3. Определим скорость точки В по формуле $V_B = \omega_2 \cdot |P_2B| =$ **<u>1,6 м/с</u>** по формуле $V_B = \omega_2 \cdot |P_2D| =$ **<u>0,8 м/с</u>**.
4. Определим скорость точки С. Так как точка С движется прямолинейно, то ее скорость направлена вдоль движения ползуна. Для нахождения мгновенного центра скоростей отрезка CD в точках С и D восстановим перпендикуляры к векторам $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_D$. Точка пересечения этих перпендикуляров P_3 является мгновенным центром скоростей третьего стержня. Угловая скорость вычисляется по формуле $\omega_3 = V_D / |P_3D|$, а скорость точки С $V_C = \omega_3 |P_3C|$. Так как треугольник P_3CD равносторонний, то V_C = **<u>0,8 м/с</u>**.
5. Определим угловую скорость отрезка O_2B. Известно, что центром скоростей этого стержня является точка O_2B , а также скорость точки В. Поэтому угловая скорость четвертого стержня вычисляется по формуле $\omega_4 = V_B / L_4$ и $\omega_4 =$ **<u>2,7 с</u>**$^{\mathbf{-1}}$.
6. Определим ускорение точки А. Так как первый стержень вращается равномерно, то точка А имеет относительно O_1 только нормальное ускорение, которое вычисляется по формуле $a_A = \omega_1^2 L_1$ = 6,4 м/с^2.
7. Определим ускорение точки В, которая принадлежит двум стержням – АВ и O_2B. Поэтому ускорение точки В определяется с помощью двух формул

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau \quad \text{и} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_{BO_2}^n + \vec{a}_{BO_2}^\tau ,$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение точки А;

$\vec{a}_{BA}^n$ – нормальное ускорение точки В относительно А;

$\vec{a}_{BA}^\tau$ – тангенциальное ускорение точки В относительно А;

$\vec{a}_{BO_2}^n$ – нормальное ускорение точки В относительно O_2;

$\vec{a}_{BO_2}^\tau$ – тангенциальное ускорение точки В относительно O_2.

$a_{BA}^n = \omega_2^2 L_2$ = 6,4 м/с^2 ; $a_{BO_2}^n = \omega_4^2 L_4$ = 4,3 м/с^2.

Можно составить уравнение

$\vec{a}_A + \vec{a}^n_{BA} + \vec{a}^\tau_{BA} = \vec{a}^n_{BO_2} + \vec{a}^\tau_{BO_2}$, которое в проекциях на оси координат имеет вид

$$\begin{cases} a_A \cos 60^0 - a^n_{BA}\cos 30^0 + a^\tau_{BA}\cos 60^0 = a^n_{BO_2} \\ -a_A \cos 30^0 + a^n_{BA}\cos 60^0 + a^\tau_{BA}\cos 30^0 = a^\tau_{BO_2} \end{cases}$$

Решив полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными, получим:

a^τ_{BA}= 13,2 м/с^2 , a_{BX} = 4,1 м/с^2 , a_{BY} =9,1 м/с^2, a_B =**10 м/с^2**.

8. Определим угловое ускорение стержня АВ, используя формулу $\varepsilon_{BA} = a^\tau_{BA} / L_2$ = **13,2 с$^{-2}$.**

Задача 2.13.

Круглая пластина радиуса R=60 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 10t^2 - 5t^3$ (рис.2.18 *а*). Положительное направление угла φ показано на рисунке дуговой стрелкой. Ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве). По окружности радиуса R движется точка М. Закон ее движения по дуге окружности s=$\cup$AM=$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$. На рисунке точка М показана в положении, когда s положительно, при s отрицательном точка М находится по другую сторону от точки А; *L*=*R*.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент времени t=1 с.

Решение *(рис. 2.18 б)*

В качестве подвижной системы координат *xyz* примем точку С. Эта система совершает вращательное движение с угловой скоростью $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 20t - 15t^2$ = 5 с$^{-1}$. Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 20 - 30t =$ -10 с$^{-2}$. Направления векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ опледеляются по правилу буравчика и изображены на рис. Причем, вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен в противоположную сторону, так как его значение его проекции на ось ОХ неподвижной системы координат XYZ отрицательно. Вычислим скорость и ускорение центра подвижной системы координат С, которая движется по окружности. Скорость вычисляется по формуле $V_C = 2R\omega$, равна 600 см/с и первендикулярна плоскости рисунка. Ускорение точки C состоит из двух компонент – нормальное $a_C^n = \omega^2 \cdot 2R$ = 3000 см/с^2 и тангенциальное $a_C^\tau = \varepsilon \cdot 2R$ = 1200 см/с^2 ускорения.

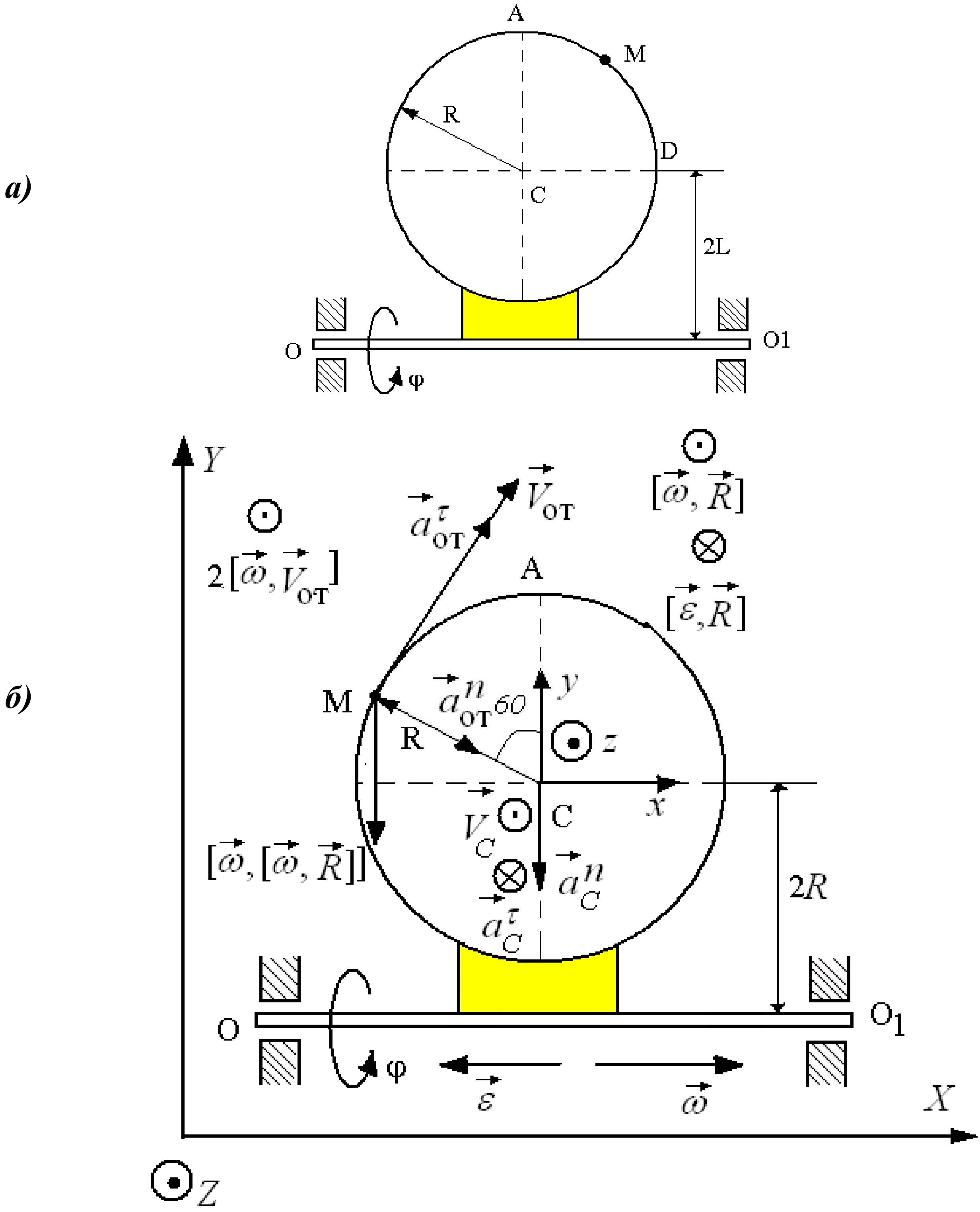


Рис.2.18. К задаче 2.13

Вычислим путь, относительную скорость и ускорение точки М. Ее положение определяется величиной дуги S, в данный момент времени S = $-\frac{\pi}{3}R$, поэтому она располагается слева от точки А. Относительная скорость $V_{от}=\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{\pi}{3}R\left(3t^2-2\right)$. В данный момент времени она равна 63 см/с и направлена по касательной к окружности. Относительное ускорение является суммой двух составляющих – тангенциальной $a_{от}^{\tau}=\dfrac{d^2s}{dt^2}=2\pi Rt$ = 377 см/с$^{-2}$ и нормальной $a_{от}^{n}=\dfrac{V_{от}^2}{R}$ = 66 см/с$^{-2}$.

Абсолютная скорость точки *M* определяется по формуле

$$\vec{V}_{абс}=\vec{V}_{от}+\vec{V}_C+\left[\vec{\omega},\vec{R}\right],$$

где – $\left[\vec{\omega},\vec{R}\right]$ переносная скорость вращательного движения, модуль которой $\left\|\left[\vec{\omega},\vec{R}\right]\right\|=\omega R\sin 30^0$ = 150 см / с, ее направление определяется по правилу Жуковского. В разложении на оси координат

$$V_{абсY}=V_{от}\cos 30^0 \quad V_{абсZ}=V_C+\left\|\left[\vec{\omega},\vec{R}\right]\right\|$$

По теореме Пифагора $V_{абс}=\sqrt{V_{от}^2+\left(V_C+\left\|\left[\vec{\omega},\vec{R}\right]\right\|\right)^2}$ = **<u>750 м /с.</u>**

Абсолютное ускорение точки *M* определяется по формуле

$$\vec{a}_{абс}=\vec{a}_{от}+\vec{a}_C+\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{R}\right]\right]+\left[\vec{\varepsilon},\vec{R}\right]+2\left[\vec{\omega},\vec{V}_{от}\right],$$

где $\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{R}\right]\right]$ и $\left[\vec{\varepsilon},\vec{R}\right]$ – соответственно нормальное и тангенциальное переносные ускорения вращательного движения, $2\left[\vec{\omega},\vec{V}_{от}\right]$ – кориолисово ускорение.

$$\left\|\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{R}\right]\right]\right\|= 750 \text{ м / с}^{-2}; \quad \left\|\left[\vec{\varepsilon},\vec{R}\right]\right\|=300 \text{ м / с}^{-2}; \quad 2\left\|\left[\vec{\omega},\vec{V}_{от}\right]\right\| = 546 \text{ м / с}^{-2}$$

$$a_{абсX}=a_{от}^{n}\cos 30^0+a_{от}^{\tau}\cos 60^0;$$

$$a_{абсY}=-a_{от}^{n}\cos 60^0+a_{от}^{\tau}\cos 30^0-a_C^n-\left\|\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{R}\right]\right]\right\|;$$

$$a_{абсZ}=-a_C^{\tau}-\left\|\left[\vec{\varepsilon},\vec{R}\right]\right\|+2\left\|\left[\vec{\omega},\vec{V}_{от}\right]\right\|$$

3. Динамика
3.1. Основные законы динамики

Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучаются законы движения материальных тел в пространстве с учетом действующих на них сил как причин тех или иных изменений в характеристике их движения. Основу динамики составляют законы (аксиомы) Галилея - Ньютона: закон инерции, закон пропорциональности силы и ускорения, закон равенства действия и противодействия, закон независимости действия сил.

Первая аксиома динамики – закон инерции – материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если на нее (него) действует уравновешенная система, до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние. И наоборот, если нужно, чтобы точка (тело) двигались равномерно и прямолинейно, то необходимо создать условия для равновесия всех сил, приложенных к ней (нему).

Свойство материальных тел, заключающееся в их стремлении сохранять неизменным данное кинематическое состояние (покоя или движения), называется инерцией. Мерой инерции материальных тел являются: *масса* (при поступательном движении) или *момент инерции* (при вращении). Масса – количество материи в данной точке (в данном объеме), которое определяет инерционность тела только при его поступательном движении, так как в этом случае скорости и ускорения всех точек тела в данный момент времени равны.

При вращении вокруг оси инерционность тела определяется не только массой, но и ее распределением в окрестности вращения. Чем компактнее (ближе к оси) распределена масса тела, тем меньше инерционность тела, и наоборот. Поэтому при вращении тела вокруг оси его инерционность определяет момент инерции тела. Различают моменты инерции тела относительно: точки (начала системы координат); оси (координатных осей); плоскости (координатных плоскостей). Момент инерции точки равен произведению массы m точки на квадрат ее кратчайшего расстояния r до оси (центра) вращения: $J = mr^2$, кг·м^2. Момент инерции тела относительно точки (оси, плоскости) – величина, равная предельному значению суммы произведений масс элементарных частиц тела на квадрат их кратчайшего расстояния до точки (оси, плоскости): $J = lim\Sigma\, m_i\, r_i^2$, кг · м^2.

Вторая аксиома динамики – основной закон динамики ($\overline{F} = m\overline{a}$) – ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление (рис. 3.1 *а*). Этот закон утверждает, во-первых, что причиной ускорения служит сила, во-вторых, что числовое значение ускорения пропорционально числовому значению силы и, в-третьих, что направление вектора ускорения всегда совпадает с направлением вектора силы.

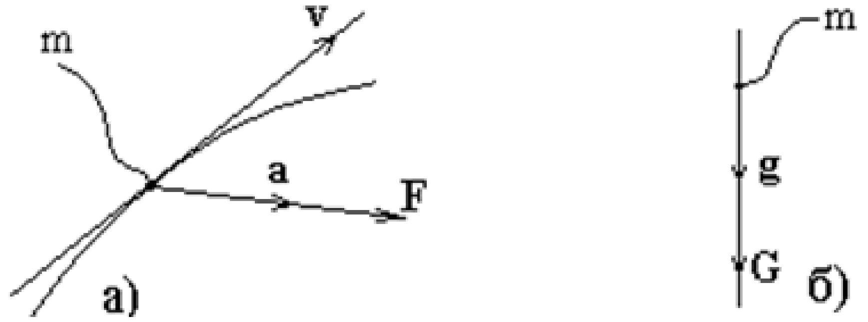


Рис. 3.1. а – движение точки по кривой; б падение в поле тяжести –

Законы инерции и пропорциональности силы и ускорения справедливы для инерциальных систем отсчета – систем отсчета, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга.

Третья аксиома динамики – закон равенства действия и противодействия: при взаимодействии двух тел, силы, приложенные к каждому из них, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. $|\vec{F}|=|\vec{F}'|$, $\vec{F}=-\vec{F}'$, где F – сила действия на данное тело со стороны другого тела, $\vec{F}'=-m\vec{a}$ – сила противодействия телу со стороны другого тела (сила инерции $\vec{\Phi}$), $\vec{F}\equiv\vec{\Phi}$. Этот закон используется при определении взаимодействия как неподвижных (в статике), так и двигающихся тел (динамике). Сила инерции материальной точки – сила противодействия телу, сообщающему точке ускорение $\vec{a}$, равная: $\vec{\Phi}=-m\vec{a}$, $\vec{\Phi}=\vec{\Phi}_\tau+\vec{\Phi}_n$, где $\vec{\Phi}_\tau$ – касательная составляющая силы инерции, пропорциональная касательной составляющей $\boldsymbol{a}_\tau$ полного ускорения а точки; $\vec{\Phi}_n$ – нормальная составляющая силы инерции, пропорциональная нормальной составляющей $\vec{a}_n$ полного ускорения $\vec{a}$, см рис. 3.2 *а*.

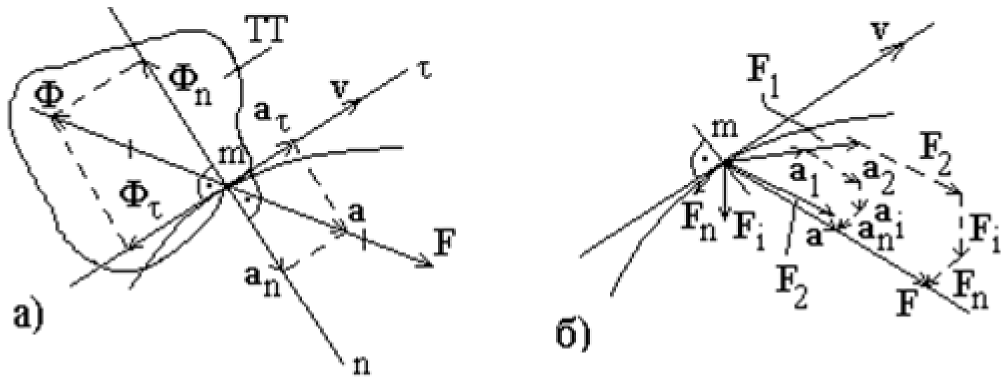


Рис. 3.2. Сила действия и сила инерции (а); сложение ускорений (б)

Четвертая аксиома динамики – закон независимости действия сил: несколько одновременно действующих на материальную точку сил ($\vec{F}_1;\vec{F}_2;\vec{F}_i;...;\vec{F}_n$) сообщают точке такое ускорение $\vec{a}$, какое сообщила бы ей одна сила $\vec{F}$, равная их геометрической сумме $\sum\vec{F}_i$ т.е. $a=\sum a_i$, где a_i – ускорение точки, сообщаемое ей *i*-ой силой (рис. 3.2 *б*). Этот закон позволяет облегчить решение задач динамики: если на материальную точку действует несколько сил, то можно сначала найти ускорения, приобретенные от действия каждой силы отдельно, а затем эти ускорения геометрически сложить и найти ее полное ускорение.

3.2. Динамика материальной точки

Точка, движение которой ничем не ограничено, называется *свободной*. Свободная точка под действием приложенных сил может двигаться в каком угодно направлении. Примером такого движения может служить так называемое свободное падение – движение точки под действием силы тяжести в безвоздушном пространстве (рис. 3.1 *б*). Задачи, в которых рассматривается свободная точка, на которую действует несколько сил $\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,F_n$, решаются при помощи основного уравнения динамики $\vec{F}=m\vec{a}$, где $\vec{F}=\sum\vec{F}_i$ – равнодействующая. При этом согласно закону независимости действия сил, $\vec{a}=\sum a_i$, т.е. ускорение точки равно геометрической сумме ускорений, сообщенных ей каждой силой в отдельности (см.рис.3.2 *б*). При движения точки в плоскости или пространстве векторное равенство заменяется двумя или тремя скалярными дифференциальными уравнениями для проекций на оси декартовой и естественной систем координат соответственно:

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{ix},\ m\ddot{y} = \Sigma F_{iy},\ m\ddot{z} = \Sigma F_{iz};$$

$$m\,\mathrm{v}_r^2/\rho = \Sigma \mathrm{F}_{in},\ m\,d^2s/dt^2 = \Sigma F_{ir}.$$

При несвободном движении точки, например, по плоской неподвижной шероховатой кривой (твердой поверхности) в правой части дифференциальные уравнений, кроме активных сил, будут содержать еще проекции на оси систем координат (или касательной и нормальной составляющих) полной силы реакции этой (поверхности) как связи.

В динамике материальной точки решаются две основные задачи: *прямая и обратная*. Прямая задача динамики точки – задача об определении движения точки по заданным силам. Обратная задача динамики точки – задача об определении сил по заданному движению точки. При решении этих задач исходными являются дифференциальные уравнения движения точки, записанные в общем виде в декартовых или естественных координатах.

Ряд задач динамики материальной точки решается с помощью *принципа Даламбера*, который формулируется следующим образом: движущаяся свободная материальная точка может рассматриваться как покоящаяся под действием активных (заданных) сил и сил инерции, т.е. $\sum \vec{F}_i + \sum \vec{R}_i + \vec{\Phi} = 0$ – условие псевдопокоя свободной точки под действием сил, сходящихся в точке (рис. 3.3*а*). Для несвободной материальной точки (рис.3.3*б*) принцип Даламбера формулируется следующим образом: движущаяся несвободная материальная точка может рассматриваться как покоящаяся под действием активных сил, реакций связи и силы инерции, т.е. $\sum \vec{F}_i + \sum \vec{R}_i + \vec{\Phi} = 0$ – условие псевдопокоя несвободной точки под действием сил, сходящихся в точке.

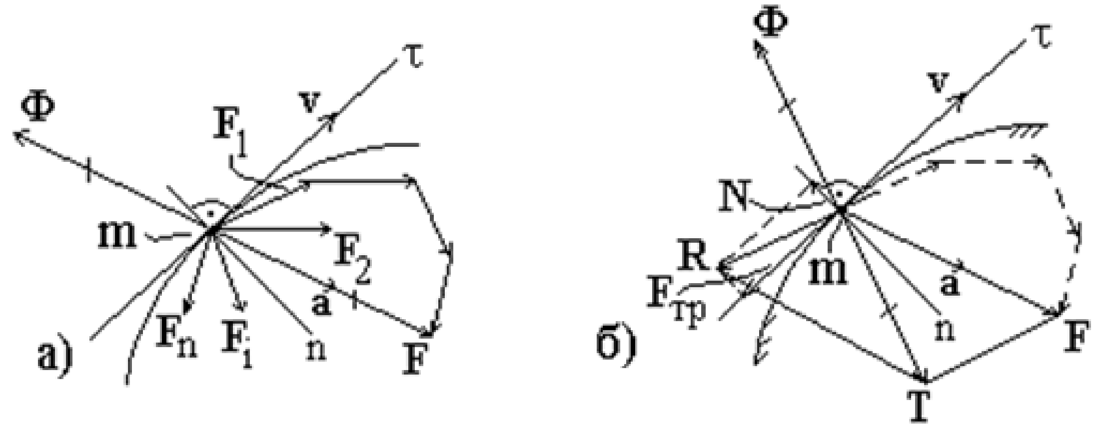


Рис. 3.3. Применение принципа Даламбера для свободной (а) и несвободной (б) точки

Различают две меры действия силы и механического движения векторная и скалярная (рис. 3.4).

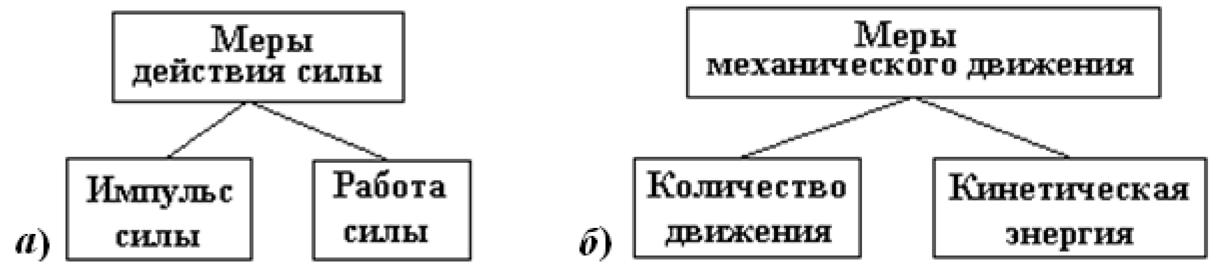


Рис. 3.4. Меры действия силы (а) и механического движения (б)

Импульс силы – вектор $\vec{S}$, динамическая величина, характеризующая передачу материальной точке механического движения со стороны действующего на нее тела за данный промежуток Δt времени и учитывающая (в отличие от силы) и интенсивность, и продолжительность механического взаимодействия. Импульс постоянной по величине и направлению силы равен произведению вектора силы на интервал времени ее действия, $\vec{S} = \vec{F} \cdot \Delta t$, Нм. Импульс переменной по величине и (или) направлению силы равен: $S = \int_{t_н}^{t_к} F dt$, $\Delta t = t_к - t_н$ – время действия силы $\vec{F} = \vec{F}(t)$, где $t_н$ и $t_к$ – моменты начала и конца ее действия.

Работа силы – алгебраическая величина, характеризующая передачу точке (телу) механического движения со стороны действующего на нее тела (точки) при перемещении точки (тела) на некотором пути. Работа силы $\vec{F}$, постоянной по величине и направлению, на конечном перемещении $\vec{u}$ материальной точки равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения: $A = \vec{F} \cdot \vec{u}$ = | F|·|u|$cos(\vec{F};\vec{u})$ (рис. 3.5 *а*). Работа силы $\vec{F} = \vec{F}(t)$, переменной по величине и (или) направлению, на конечном перемещении материальной точки равна значению криволинейного интеграла, взятого от выражения для элементарной работы этой силы на элементарном перемещении радиуса-вектора точки $d\vec{r}$:

$$A_{н,к} = \int_н^к \left|\vec{F}\right| d\partial \cos(\vec{F} \,\hat{;}\, \vec{v}) = \int_н^к \left|\vec{F}\right| ds \cos(\vec{F} \,\hat{;}\, \vec{\tau}) = \int_н^к F_r ds = \int_н^к \vec{F} d\vec{r} \quad \text{(рис.3.5}\textit{б}\text{),}$$

где $d\partial = \left|d\vec{s}\right| = \left|d\vec{r}\right|$ – элементарный путь, пройденный точкой за элементарный интервал времени *dt*; *ds* – элементарное приращение дуговой координаты точки ; $\vec{F}_\tau$ – проекция силы на орт касательной $\vec{\tau}$ к траектории в данной точке.

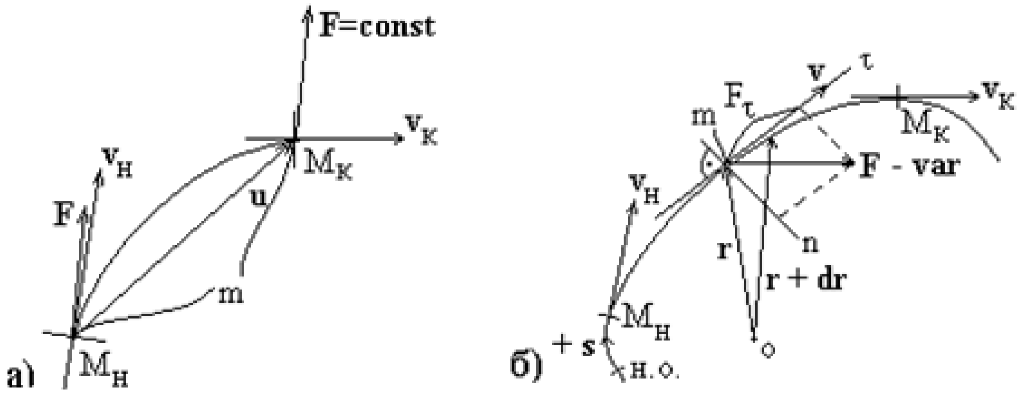


Рис. 3.5. Определение работы для постоянной (а) и переменной (б) силы

Мощность *N* постоянной силы – отношение элементарного приращения работы δA силы *F* к элементарному интервалу времени *dt*, в течение которого имело место это приращение, т.е. работа, совершаемая в единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \frac{dr}{dt} = \vec{F}\vec{v} = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{v}\right| \cos(\vec{F};\vec{v}) = Xv_x Yv_y + Zv_z\,.$$

Работа равнодействующей силы $\vec F = \sum \vec F_i$ на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ ее составляющих ($\vec F_1; \vec F_2; ...; \vec F_n$), на том же перемещении: $A(\vec F) = \sum A(\vec{F_i}) = \int_н^к \vec F d\vec r = \int_н^к \vec F_1 d\vec r_1 + \int_н^к \vec F_i d\vec r_i + ... + \int_н^к \vec F_n d\vec r_n$. Работа постоянной силы $\vec F$ на результирующем перемещении $\vec u = \sum \vec u_i$ равна алгебраической сумме работ этой силы на составляющих ($\vec u_1; \vec u_i; ...; \vec u_n$) перемещения $\vec u: A = \vec F \vec u = \sum A_i = \vec F \vec u_1 + \vec F \vec u_2 + ... + \vec F \vec u_i + \vec F \vec u_n$.

Импульс $\vec p$ материальной точки – вектор, имеющий направление вектора скорости $\vec v$, и модуль, равный произведению массы точки на модуль скорости ее движения: $\vec p = m\vec v$, $|\vec p| = m|\vec v|$ (рис. 3.6*а*).

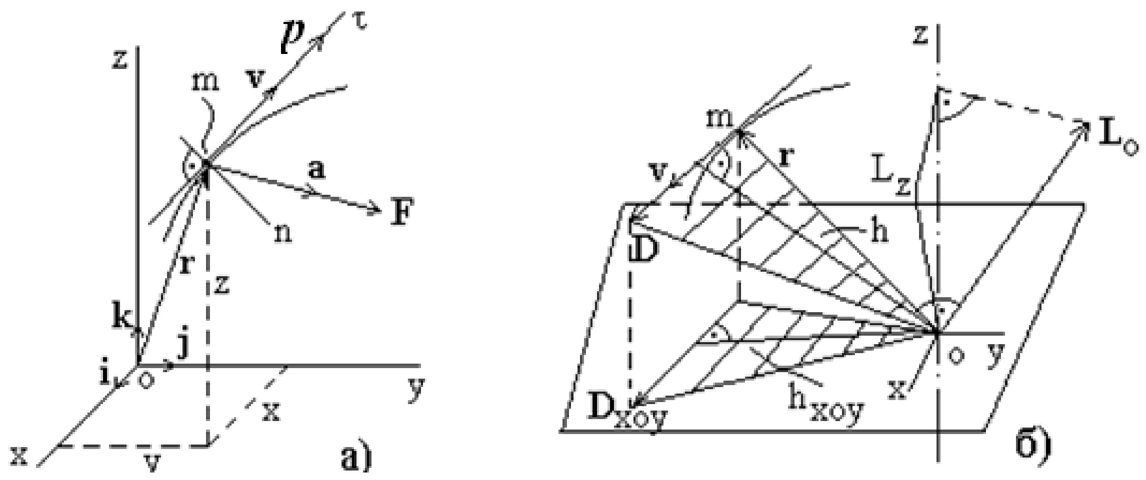


Рис. 3.6. Импульс **p** *(а) и момент импульса* **L** *(б) материальной точки*

Производная от вектора импульса $\vec p$ точки по времени равна равнодействующей всех сил, действующих на точку: $\frac{d\vec D}{dt} = \vec F = \sum \vec F_i$. Приращение вектора импульса $\vec p$ точки за конечный интервал времени равно геометрической сумме импульсов всех сил, действующих на точку в течение этого интервала времени:

$$\vec p_к - \vec p_н = \sum \vec S_i \quad \text{или} \quad m\vec v_к - m\vec v_н = \vec S_1 + \vec S_2 + ... + \vec S_i + ... + \vec S_n$$

или в проекциях на оси декартовой системы координат, получим:

$$m\text{v}_{\text{КХ}} - m\text{v}_{\text{НХ}} = \sum S_{\text{Xi}}\ ;\ m\text{v}_{\text{КY}} - m\text{v}_{\text{НY}} = \sum S_{\text{Yi}};\ m\text{v}_{\text{KZ}} - m\text{v}_{\text{HZ}} = \sum S_{\text{zi}}.$$

В случае, когда $\sum \vec{S}_i = 0$ или, например $\sum \vec{S}_{xi} = 0$, выполняется закон сохранения импульса материальной точки в целом ($\vec{p} = m\vec{v} = const$) или в проекции на ось, x ($p_x = m\text{v}_x = const$).

Момент импульса материальной точки относительно центра О – вектор $\vec{L}_O$, направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор $\vec{p}$ этой точки и центр О в ту сторону, смотря откуда вектор $\vec{p}$ виден направленным против вращения часовой стрелки, и равный: $\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p}$ (рис. 3.6 *б*). Момент импульса материальной точки относительно оси – алгебраическая величина, взятая со знаком плюс или минус и равная произведению модуля проекции p_{xOy} вектора импульса $\vec{p}$ на плоскость xOy, перпендикулярную оси z, на плечо h_{xOy} этой проекции относительно этой оси z: $L_z = |p_{xOy}|\, h_{xOy}$ (рис. 3.6 *б*).

Производная от вектора момента импульса относительно центра по времени равна главному моменту всех сил, действующих на точку, относительно этого центра: $\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_o^{\bullet} = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_i)$ или в проекциях на оси декартовой системы координат получаются соотношения:

$$\frac{d\vec{L}_x}{dt} = \sum \vec{M}_x(\vec{F}_i); \qquad \frac{d\vec{L}_y}{dt} = \sum \vec{M}_y(\vec{F}_i); \qquad \frac{d\vec{L}_z}{dt} = \sum \vec{M}_z(\vec{F}_i),$$

которые выражают теорему об изменении момента импульса точки, записанную в дифференциальной векторной и аналитической формах соответственно. В случае, когда $\sum \vec{M}_0(\vec{F}_i) = 0$ или, например $\sum \vec{M}_x(\vec{F}_i) = 0$, выполняется закон сохранения момента импульса точки относительно центра ($\vec{L}_o$) или оси (L_x).

Кинетическая энергия точки – мера механического движения, равная половине произведения массы точки на квадрат скорости ее движения: $K = (1/2)mv^2$. Приращение кинетической энергии K материальной точки при ее движении на некотором пути равно сумме работ всех сил, действующих на точку на этом пути: $\Delta K = \sum A_i$, где $\Delta K = K_к - K_н$, $K_к$, $K_н$ – кинетическая энергия точки в конечном и начальном положениях.

3.3. Динамика твердого тела и механической системы

Все силы, действующие на механическую систему, разделяют на *внешние и внутренние*. К внешним силам относят активные (заданные) силы и реакции внешних связей. К внутренним силам относят реакции внутренних связей – силы взаимодействия между телами (точками), входящими в систему тел (точек). Свойство системы внутренних сил – их главный момент $\vec{M}^*_{o,внут}$ и главный вектор $\vec{R}^*_{внут}$ равны нулю ($\vec{R}^*_{внут} = 0$), ($\vec{M}^*_{o,внут} = 0$), так как все внутренние силы – силы действия и противодействия между отдельными телами (точками) системы, попарно равны по модулю и противоположны по направлению. *Центр масс* системы материальных точек – точка, радиус-вектор $\vec{r}_c$ которой определяется уравнением: $\vec{r}_c = \dfrac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$, где m_i и $\vec{r}_i$ – масса и радиус-вектор i – ой точки механической системы (рис. 3.7*а*). В проекциях на оси декартовой системы координат выражения для координат центра масс имеют вид:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},\ y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i},\ z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

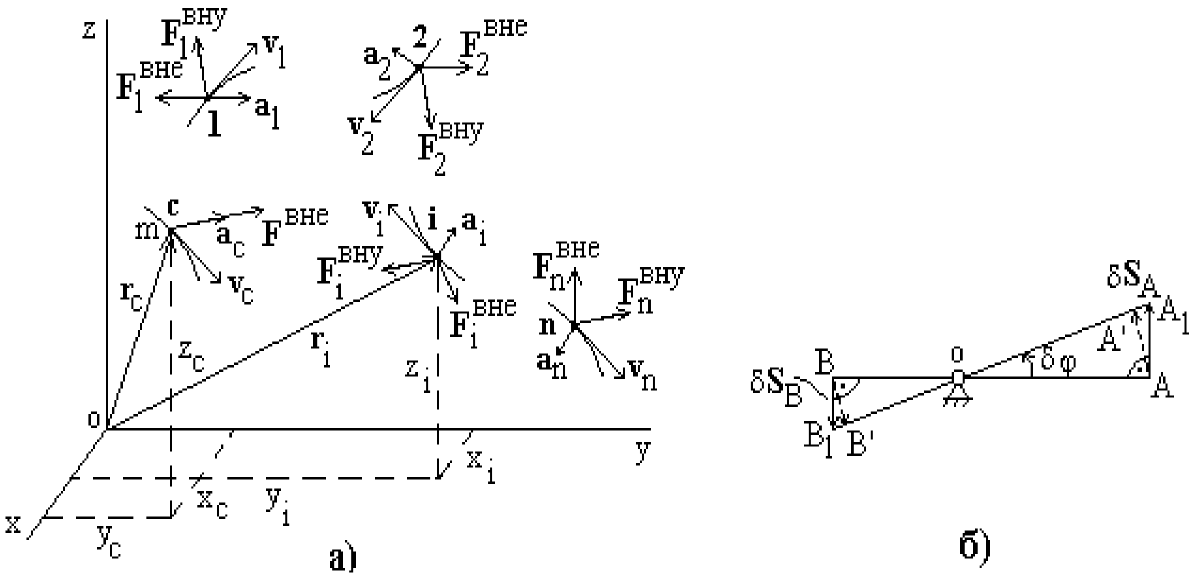


Рис. 3.7. Определение центра масс (а); возможные перемещения рычага (б)

Центр масс системы материальных точек движется как материальная точка с массой m, равной массе всей системы ($m = \sum m_i$), к которой приложены все внешние силы ($\vec{F}_1^{вне}, \vec{F}_2^{вне}, ...\vec{F}_j^{вне}, ..., \vec{F}_n^{вне}$), действующие на систему, т.е. уравнение движения центра масс: $m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_j^{вне}$ или в проекциях на оси декартовой системы координат дифференциальные уравнения движения центра масс имеют вид: $m\ddot{x}_C = \sum X_j^{вне}$, $m\ddot{y}_C = \sum Y_j^{вне}$, $m\ddot{z}_C = \sum Z_j^{вне}$.

Импульс системы материальных точек – вектор, равный геометрической сумме (главному вектору) импульсов всех материальных точек этой системы: $\vec{P} = \sum \vec{p}_i = m\vec{V}_c$, где $\vec{V}_c$ – скорость движения центра масс. Производная от импульса системы материальных точек по времени равна главному вектору внешних сил, действующих на все точки этой системы: $d\vec{P}/dt = \vec{F}^{вне}$ или в проекциях на оси декартовой системы координат, получим: $dP_x / dt = F_x^{вне}$. В случае, когда $\vec{F}^{вне} = 0$ или выполняется закон сохранения импульса системы материальных точек в целом ($\vec{P} = m\vec{V}_c = const$), или ($P_x = mV_{cx} = const$) – в проекции на ось x.

В векторной конечной форме теорема об изменении импульса системы материальных точек имеет вид: $\Delta\vec{P} = \sum \vec{S}_j^{вне}$ или $\vec{P}_к - \vec{P}_н = S_1^{вне} + S_2^{вне} + ... + S_j^{вне} + ...S_n^{вне}$ или в проекциях на оси декартовой системы координат следует теорема об изменении импульса механической системы в аналитической форме:

$$P_{Кx} - P_{Нx} = \sum S_{xj}^{вне},\ P_{Кy} - P_{Нy} = \sum S_{yj}^{вне},\ P_{Кx} - P_{Нz} = \sum S_{zj}^{вне}.$$

Момент импульса (*кинетический момент*) системы материальных точек *относительно центра* – вектор, равный геометрической сумме моментов импу-льса всех точек системы, взятых относительно этого центра: $\vec{L}_o = \sum \vec{L}_{oi} = \sum(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum[\vec{r}_i \times (m_i\vec{v}_i)]$. *Момент импульса* (*кинетический момент*) системы материальных точек *относительно оси* – алгебраическая сумма моментов импульса всех точек системы, взятых относительно этой оси: $L_z = \sum L_{zi}$. Производная от момента импульса системы материальных точек относительно центра по времени равна главному моменту всех внешних сил, действующих на все точки этой системы, относительно того же центра: $d\vec{L}_o / dt = \vec{M}_o^{*вне} = \sum \vec{M}_o(F_i^{вне})$ или в проекциях на оси декартовой системы координат: $dL_x/dt = \sum M_x(F_i^{вне})$, $dL_y/dt = \sum M_y(F_i^{вне})$, $dL_z/dt = \sum M_z(F_i^{вне})$ – следует теорема об изменении момента импульса системы материальных точек, записанная в дифференциальной векторной и аналитической формах соответственно. В случае, когда $\sum \vec{M}_o(\vec{F}_i^{вне}) = 0$ или, например, $\sum M_x(F_i^{вне}) = 0$, выполняется закон сохранения момента импульса системы материальных точек относительно центра ($\vec{L}_o = const$) или оси координат ($L_x = const$).

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех ее частей (точек, тел): $K = \sum K_i$. Формулы для вычисления кинетической энергии тела (для основных видов движения тел) приведены в таблице 1. Приращение кинетической энергии механической системы на некотором ее перемещении равно сумме работ всех внешних сил, действующих на все точки (тела) этой системы, на данном перемещении: $\Delta K = \sum A_i^{вне}$, где $K_к, K_н$ – кинетическая энергия системы в конечном и начальном положениях.

Абсолютно твердое тело как система из бесконечно большого числа элементарных частиц (материальных точек), бесконечно малое расстояние между которыми всегда неизменно. Поэтому масса твердого тела – предельное значение суммы масс его элементарных частиц: $m = lim\sum m_i$.

Моментом инерции тела относительно оси называется величина, являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси и равна сумме произведений масс всех частиц тела на квадраты их расстояний от этой же оси.

$$J_x = \int\limits_{(M)} \left(y^2 + z^2\right) dm, \quad J_y = \int\limits_{(M)} \left(x^2 + z^2\right) dm, \quad J_z = \int\limits_{(M)} \left(x^2 + y^2\right) dm$$

Момент инерции зависит только от формы тела и расположения масс в нем. ***Моменты инерции некоторых однородных тел простейшей формы*** (начало координат располагается в центре масс).

1. Прямолинейный тонкий стержень длиной L, расположенный вдоль оси OZ: $J_x = J_y = \dfrac{1}{12} mL^2$, $J_z = 0$.
2. Прямоугольный параллелепипед со сторонами *a*, *b* и *c*, параллельными соответственно осям OX, OY и OZ:, $J_y = \dfrac{m}{12}\left(a^2 + c^2\right)$, $J_z = \dfrac{m}{12}\left(b^2 + c^2\right)$
3. Полый прямой круглый цилиндр высотой H и радиусами внешней и внутренней поверхностей, равными R_1 и R_2; OZ – ось цилиндра: $J_x = J_y = \dfrac{m}{12}\left(3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2\right)$, $J_z = \dfrac{m}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)$.
4. Сплошной прямой круглый цилиндр высотой H и радиусом основания, равным R ; OZ – ось цилиндра: $J_x = J_y = \dfrac{m}{12}\left(3R^2 + H^2\right)$, $J_z = \dfrac{1}{2} mR^2$.
5. Тонкостенный прямой круглый полый цилиндр высотой H и радиусом основания, равным R ; OZ – ось цилиндра: $J_x = J_y = \dfrac{m}{12}\left(6R^2 + H^2\right)$, $J_z = mR^2$.
6. Полый шар с радиусами внешней и внутренней поверхностей, равными R_1 и R_2: $J_x = J_y = J_z = \dfrac{2}{5} m \dfrac{R_1^5 - R_2^5}{R_1^3 - R_2^3}$;
7. Сплошной шар: $J_x = J_y = J_z = \dfrac{2}{5} mR^2$;
8. Тонкостенная сфера: $J_x = J_y = J_z = \dfrac{2}{3} mR^2$

Радиус инерции тела – расстояние ρ_z от оси вращения z до точки, в которую должна быть сосредоточена вся масса m тела, чтобы момент инерции этой точки относительно этой оси равнялся моменту инерции тела относительно этой оси: $J_z = m\rho_z^2 = lim\sum m_i r_i$. Момент инерции тела J_{oz} относительно какой-либо оси oz равен сумме момента инерции $J_{c\varphi}$ тела относительно оси $c\varphi$, проходящей через центр масс тела, и параллельной оси oz, и произведения массы m тела на квадрат кратчайшего расстояния между осями: $J_{oz} = J_{c\varphi} + ma^2$ – теорема о моментах инерции тела относительно параллельных осей (теорема Штейнера).

Решение ряда задач динамики системы, состоящей из твердых тел, предполагает приведение системы сил инерции, действующих на все частицы каждого тела, как правило, к центру масс каждого тела (или другому центру приведения, если это целесообразно). В результате приведения сил инерции к центру масс, система бесконечно большого числа элементарных сил инерции, действующих на все частицы тела, заменяется, в общем случае, одной силой, равной главному вектору сил инерции ($\vec{\Phi}^* = -m\vec{a}_c = -\lim\sum m_i\vec{a}_i$) и приложенной в центре приведения (например в центре масс), и одной парой сил, с векторным моментом, равным главному моменту сил инерции, взятому относительно выбранного центра приведения $\vec{M}_c^{*\Phi} = -\lim\sum\left[\vec{r}_i \times (m_i\vec{a}_i)\right] = -\varepsilon J_c$.

Таблица 1

Формулы для кинетической энергии тела и работы внешних сил, действующих на тело, и дифференциальные уравнения основных видов движения

Параметры	Поступательное движение	Вращение вокруг оси	Плоское движение	Сферическое движение	Сложное движение в общем случае
Кинетическая энергия	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}\omega^2 J_z$	$\frac{1}{2}mv_c^{\ 2} + \frac{1}{2}\omega^2 J_{c\xi}$	$\frac{1}{2}\omega^2 J_{O\Omega}$	$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\omega^2 J_{O\Omega}$
Работа внешних сил	$\int_{Мн}^{Мк} \overline{R}^{\bullet}_{вне} d\overline{r}$	$\int_{\varphi_н}^{\varphi_к} M_2^{\bullet вне} d\varphi =$ $= M_2^{\bullet вне}(\varphi_к - \varphi_н)$	$\int_{Мн}^{Мк} \overline{R}^{\bullet}_{вне} d\overline{r} +$ $+ M_я^{\bullet вне}(\varphi_к - \varphi_н)$	$\sum M_{O\Omega}^{*вне}\delta\alpha$	$\int_{Мн}^{Мк} \overline{R}^{\bullet}_{вне} d\overline{r} +$ $+ \sum M_{O\Omega}^{*вне}\delta\alpha$
Дифференциальные уравнения движения	$m\ddot{x}_c = \sum X_i^{вне}$ $m\ddot{y}_c = \sum Y_i^{вне}$ $m\ddot{z}_c = \sum Z_i^{вне}$	$\ddot{\varphi} J_Z = \sum M_Z(\overline{F}_i^{вне})$	$m\ddot{x}_c = \sum X_i^{вне}$ $m\ddot{y}_c = \sum Y_i^{вне}$ $\ddot{\varphi} J_{c\zeta} = \sum M_{C\zeta}(F_i^{вне})$	$\varepsilon_e J_{O\Omega} = \sum (F_i^{вне})$	$m\ddot{x}_c = \sum X_i^{вне}$ $m\ddot{y}_c = \sum Y_i^{вне}$ $m\ddot{z}_c = \sum Z_i^{вне}$ $\varepsilon_E J_{O\Omega} = \sum (F_i^{вне})$

3.4. Примеры решения задач

Задача 3.1.

Воздушный шар весом P опускается с ускорением *a*. Какой груз Q (балласт) надо сбросить, чтобы шар стал подниматься с таким же ускорением.

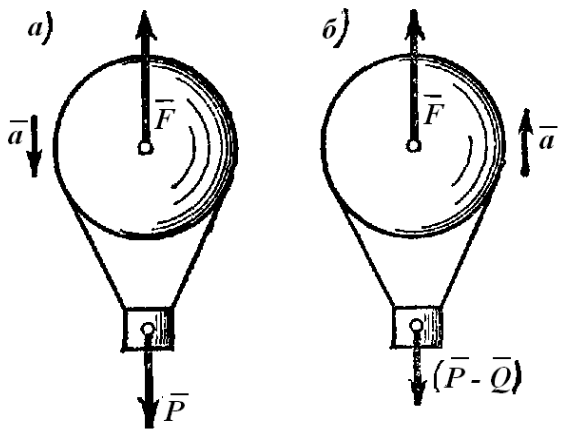


Рис. 3.8. К задаче 3.1

Решение.

На падающий шар действуют сила тяжести $\bar{P}$ и подъемная сила $\bar{F}$ (рис.3.8). Составляя уравнение второго закона Ньютона в проекции на вертикаль, найдем, что

$$(P/g)a = P - F.$$

Когда будет сброшен балласт (рис. 3.8, б), вес шара станет равен $P - Q$, а подъемная сила останется той же. Тогда, учитывая что шар при этом движется вверх, получим

$$(P - Q)a/g = F - (P - Q).$$

Исключая из этих уравнений неизвестную силу F, найдем

$Q = 2P/(1 + g/a)$.

Задача 3.2.

Лифт весом P (рис. 3.9) начинает подниматься с ускорением *a*. Определить натяжение троса.

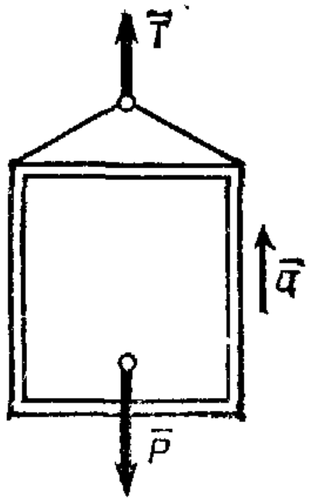


Рис. 3.9. К задаче 3.2.

Решение.

На лифт действуют сила тяжести $\bar{P}$ и реакция троса $\bar{T}$. Составляя второй закон Ньютона в проекции на вертикаль, получим $(P/g)a = T — P$, откуда

$$T = P(1 + a/g).$$

Если лифт опускается с таким же ускорением, то натяжение троса будет равно $T_1 = P(1— a/g)$.

Задача 3.3.

Радиус закругления в точке А моста равен R (рис. 3.10). Найти, какое давление на мост в точке А окажет автомобиль массы m, движущийся со скоростью v.

Решение.

В точке А автомобиль имеет нормальное ускорение $a_n = v^2/R$. При этом на него действуют сила тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$ и реакция $\bar{N}$. Тогда по второму закону Ньютона, составленному в проекции на нормаль $\frac{mv^2}{R} = mg - N$, откуда $N = m(g - v^2/R)$. Сила давления на мост равна по модулю N, но направлена вниз.

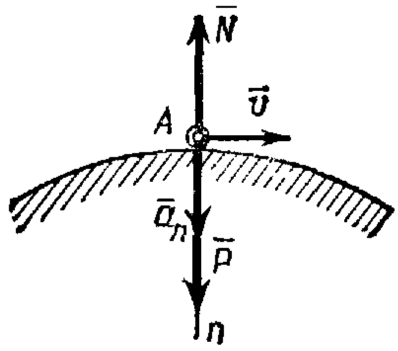


Рис. 3.10. К задаче 3.3

Задача 3.4.

Пренебрегая трением и сопротивлением воздуха, определить, в течение какого промежутка времени тело пройдет по прорытому сквозь Землю вдоль хорды АВ каналу от его начала А до конца В (рис. 3.11). При подсчете считать радиус Земли R=6370 км.

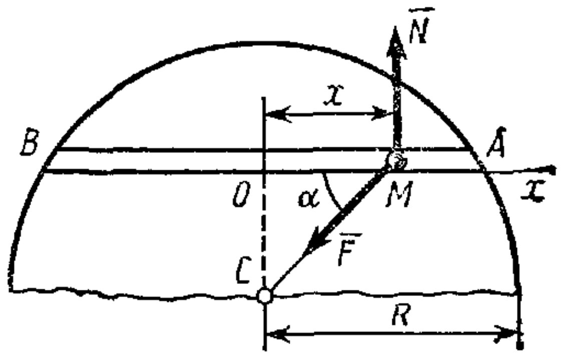


Рис. 3.11. К задаче 3.4

Решение.

В теории притяжения доказывается, что тело, находящееся внутри Земли, притягивается к ее центру с силой F, прямо пропорциональной расстоянию *r* до этого центра. Принимая во внимание, что при *r=R* (т. е. на поверхности Земли) сила F равна силе тяжести ($F = mg$), получим, что внутри Земли

$$F = (mg/R)r,$$

где $r = MC$ — расстояние от точки М до центра Земли.

Поместим начало отсчета О в середине хорды АВ (в этой точке тело, находящееся в канале, было бы в равновесии) и направим ось Ох вдоль линии ОА. Если обозначить длину хорды АВ через *2a*, то начальные условия задачи будут: при $t=0$ $x=a$, $v_x=0$.

В произвольном положении на тело действуют силы $\bar{F}$ и $\bar{N}$. Следовательно,

$$\sum F_{kx} = -F\cos\alpha = -\left(\frac{mg}{R}\right)r\cos\alpha = -\left(\frac{mg}{R}\right)x,$$

так как из чертежа видно, что $r\cos\alpha = x$, $N_x=0$.

Действующая сила оказалась зависящей от координаты x точки М.Необходимо решить дифференциальное уравнение. Сокращая на m и вводя обозначение

$$\frac{g}{R} = k^2,$$

получим

$$v_x\frac{dv_x}{dx} = -k^2x.$$

Умножая обе части этого равенства на dx, сразу разделяем переменные и, интегрируя, находим

$$\frac{v_x^2}{2} = -\frac{k^2x^2}{2} + C_1.$$

По начальным условиям при $x = a$ $v_x = 0$. Следовательно, $C_1 = k^2a^2/2$. Подставляя это значение C_1, получаем

$$v_x = \pm k\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Считая, что в рассматриваемом положении скорость направлена от М к О, т. е. что v_x<0, берем перед корнем знак минус (легко, однако, проверить, что тот же окончательный результат получится и при знаке плюс). Тогда, заменяя v_x на dx/dt, найдем, что

$$\frac{dx}{dt} = -k\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Разделяя переменные, приведем это уравнение к виду

$$kdt = -\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

и, интегрируя, получим

$$kt = \arccos\left(\frac{x}{a}\right) + C_2.$$

Подставляя сюда начальные данные (при $t = 0$ $x = a$), находим, что C_2=0. Окончательно закон движения тела в канале будет иметь вид

$$x = a \cdot \cos kt.$$

Следовательно, тело будет совершать в канале АВ гармонические колебания с амплитудой *a*.

Найдем теперь время t_1 движения тела до конца В канала. В точке В координата $x = -a$. Подставляя это значение в уравнение движения, получим $\cos kt_1 = -1$, откуда $kt_1 = \pi$ и $t_1 = \pi/k$. Но по введенному обозначению

$k = \sqrt{g/R}$. Отсюда, произведя подсчет, находим, что время движения по каналу АВ при условиях задачи не зависит от его длины и всегда равно

$$t_1 = \pi\sqrt{R/g} \approx 42\text{мин } 11\text{с}.$$

Этот очень интересный результат породил ряд (пока еще фантастических) проектов прорытия такого канала.

Найдем дополнительно, чему будет равна при движении максимальная скорость тела. Из выражения для v_x видно, что $v = v_{max}$ при х=0, т. е, в точке О.

Следовательно,

$$v_{max} = ka = a\sqrt{g/R}.$$

Если, например, 2*a*=0,1, R=637 км (приблизительно расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга), то $v_{\max} \approx 395\,м/с = 1422\,км/ч$.

Задача 3.5.

Груз, лежащий на середине упругой балки (рис. 3.12), прогибает ее на величину $\lambda_{ст}$ (статистический прогиб балки) Пренебрегая весом балки, определить, чему будет равен ее максимальный прогиб λ_m, если груз упадет на балку с высоты Н.

Решение.

Воспользуемся для решения уравнением теоремы об изменении кинетической энергии. В данном случае начальная скорость груза v_0 и конечная его скорость v_1 (в момент максимального прогиба балки) равны нулю и уравнение работы всех внешних сил равно нулю

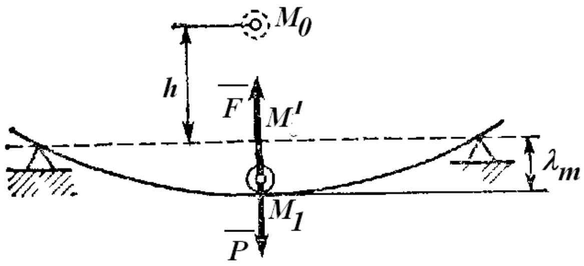


Рис. 3.12. К задаче 3.5

$$\sum A_k = 0$$

Работу здесь совершают сила тяжести $\bar{P}$ на перемещении M_0M_1 и сила упругости балки $\bar{F}$ на перемещении $M'M_1$. При этом $A(\bar{P}) = P(H + \lambda_m)$, $A(\bar{\Gamma}) = -0.5c\lambda_m^2$, так как для балки $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_m$. Поэтому

$$P(H + \lambda_m) - 0.5c\lambda_m^2 = 0.$$

Но при равновесии груза на балке сила тяжести уравновешивается силой упругости, следовательно, $P = c\lambda_{ст}$ и предыдущее равенство можно представить в виде $\lambda_m^2 - 2\lambda_{ст}\lambda_m - 2\lambda_{ст}H = 0$

Решая это квадратное уравнение и учитывая, что по условиям задачи должно быть λ_m>0, находим

$$\lambda_m = \lambda_{\text{ст}} + \sqrt{\lambda_{\text{ст}}^3 + 2H\lambda_{\text{ст}}}.$$

Интересно отметить, что при H=0 получается $\lambda_m = 2\lambda_{\text{ст}}$. Следовательно, если груз положить на середину горизонтальной балки, то ее максимальный прогиб при опускании груза будет равен удвоенному статическому. В дальнейшем груз начнет вместе с балкой совершать колебания около равновесного положения. Под влиянием сопротивлений эти колебания затухнут, и система уравновесится в положении, при котором прогиб балки равен $\lambda_{\text{ст}}$.

Задача 3.6.

Груз весом Р, подвешенный на нити длиной l, отклоняют от вертикали на угол α в положение M_0 и отпускают без начальной скорости. Определить натяжение нити в момент, когда груз дойдет до наинизшего положения M_1.

Решение.

Изображаем груз в том положении, для которого надо найти натяжение нити, т. е. в положении M_1 (рис. 3.13). На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила реакции нити $\vec{T}$. Проводим нормаль M_{1n} в сторону вогнутости траектории и составляем второй закон Ньютона, учитывая, что в нашем случае радиус равен l. Получим

$$\frac{mv_1^2}{l} = T - P \quad \text{или} \quad T = \frac{mv_1^2}{l} + P,$$

где v_1 — скорость груза в положении M_1. Для определения v_1 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

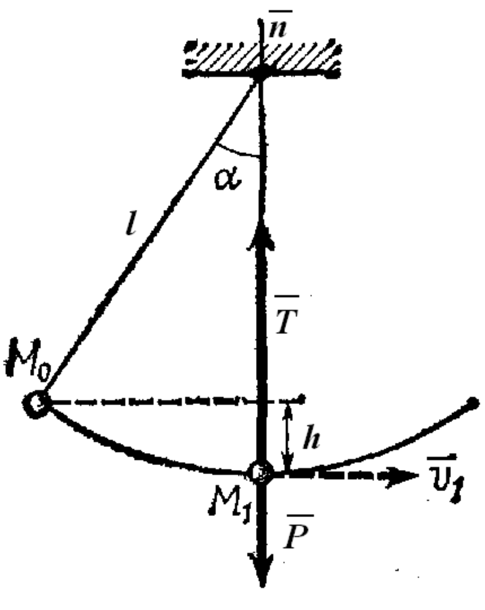


Рис. 3.13. К задаче 3.6

$$\frac{mv_1^2}{l} - \frac{mv_0^2}{l} = A^{\alpha}(M_0, M_1)$$

Работу на участке M_0M_1 совершает только сила $\vec{P}$. Поэтому $A^{\alpha} = Ph = Pl(1-\cos\alpha)$.

Так как $v_0 = 0$, то, подставляя найденное значение работы в теорему об изменении кинетической энергии, получим $mv_1^1 = 2Pl(1-\cos\alpha)$ и окончательно найдем

$$T = P(3 - 2\cos\alpha).$$

В частном случае, если угол начального отклонения α=90°, натяжение нити при прохождении через вертикаль будет равно $3P$, т. е. утроенному весу груза. Полученное решение показывает, что динамические реакции действительно могут значительно отличаться от статических.

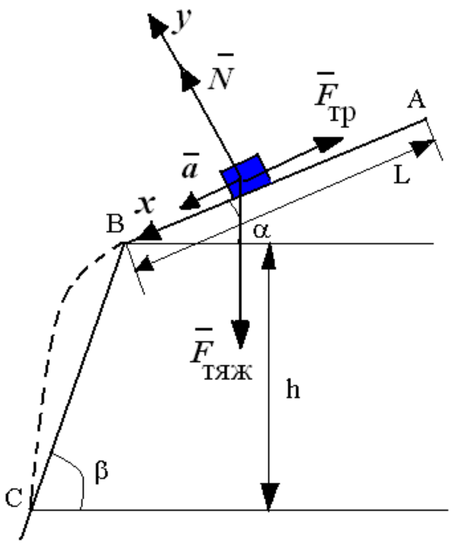


Рис. 3.14. К задаче 3.7

Задача 3.7 *(рис. 3.14).*

Тело движется из точки А по участку АВ длиной L=10 м наклонной плоскости, составляющей угол α =30^0 с горизонтом в течение τ секунд. Начальная скорость равна нулю. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен μ =0,2.

В точке В тело покидает плоскость и попадает в точку С плоскости ВС, наклоненной под углом β =60^0 к горизонту.

При решении задачи принять тело за материальную точку, сопротивление воздуха не учитывать. Принять $g = 9{,}8 \, м/с^2$.

Определить τ и h.

Решение.

Часть 1

На участке АВ действуют: сила тяжести, сила реакции опоры и сила трения.

Составим второй закон Ньютона в векторном виде

$$m\vec{a} = \vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{тр} + \vec{N}$$

В проекциях на оси координат

$x: \quad ma = F_{тяж} \sin\alpha - F_{тр}$

$y: \quad 0 = N - F_{тяж} \cos\alpha$

Так как сила трения $F_{тр} = \mu N$, поэтому

$a = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g = 3{,}2$ м/с.

Применяя формулы кинематики,

$V_B = \sqrt{2aL} = 8$ м/с $\qquad \tau = \dfrac{V_B}{a} = 2{,}5$ с

Часть 2

На участке ВС на тело действует только сила тяжести, поэтому оно имеет ускорение g и направлено вертикально вниз. Движение по горизонтали равномерное, по вертикали – равноускоренное. Поэтому

$$d = V_B \cos\alpha\, T \qquad h = \frac{gT^2}{2} + V_B \sin\alpha\, T$$

Из рис. 3.14. видно, что $h = d\ tg\beta$

Решив полученную систему уравнений

$\dfrac{gT^2}{2} + V_B \sin\alpha\, T = \sqrt{3} V_B \cos\alpha\, T \qquad T = \dfrac{2V_B}{g}\left(\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha\right) = 1{,}63$ с.

$$h = \frac{gT^2}{2} + V_B \sin\alpha\, T = 19{,}52 \text{ м}$$

Ответ $\quad \tau = 2{,}5$ с; $\quad h = 19{,}5$ м.

Задача 3.8.

Механическая система состоит из (рис. 3.15):

- Груза 1 массой m_1=8 кг;
- Невесомого ступенчатого шкива 2 с радиусами ступеней R_2=0,3 м, r_2=0,1 м;
- Блока 3 радиусом R_3=0,2 м и массой m_3=4 кг, масса блока равномерно распределена по ободу;
- Подвижного блока 4 массой 18 кг, который представляет собой сплошной однородный цилиндр;
- Пружины жесткости k=3200 Н/м.

Тела системы соединены друг с другом нитями. Коэффициент трения грузов о плоскость μ=0,1. Под действием силы F=50(8+3s), зависящей от перемещения s первого груза, система приходит в движение из состояния покоя.

Деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент М=12 Нм сил сопротивления (от трения в подшипниках). Найти скорость первого груза в тот момент времени, когда его перемещение s=0,2 м. $g = 10\ \frac{м}{с^2}$

Решение

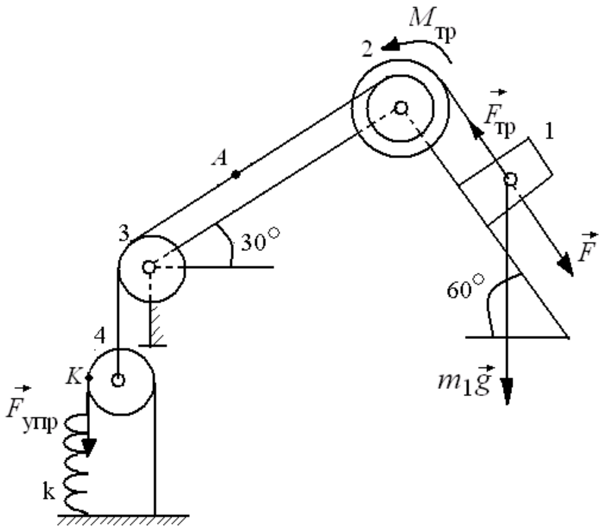


Рис. 3.15. К задаче 3.8

Вычислим кинетическую энергию заданной системы грузов как функцию скорости первого тела.

Груз 1 движется поступательно, поэтому его кинетическая энергия $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = 4кг \cdot V_1^2$

Кинетическая энергия ступенчатого шкива 2 равна нулю, так как он невесом. Угловая скорость шкива $\omega_2 = \frac{V_1}{R_2}$.

Скорость точки А $V_A = \frac{V_1}{R_2} r_2$.

Кинетическая энергия блока 3 – $T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$, где I_3 - его момент инерции, который в данном случае равен $I_3 = m_3 R_3^2$. Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \frac{V_A}{R_3} = \frac{V_1 r_2}{R_2 R_3}$. В итоге кинетическая энергия $T_3 = \frac{1}{2} m_3 \frac{V_1^2 r_2^2}{R_2^2} = 0,22кг \cdot V_1^2$.

Центр подвижного блока 4 движется со скоростью $V_4 = V_A = \frac{V_1}{R_2} r_2$. Угловая скорость его вращения $\omega_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{V_1 r_2}{R_2 R_4}$, где I_4 - его момент инерции, который для сплошного цилиндра равен $I_4 = \frac{1}{2} m_4 R_4^2$. Кинетическая энергия состоит из двух слагаемых – поступательного и вращательного движений. В итоге

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 \frac{V_1^2 r_2^2}{R_2^2} + \frac{1}{4} m_3 \frac{V_1^2 r_2^2}{R_2^2} = \frac{3}{4} m_4 \frac{V_1^2 r_2^2}{R_2^2} = 1,5кг \cdot V_1^2$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 5,72кг \cdot V_1^2$$

Найдем работу внешних сил

$$A_F = \int_0^S F ds = 50\int_0^{s_1}(8+3s)ds = 50\left(8s + \frac{3s^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0,2} = 83 Дж .$$

$$A_{mg1} = m_1 g \cdot S \cos 30^0 = 13,9 Дж$$

$$A_{тр} = -\mu m_1 g \cdot S \cos 60^0 = -0,8 Дж$$

$$A_M = -M\varphi_2 = -M\,\frac{S}{R_2} = -8 Дж$$

$$A_{mg4} = -m_4 g \cdot S\,\frac{r_2}{R_2} = -12 Дж$$

$A_{упр} = -k\cdot\left(\dfrac{2S\,r_2}{R_2}\right)^2 = -56,9 Дж$, так как скорость точки *K* определяется с помощью формулы $V_K = \dfrac{2V_1 r_2}{R_2}$.

В итоге, работа всех внешних сил $19,2 Дж$

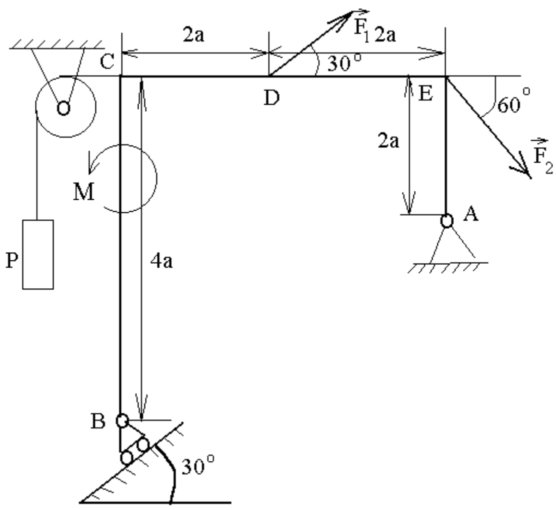
Так как работа внешних сил равна изменению кинетической энергии, поэтому V_1 = <u>**1,35 м / с**</u>.

4. Задания к домашней контрольной работе

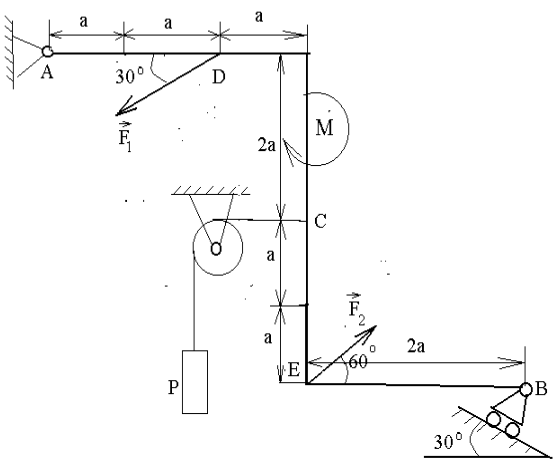
Для усвоения курса “Теоретическая механика” необходимо изучить теорию, получить навыки в решении задач и выполнить индивидуальные контрольные работы по указанным разделам курса. Задания в контрольных работах выполняются по вариантам в обычной тетради (12 стр.) или на листах бумаги формата А4 (для ксерокса), которые затем сшиваются. Решение каждой задачи должно сопровождаться аккуратным и наглядным чертежом размерами с учетом применяемого масштаба, который выполняется согласно условиям задачи. На рисунках следует показать все заданные величины (векторы сил, скоростей, ускорений и др.) и координатные оси. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (формулами, теоремами, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля (3-4см) для замечаний преподавателя. Номер варианта определяется последней цифрой в студенческом билете или зачетной книжке.

Задача С1

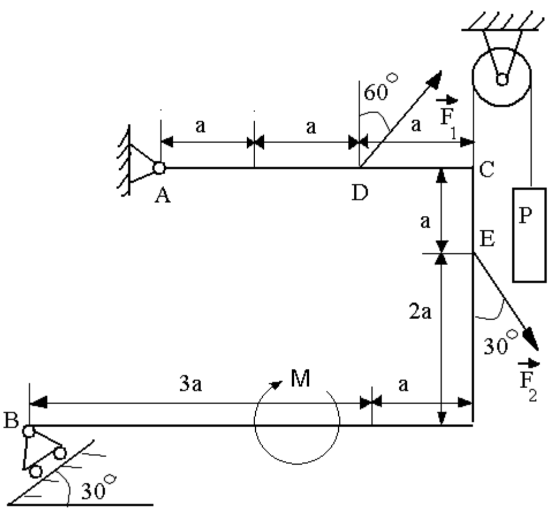
Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости, закреплена в точке *А* шарнирно, а в точке В – к шарнирной опоре на катках или к невесомому стержню. В точке *С* к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз массой 2500 кг. На раму действуют пара сил с моментом М=100 кН*м , а также две силы F1=10 кН и F2=40 кН. Рисунок соответствует Вашему варианту. Определить реакции связей в точках А и В, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять *a*=0,5 м, $g = 10 \ \frac{м}{с^2}$



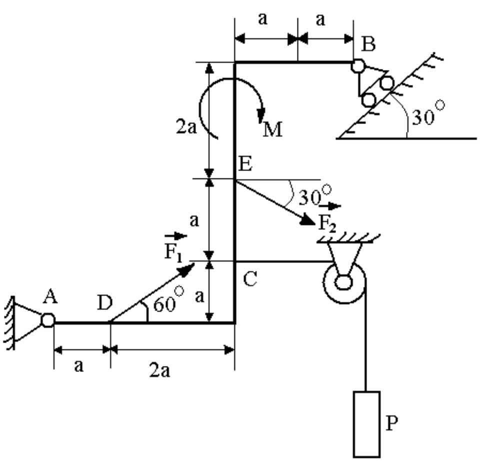
Вариант 1



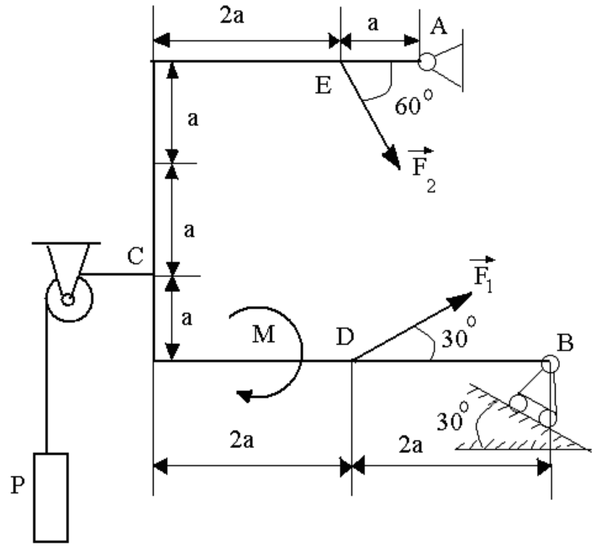
Вариант 2



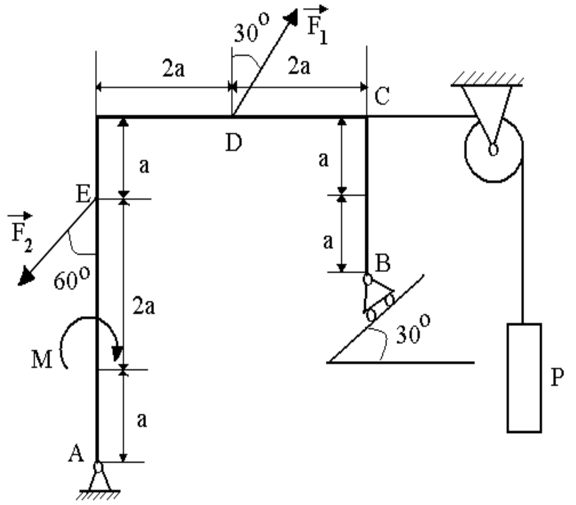
Вариант 3



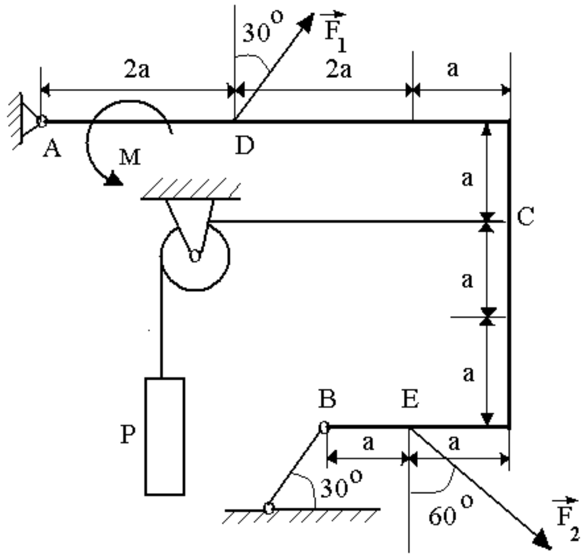
Вариант 4



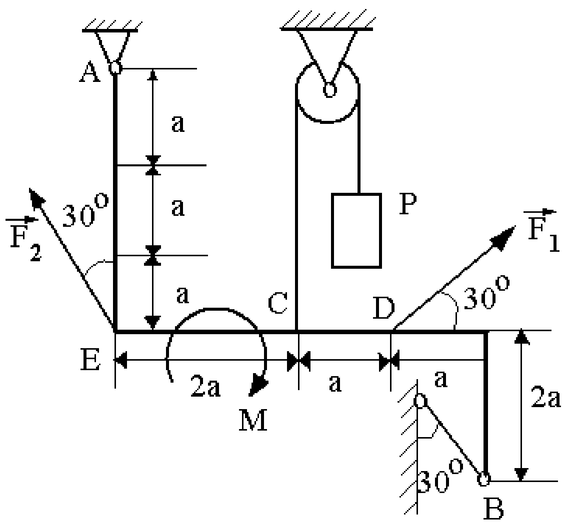
Вариант 5



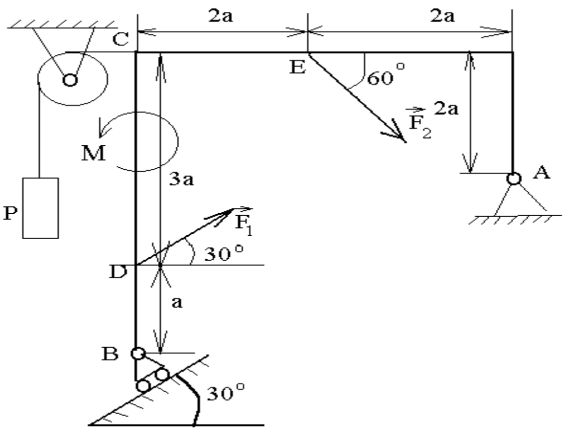
Вариант 6



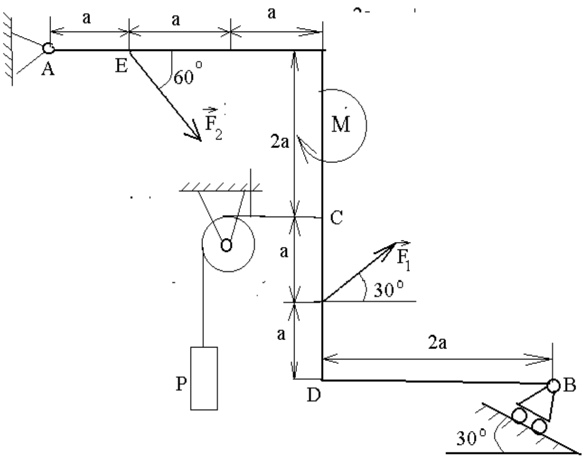
Вариант 7



Вариант 8



Вариант 9



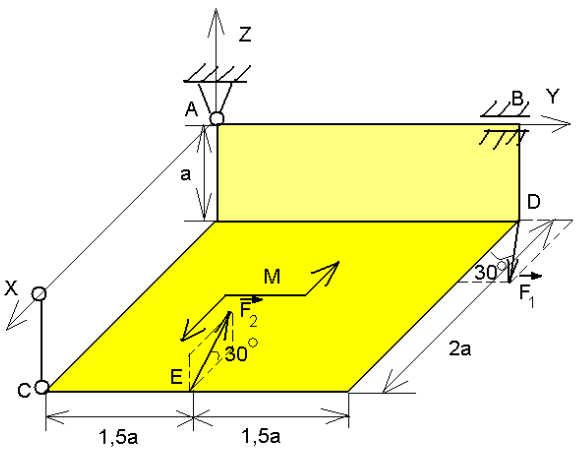
Вариант 10

Рисунки к задаче С1

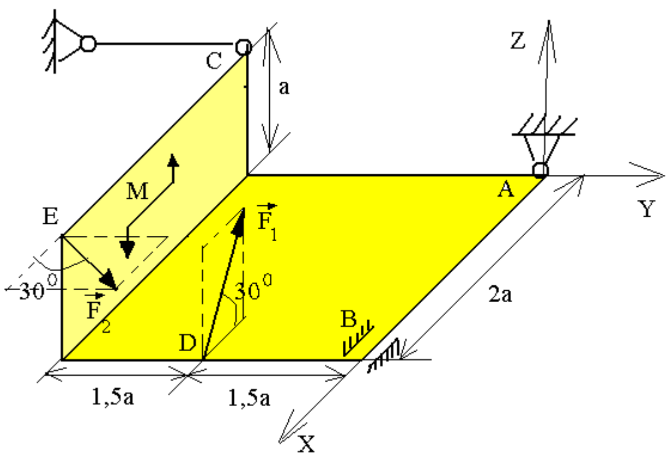
Задача С2

Две однородные прямоугольные плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром в точке А, цилиндрическим шарниром в точке В и невесомым стержнем в точке С. Размеры плит указаны на рисунке. Масса большей плиты 500 кг, меньшей 300 кг. На плиты действуют пара сил с моментом 4 кН м две силы F_1 и F_2, равные 6 кН и 8 кН соответственно. Их положение указаны в таблице. Определить реакции связей в точках А и В и реакцию стержня. При подсчетах принять *a*=0,6 м.

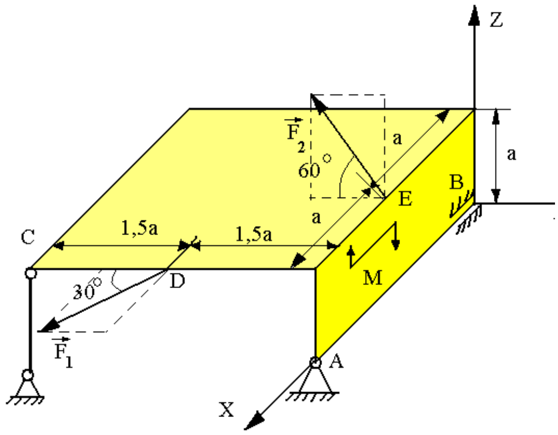
Вариант	Пара сил М лежит в плоскости	Сила F_1	Сила F_2
1	XOY	Лежит в плоскости XOY	Лежит в плоскости XOZ
2	XOZ	Лежит в плоскости XOZ	Лежит в плоскости XOY
3	XOZ	Лежит в плоскости XOY	Лежит в плоскости YOZ
4	XOY	Параллельно оси OX	Лежит в плоскости XOY
5	YOZ	Лежит в плоскости XOZ	Лежит в плоскости YOZ
6	XOY	Лежит в плоскости XOY	Параллельно оси OY
7	XOZ	Параллельно оси OX	Лежит в плоскости XOZ
8	XOY	Параллельно оси OX	Лежит в плоскости YOZ
9	XOY	Параллельно оси OX	Лежит в плоскости XOZ
10	XOZ	Лежит в плоскости XOY	Лежит в плоскости YOZ



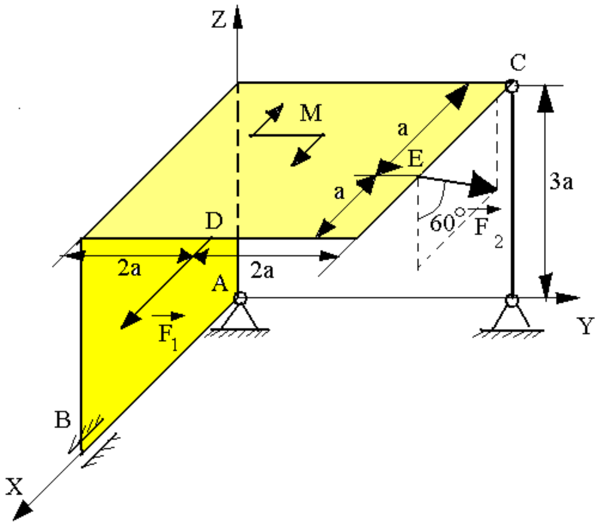
Вариант 1



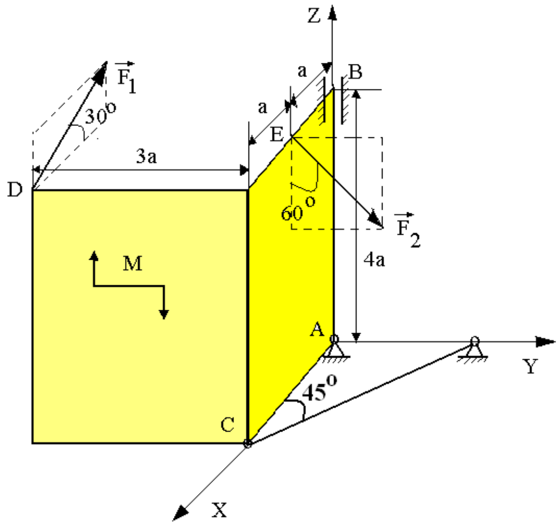
Вариант 2



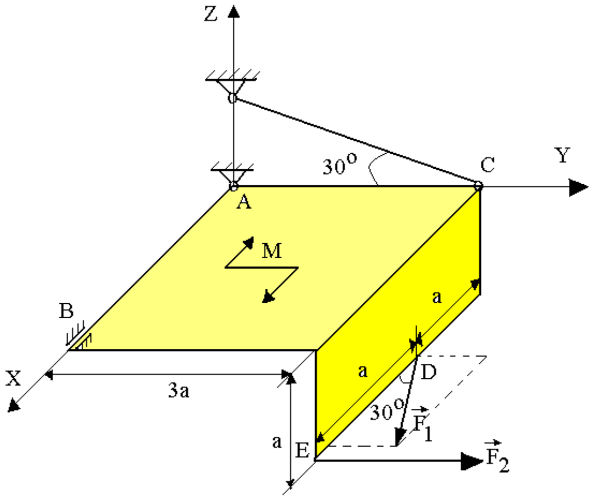
Вариант 3



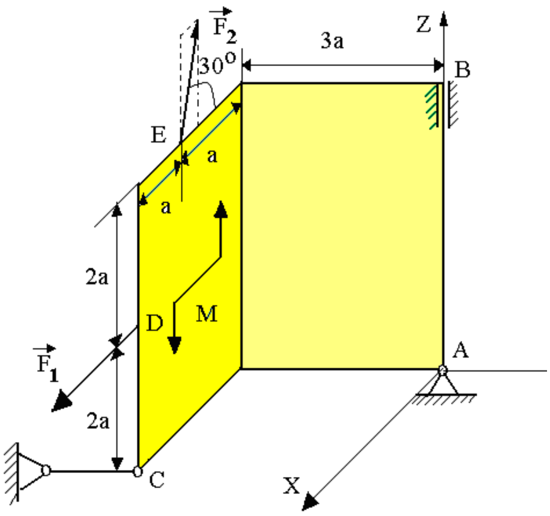
Вариант 4



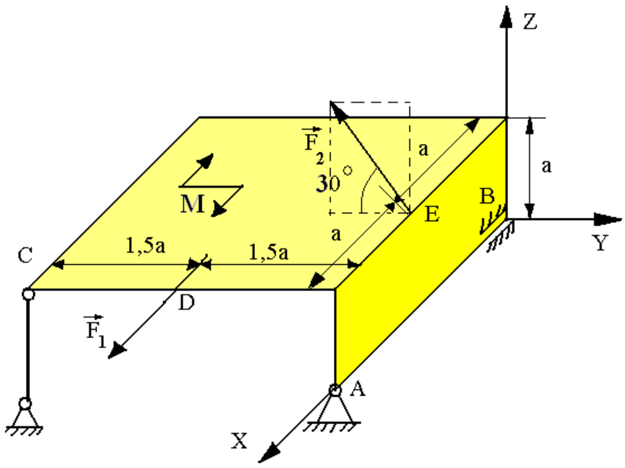
Вариант 5



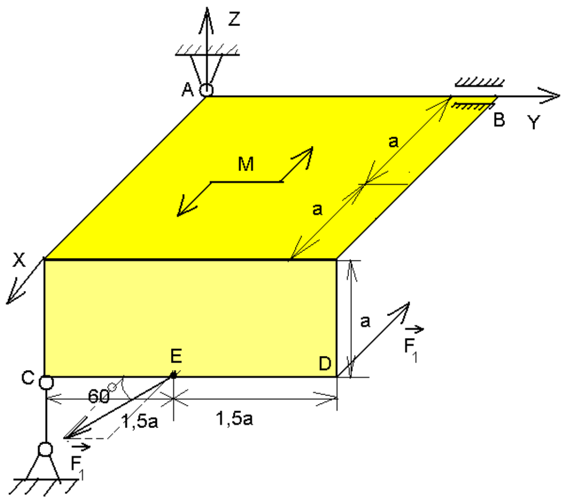
Вариант 6



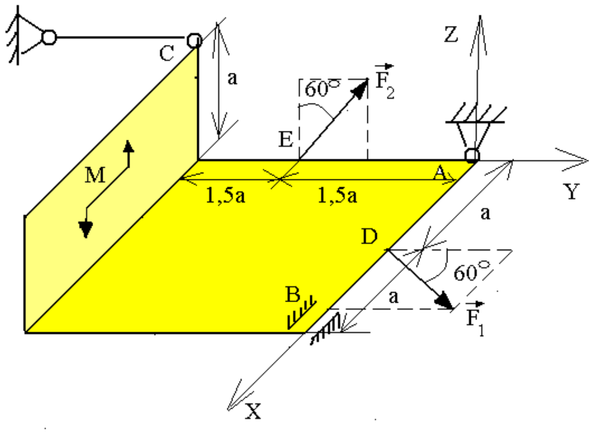
Вариант 7



Вариант 8



Вариант 9



Вариант 10

Рисунки к задаче С2

Задача К1

Плоский механизм состоит из стержней и ползуна С, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами шарнирами. Точка D находится в середине стержня АВ. Длины стержней равны соответственно L_1=0,4 м, L_2 =1,2 м, L_3=1,4 м, L_4=0,6 м.

Вариант 1.

Дано: ω_4= 6 1/с, ω_1 и ω_4 величины постоянные. Заданную угловую скорость считать направленной против часовой стрелки.

Найти: скорости точек А и С; угловую скорость ω_{AB}; ускорение точки А; угловое ускорение ε_{AB}

Вариант 2.

Дано: ω_4= 4 1/с, ω_1 и ω_4 величины постоянные. Заданную угловую скорость считать направленной против часовой стрелки.

Найти: скорости точек А и С; угловую скорость ω_{AB}; ускорение точки А; угловое ускорение ε_{AB}.

Вариант 3.

Дано: ω_1= 5 1/с, ω_1 величина постоянная. Заданную угловую скорость считать направленной против часовой стрелки.

Найти: скорости точек В и С; угловую скорость ω_{AB}; ускорение точки В; угловое ускорение ε_{AB}.

Вариант 4.

Дано: ω_4= 5 1/с, ω_1 и ω_4 величины постоянные. Заданную угловую скорость считать направленной против часовой стрелки.

Найти: скорости точек A и C; угловую скорость ω_{CD}; ускорение точки A; угловое ускорение ε_{AB}.

Вариант 5.

Дано: ω_1= 3 1/с, ω_1 и ω_4 величины постоянные. Заданную угловую скорость считать направленной против часовой стрелки.

Найти: скорости точек B и C; угловую скорость ω_{CD}; ускорение точки B; угловое ускорение ε_{AB}.

Вариант 6.

Дано: ω_1= 2 1/с, ε_1=4 1/с^2 . Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки.

Найти: скорости точек B и C; угловую скорость ω_{AB}; ускорение точки B; угловое ускорение ε_{AB}.

Вариант 7.

Дано: Скорость точки B - 4 м/с, ее ускорение 6 м/с^2, их направление указано на рисунке стрелкой.

Найти: скорости точек A и C; угловую скорость ω_{CD}; ускорение точки A; угловое ускорение ε_{AB}.

Вариант 8.

Дано: ω_1= 3 1/с, ε_1=5 1/с^2 . Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки.

Найти: скорости точек B и C; угловую скорость ω_{AB}; ускорение точки B; угловое ускорение ε_{AB}.

Вариант 9.

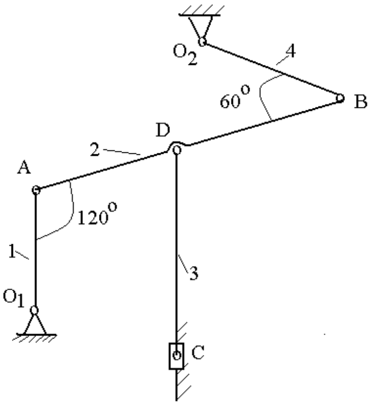
Дано: Скорость точки B - 6 м/с, ее ускорение 8 м/с^2, их направление указано на рисунке стрелкой.

Найти: скорости точек A и C; угловую скорость ω_{AB}; ускорение точки A; угловое ускорение ε_{AB}.

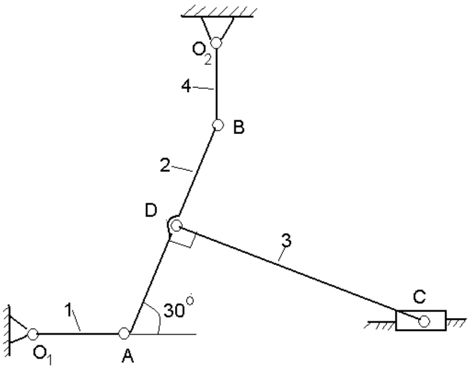
Вариант 10.

Дано: угловая скорость и угловое ускорение первого стержня соответственно равны 2 1/с и 4 1/с^2. Они направлены против часовой стрелки.

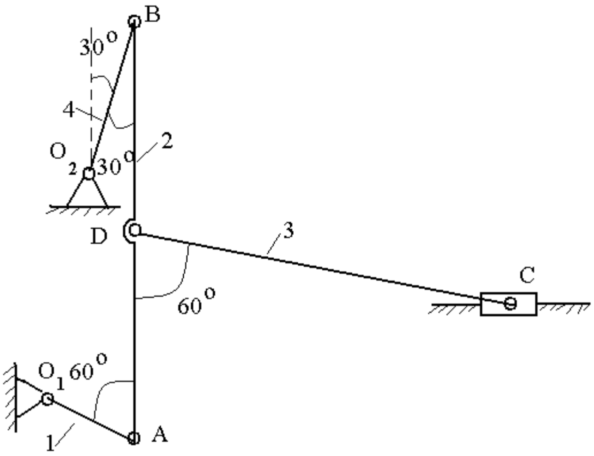
Найти: скорости точек B и C; угловую скорость ω_{AB}; ускорение точки B; угловое ускорение ε_{AB}.



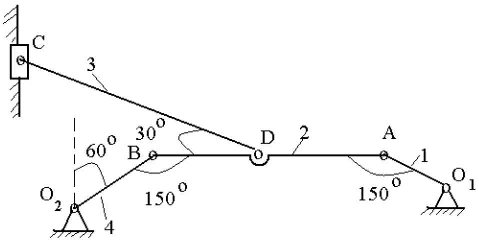
Вариант 1



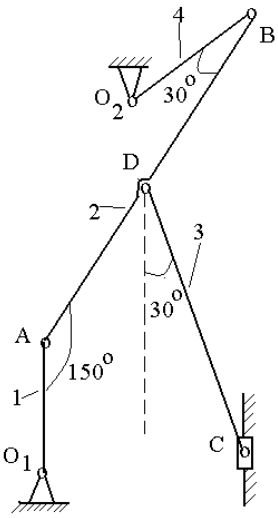
Вариант 2



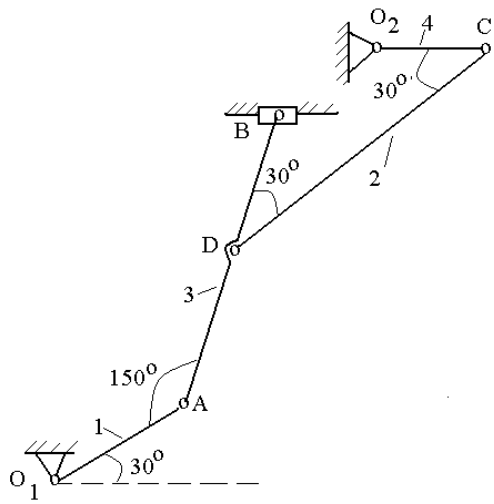
Вариант 3



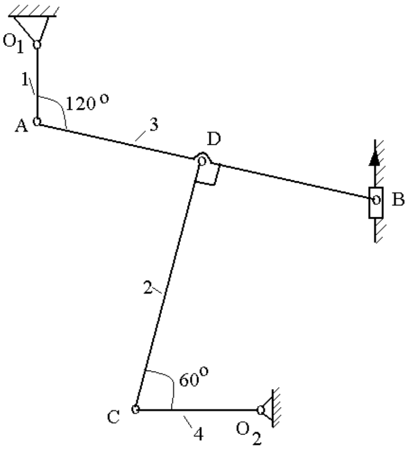
Вариант 4

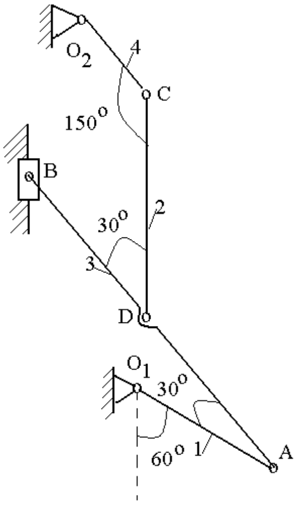


Вариант 5



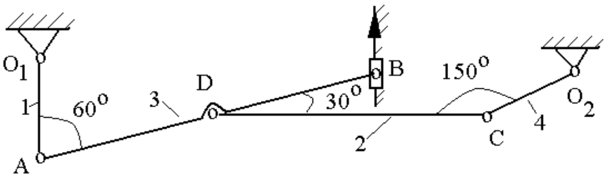
Вариант 6

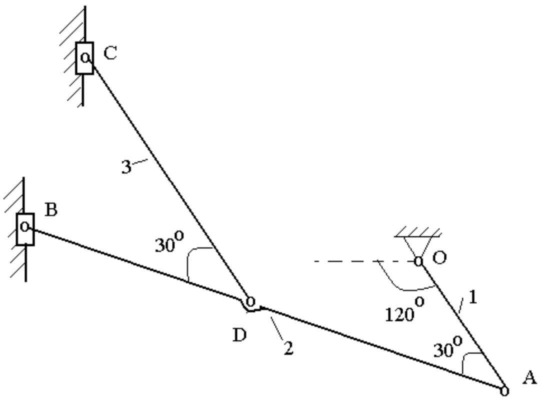




Вариант 7

Вариант 8





Вариант 9

Вариант 10

Рисунки к задаче К1

Задача К2

Вариант 1

Прямоугольная пластина вращается вокруг оси по закону $\varphi(t) = 4(t^2 - t)$. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунке угловой стрелкой. Ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку О. По стороне пластины движется точка М, закон ее относительного движения $s = AM = 50(3t - t^2) - 64$ (s –в сантиметрах, t – в секундах). На рисунке точка М показана в положении, при котором s=AM>0 (при s<0 точка М находится по другую сторону от точки А). b=12 см.

Найти абсолютную скорость и ускорение точки М в момент времени t=1 с.

Вариант 2

Прямоугольная пластина вращается вокруг оси по закону $\varphi(t) = 4(t^2 - t)$. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунке угловой стрелкой. Ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку О.По стороне пластины движется точка М, закон ее относительного движения $s = AM = 50(3t - t^2) - 64$ (s –в сантиметрах, t – в секундах). На рисунке точка М показана в положении, при котором s=AM>0 (при s<0 точка М находится по другую сторону от точки А). b=12 см.

Найти абсолютную скорость и ускорение точки М в момент времени t=1 с.

Вариант 3

Прямоугольная пластина вращается вокруг оси по закону $\varphi(t) = 2(t^2 - t)$. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунке дуговой стрелкой. Ось вращения OO1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве). По пластине вдоль прямой BD движется точка М, закон ее относительного движения $s = AM = 60(t^3 - t^2)$ (s –в сантиметрах, t – в секундах). На рисунке точка М показана в положении, при котором s=AM>0 (при s<0 точка М находится по другую сторону от точки А). b=20 см.

Найти абсолютную скорость и ускорение точки М в момент времени t=1 с.

Вариант 4.

Прямоугольная пластина вращается вокруг оси по закону $\varphi(t) = 15t - 3t^3$. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунке дуговой стрелкой. Ось вращения OO1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве. По пластине вдоль прямой BD движется точка М, закон ее относительного движения $s = AM = 60(t - t^3) + 24$ (s –в сантиметрах, t – в секундах). На рисунке точка М показана в положении, при котором s=AM>0 (при s<0 точка М находится по другую сторону от точки А). b=8 см.

Найти абсолютную скорость и ускорение точки М в момент времени t=1 с.

Вариант 5.

Круглая пластина радиуса R=60 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 6t^2 - 3t^3$. Положительное направление угла φ показано на рисунке дуговой стрелкой. Ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку О (пластина вращается в своей плоскости). По окружности радиуса R движется точка М. Закон ее движения по дуге окружности s=$\cup$AM=$\frac{\pi}{2}R\left(t - 2t^2\right)$. На рисунке точка М показана в положении, когда s положительно, при s отрицательном точка M находится по другую сторону от точки A. $L = \frac{4}{3}R$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t=1 с.

Вариант 6

Круглая пластина радиуса R=60 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = t^2 - 2t^3$. Положительное направление угла φ показано на рисунке дуговой стрелкой. Ось вращения OO1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве). По окружности радиуса R движется точка M. Закон ее движения по дуге окружности s=$\cup$AM=$\frac{\pi}{6}R\left(3t - t^2\right)$. На рисунке точка M показана в положении, когда s положительно, при s отрицательном точка M находится по другую сторону от точки A. L=R.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t=1 с.

Вариант 7

Прямоугольная пластина вращается вокруг оси по закону $\varphi(t) = 3t^2 - 8t$. Положительное направление отсчета угла φпоказано на рисунке угловой стрелкой. Ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O. По стороне пластины движется точка M, закон ее относительного движения $s = AM = 40(3t^2 - t^4) - 32$ (s –в сантиметрах, t – в секундах). На рисунке точка M показана в положении, при котором s=AM>0 (при s<0 точка M находится по другую сторону от точки A). b=16 см.

Найти абсолютную скорость и ускорение точки M в момент времени t1=1 с.

Вариант 8

Прямоугольная пластина вращается вокруг оси по закону $\varphi(t) = 3t^2 - 8t$. Положительное направление отсчета угла φпоказано на рисунке угловой стрелкой. Ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O. По стороне пластины движется точка M, закон ее относительного движения $s = AM = 40(3t^2 - t^4) - 32$ (s –в сантиметрах, t – в секундах). На рисунке точка M показана в положении, при котором s=AM>0 (при s<0 точка M находится по другую сторону от точки A). b=16 см.

Найти абсолютную скорость и ускорение точки M в момент времени t1=1 с.

Задача 9

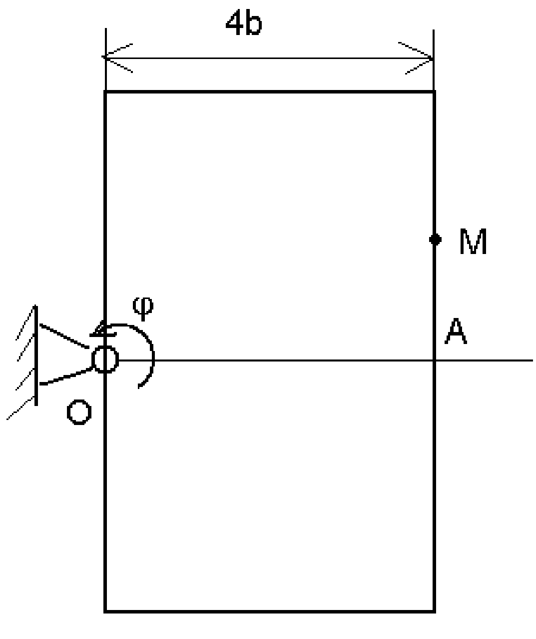
Прямоугольная пластина вращается вокруг оси по закону $\varphi(t) = 5t - 4t^2$. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунке дуговой стрелкой. Ось вращения ОО1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве). По пластине вдоль прямой BD движется точка М, закон ее относительного движения $s = AM = 40(t^2 - 3t) + 32$ (s –в сантиметрах, t – в секундах). На рисунке точка М показана в положении, при котором s=AM>0 (при s<0 точка М находится по другую сторону от точки А). b=12 см.

Найти абсолютную скорость и ускорение точки М в момент времени t=1 с.

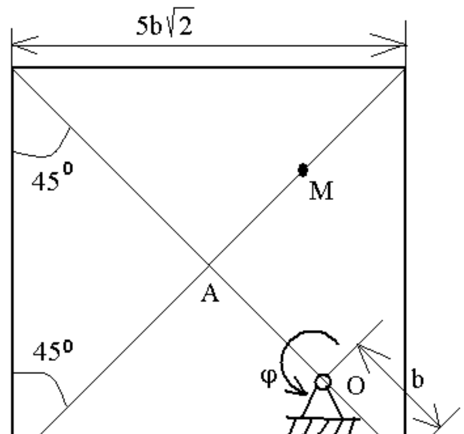
Вариант 10.

Круглая пластина радиуса R=60 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 6t^2 - 3t^3$. Положительное направление угла φ показано на рисунке дуговой стрелкой. Ось вращения ОО1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве). По окружности радиуса R движется точка М. Закон ее движения по дуге окружности s=$\cup$AM=$\frac{\pi}{2}R\left(t - 2t^2\right)$. На рисунке точка М показана в положении, когда s положительно, при s отрицательном точка М находится по другую сторону от точки А. L=$\frac{4}{3}$R.

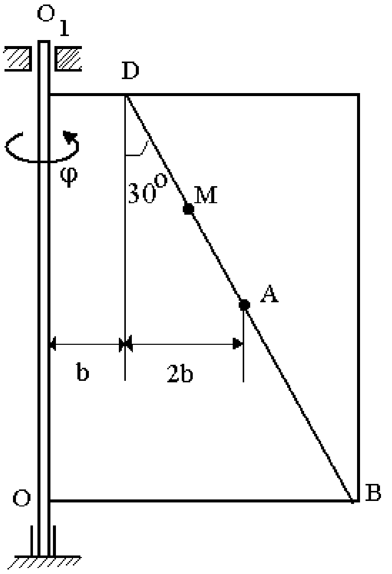
Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент времени t=1 с.



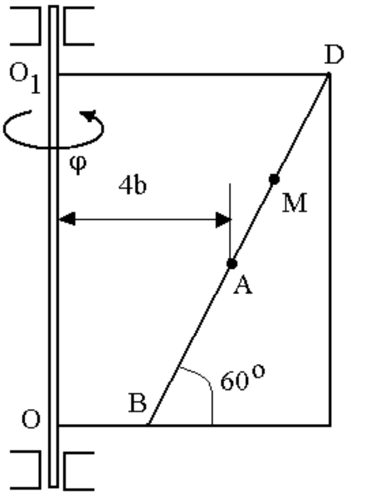
Вариант 1



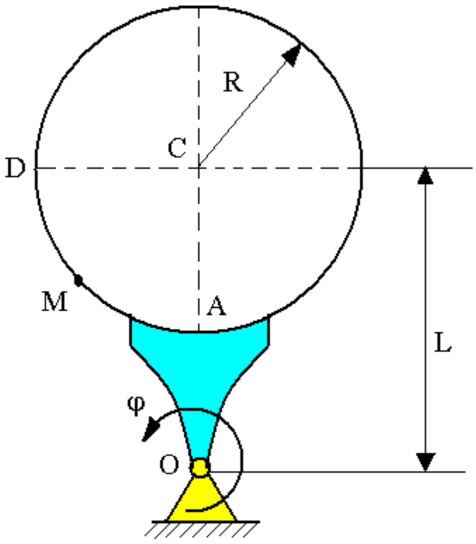
Вариант 2



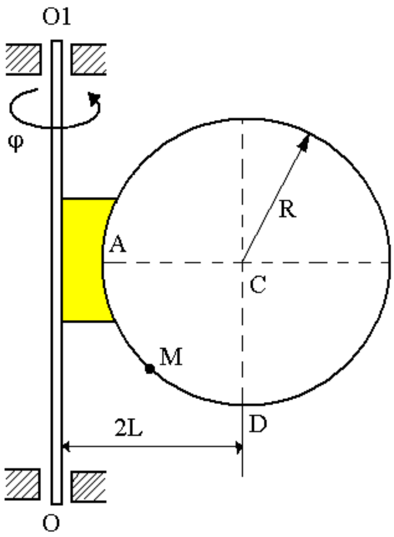
Вариант 3



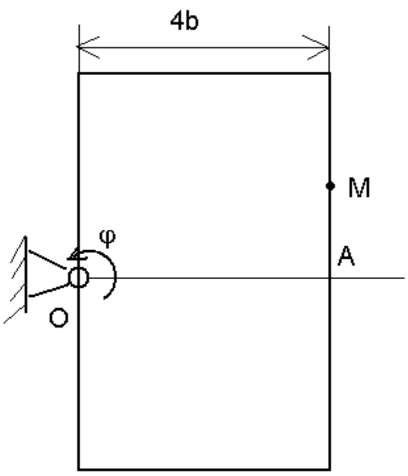
Вариант 4



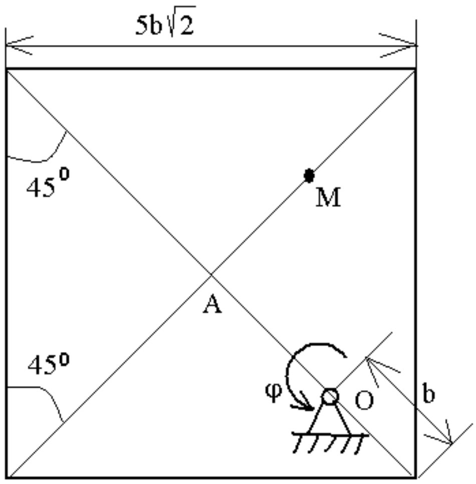
Вариант 5



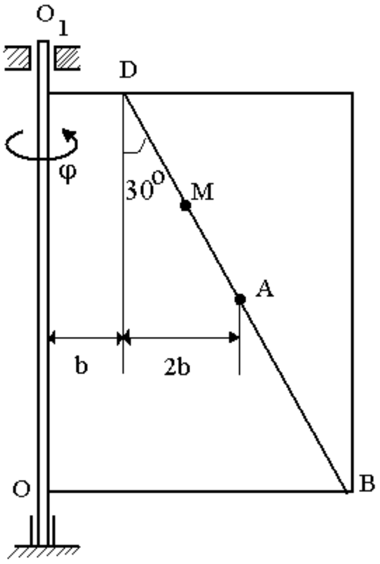
Вариант 6



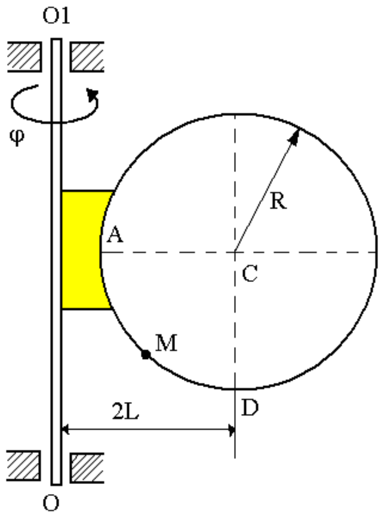
Вариант 7



Вариант 8



Задача 9



Вариант 10.

Рисунки к задаче К2

Задача Д1

Вариант 1

Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB, наклоненного под углом α =20^0 к горизонту и имеющего длину L, со скоростью V_A . Коэффициент скольжения лыж на участке AB равен μ =0,1. Лыжник от A до B движется в течение τ =0,2 сек. В точке B он покидает трамплин. Через T секунд лыжник приземляется в точке C горы, составляющей угол β = 30^0 с горизонтом. Высота h=40 м.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха. Принять $g = 9{,}8\ ^{м}\!/_{c^2}$

Определить L и скорость в точке C.

Вариант 2

Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB, наклоненного под углом α =15^0 к горизонту и имеющего длину L=5 м, со скоростью V_A=16 м/с . Коэффициент скольжения лыж на участке AB равен μ =0,1. Лыжник от A до B движется в течение τ сек. В точке B он покидает трамплин. Через T секунд лыжник приземляется в точке C горы, составляющей угол β = 45^0 с горизонтом.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха. Принять $g = 9{,}8\ м/с^2$

Определить Т и скорость в точке В.

Вариант 3

Лыжник подходит к точке А участка трамплина АВ, наклоненного под углом α =15^0 к горизонту и имеющего длину L, со скоростью V_A. Коэффициент скольжения лыж на участке АВ равен μ =0,1. Лыжник от А до В движется в течение τ =0,3 сек. В точке В он покидает трамплин. Через Т секунд лыжник приземляется в точке С горы, составляющей угол β = 45^0 с горизонтом. Расстояние ВС равно 60 м.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха. При расчетах принять $g = 9{,}8\ м/с^2$

Определить скорости в точках А и В.

Вариант 4

Имея в точке А скорость V_A =0, мотоцикл поднимается τ = 20 секунд по участку АВ длиной L, составляющему с горизонтом угол α . При постоянной на всем участке АВ силе тяги мотора Р , мотоцикл в точке В приобретает скорость V_B и перелетает через ров шириной d = 3 м, находясь в воздуха Т секунд и приземляясь в точке С . Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m= 400 кг. h=1,5 м $\alpha = 30^o$ Принять $g = 9.8\frac{м}{с^2}$.

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать сил сопротивления движению.

Определить Р и L.

Вариант 5

Имея в точке А скорость V_A =0, мотоцикл поднимается τ секунд по участку АВ длиной L= 40 м, составляющему с горизонтом угол α = 30^0. При постоянной на всем участке АВ силе тяги мотора Р = 2,2 кН , мотоцикл в точке В приобретает скорость V_B и перелетает через ров шириной d= 5 м, находясь в воздуха Т секунд и приземляясь в точке С со скоростью V_C. Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m = 400 кг.

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать сил сопротивления движению. Принять $g = 9{,}8\ м/с^2$.

Определить скорости в точках В и С.

Вариант 6

Имея в точке А скорость V_A =0, мотоцикл поднимается τ секунд по участку АВ длиной L = 50 м, составляющему с горизонтом угол α = 30^0. При постоянной на всем участке АВ силе тяги мотора Р = 2 кН , мотоцикл в точке В приобретает скорость V_B и перелетает через ров шириной d = 4 м, находясь в воздуха Т секунд и приземляясь в точке С со скоростью V_C. Высота h= 2 м. Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m.

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать сил сопротивления движению. Принять $g = 9{,}8\ ^{м}/_{с^2}$.

Определить Т и m.

Вариант 7

Камень скользит в течение τ сек по участку АВ откоса, составляющему угол α = 30^0 с горизонтом и имеющему длину L = 3 м. Его начальная скорость V_A = 1 м/с. Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен μ = 0,2. Имея в точке В скорость V_B , камень через Т сек ударяется в точке С о вертикальную защитную стену. Расстояние d = 2,5 м. При решении задачи принять камень за материальную точку, сопротивление воздуха не учитывать, $g = 9{,}8\ ^{м}/_{с^2}$.

Определить h и T.

Вариант 8

Камень скользит в течение τ = 1 сек по участку АВ откоса, составляющему угол α = 45^0 с горизонтом и имеющему длину L = 6 м. Его начальная скорость V_A . Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен μ. Имея в точке В скорость V_B = $2V_A$, камень через Т сек ударяется в точке С о вертикальную защитную стену h = 6 м. При решении задачи принять камень за материальную точку, сопротивление воздуха не учитывать.

Определить d и μ

Вариант 9

Камень скользит в течение τ сек по участку АВ откоса, составляющему угол α = 30^0 с горизонтом и имеющему длину L = 2 м. Его начальная скорость V_A= 0. Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен μ = 0,1. Имея в точке В скорость V_B , камень через Т сек ударяется в точке С о вертикальную защитную стену. Расстояние d = 3 м. При решении задачи принять камень за материальную точку, сопротивление воздуха не учитывать. Принять $g = 9{,}8\ ^{м}\!/_{с^2}$.

Определить h и τ .

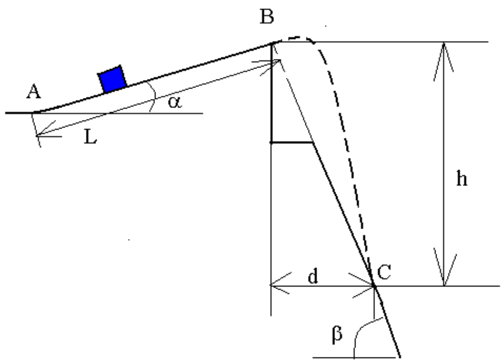
Вариант 10

Тело движется из точки A по участку AB длиной L наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15^0$ с горизонтом в течение τ секунд. Начальная скорость $V_A = 2$ м/с. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен $\mu = 0{,}2$.

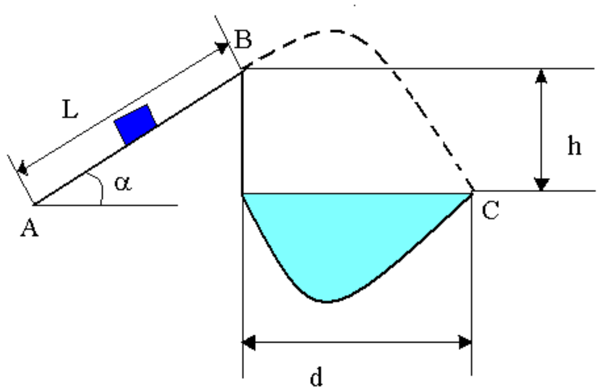
В точке B тело покидает плоскость и попадает в точку C плоскости BC, наклоненной под углом $\beta = 45^0$ к горизонту. Время падения T, высота h= 4 м.

При решении задачи принять тело за материальную точку, сопротивление воздуха не учитывать. При расчетах принять $g = 9{,}8\ ^{м}\!/_{с^2}$.

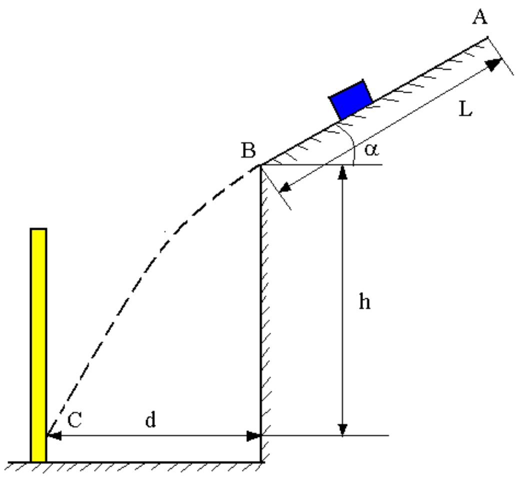
Определить L и T.



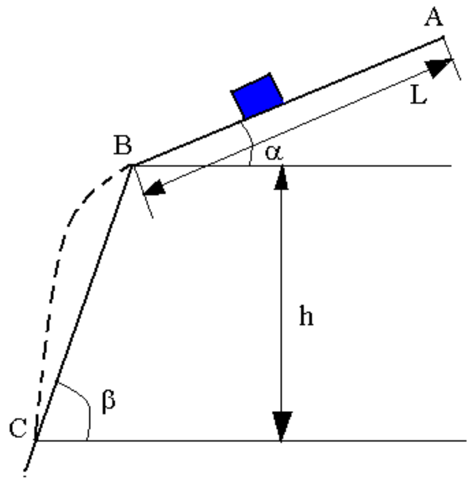
Варианты 1-3



Варианты 4-6



Варианты 7-9



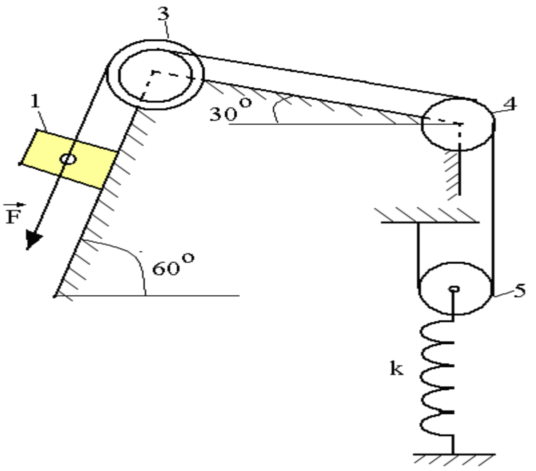
Вариант 10

Рисунки к задаче Д1

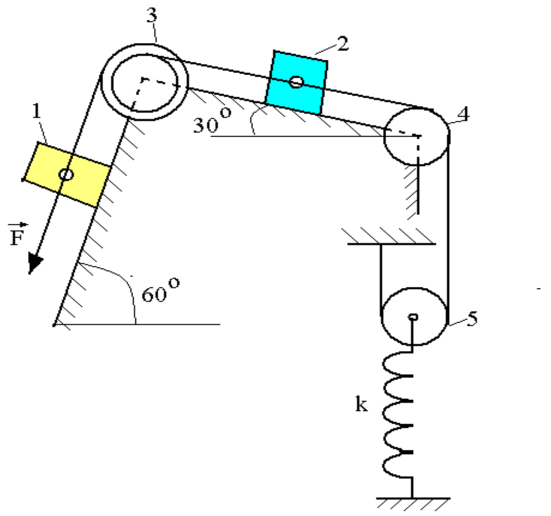
Задача Д2

Механическая система состоит из нескольких тел. Их массы приведены в таблице. Ступенчатый шкив 3 имеет радиусы ступеней R_3=0,3 м, r_3=0,1 м и радиус инерции 0,2 м. Масса блока 4 радиуса R_4=0,2 м равномерно распределена по ободу. Тела системы соединены друг с другом нитями. Коэффициент трения грузов о плоскость μ=0,1. Под действием силы F(s), зависящей от перемещения s первого груза, система приходит в движение из состояния покоя. Деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент М сил сопротивления (от трения в подшипниках). Найти скорость первого груза в тот момент времени, когда его перемещение s=0,2 м.

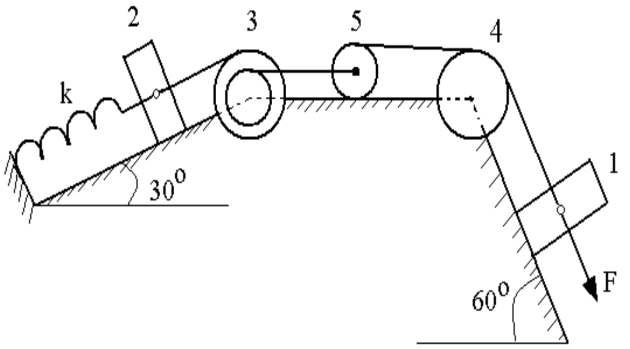
Вариант	Масса, кг					М, Нм	F(s), Н	k, Дж/м
	1	2	3	4	5			
1	8	–	0	4	6	6	50(8+3s)	3600
2	0	4	6	0	5	7	60(6+5s)	2400
3	0	5	0	6	4	8	50(7+8s)	200
4	8	–	5	0	6	4	40(8+9s)	280
5	0	4	0	6	5	7	60(8+5s)	300
6	0	5	6	0	4	8	80(6+7s)	280
7	0	6	4	0	5	6	80(4+5s)	200
8	0	4	6	0	5	3	60(5+4s)	1000
9	8	–	0	4	6	12	50(8+3s)	3600
10	0	6	4	0	5	20	80(4+5s)	200

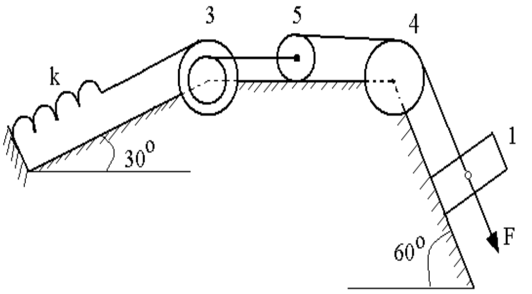


Вариант 1

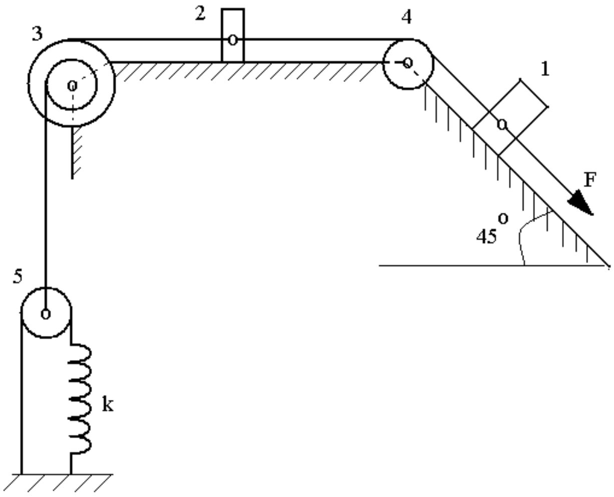


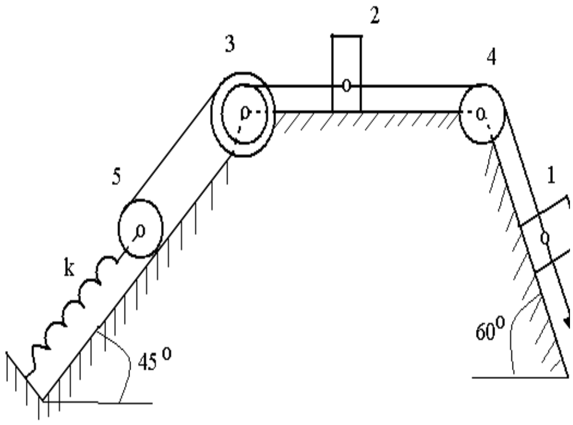
Вариант 2



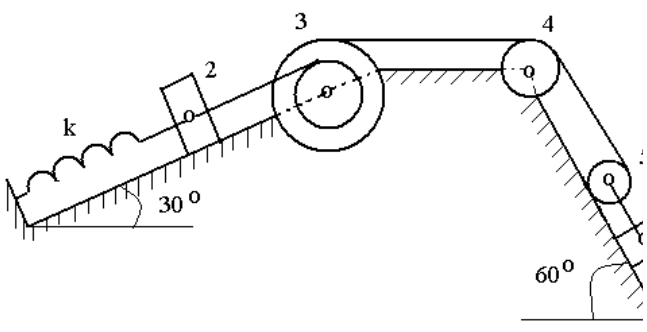


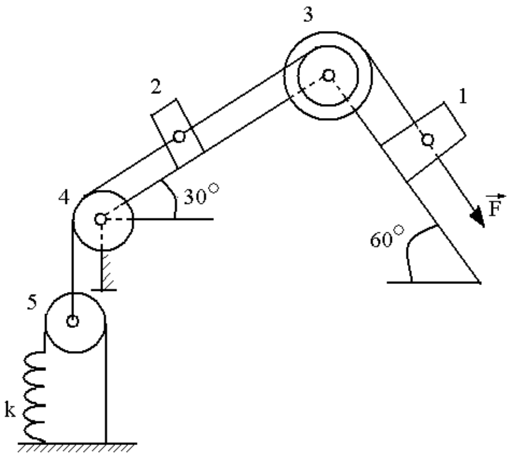
Вариант 3 *Вариант 4*





Вариант 5 *Варианты 6 и 7*





Варианты 8 и 9 *Вариант 10*

Рисунок к задаче Д2

5. Демонстрационный тест для входного контроля

№ 1

Сила обозначается символом

1) $\bar{f}$ 2) $\bar{k}$ 3) $\overline{F}$ 4) $\bar{l}$

№ 2

Третий закон Ньютона:

1) $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$ 2) $\overline{F} = -m\overline{a}$ 3) $\overline{F} = m\overline{a}$ 4) $\overline{F} = m\overline{g}$

№ 3

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы определяется следующей формулой:

1) $T_k + T_0 = -A^e$ 2) $T_k + T_0 - A^e = 0$ 3) $T_k - T_0 = A^e$ 4) $T_k - T_0 = S$

№ 4

Тело, брошенное под углом к горизонту, упало на землю на расстоянии 10 м от точки бросания. Максимальная высота подъема над землей в процессе движения составила 5 м. Модуль перемещения тела от точки бросания до точки падения на землю равен:

1) 5 м 2) 10 м 3) $5\sqrt{10}$ м 4) $10\sqrt{5}$ м

№ 5

Равнодействующей системы сил называется:

1) сила, модуль которой равен сумме модулей данной системы
2) сила, равная векторной сумме всех сил данной системы
3) сила, неэквивалентная данной системе сил
4) сила, уравновешивающая данную систему сил
5) сила, из этой же системы сил, равная сумме остальных сил этой системы

№ 6

Дифференциальное уравнение материальной точки в векторной форме определяется следующей формулой:

1) $m\ddot{Z} = \vec{F}$ 2) $m\ddot{Y} = F_{kX}$ 3) $m\dfrac{dV}{dt} = \sum F_K$ 4) $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{K=1}^{n} \vec{F}_K$

№ 7

Тело массой 2 кг приобретает под действием некоторой силы ускорение 2 м/с^2. Какое ускорение приобретает под действием этой силы тело массой 5 кг?
1) 1 м/с^2 2) 0,8 м/с^2 2) 0,5 м/с^2. 4) 0,2 м/с^2

№ 8

Железнодорожный вагон массой m, движущийся со скоростью v, сталкивается с неподвижным вагоном массой 2m и сцепляется с ним. Каким суммарным импульсом обладают два вагона после столкновения?

1) 0 2) mv 2) 2mv 4) 3mv

№ 9

Автомобиль движется со скоростью 10 м/с. С какой скоростью он должен двигаться для того, чтобы его кинетическая энергия увеличилась вдвое?

1) 40 м/с; 2) 20 м/с; 3) 5 м/с 4) $10\sqrt{2}$

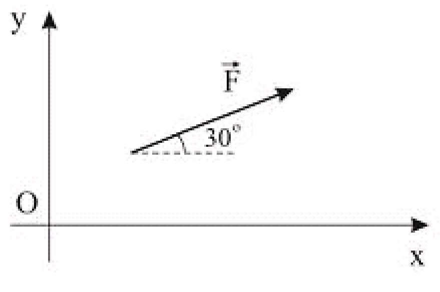
№ 10

Механика состоит из следующих разделов**:**

1) статика, динамика, механооптика
2) статика, кинематика, электромеханика
3) электромеханика, динамика, статика
4) статика, кинематика, динамика

6. Демонстрационный итоговый тест

№ 1

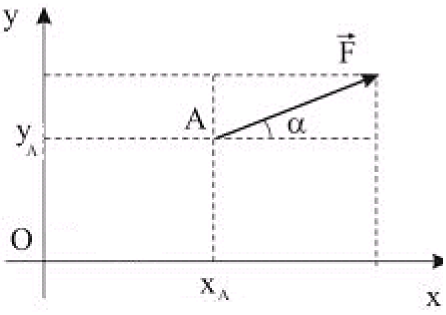


Дано: $|\vec{F}| = 12\sqrt{3}$ кН

Проекция силы на ось равна…

1)14 кН 2) 18 кН 3)12 кН 4)16 кН

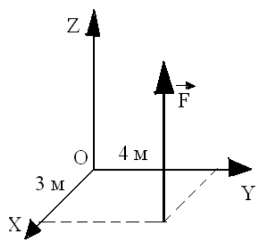
№ 2



В точке A, координаты которой $x_A = 1$ м и $y_A = 2$ м, приложена сила $\vec{F}$, заданная своими проекциями на оси координат: $F_x = 3$ кН и $F_y = 4$ кН. Момент силы относительно центра O равен ..

1) -3 кНм 2) -2 кНм 3) -4 кНм 4) -1 кНм

№ 3

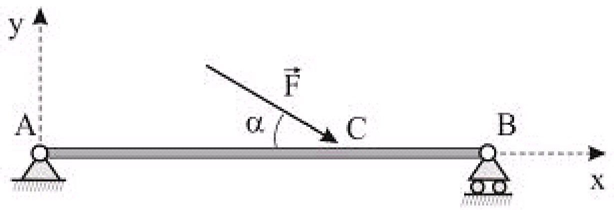


Если сила F, равная 2 Н, направлена вдоль оси OZ, то ее момент относительно оси OX равен ….

1) 0 2) 6 Нм 3) 8 Нм 4) 10 Нм

№ 4

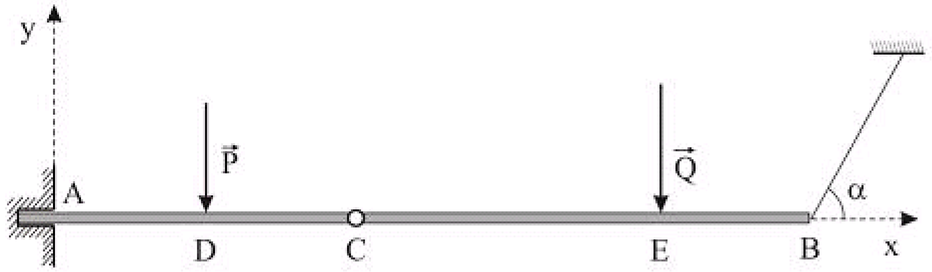
Дано: $F = 60\sqrt{2}$ кН, $\alpha = 45^0$; $AC = 2$ м; $BC = 1$ м. Проекция но ось OY силы реакции шарнира B равна …



1) 25 кН 2) 35 кН 3) 30 кН 4) 40 кН

№ 5

Дано: $Q = 30$ кН; $P = 10$ кН; $\alpha = 60^0$; $AD = DC = BE = 1$ м; $CE = 2$ м.
Определить момент реакции заделки в точке A.

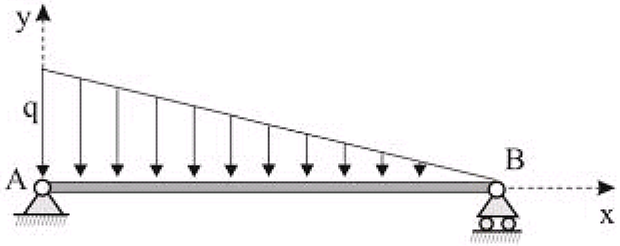


1) 15 кНм 2) 25 кНм 3) 30 кНм 4) 20 кНм

№ 6

Дано: q = 12 кН/м; AB = 3 м. Проекция на ось OY силы реакции шарнира A равна

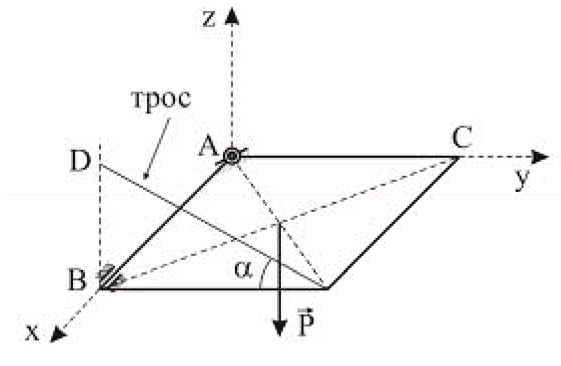
1) 18 кН 2) 12 кН 3) 9 кН 4) 15 кН



№ 7

Дано: $P = 9\sqrt{6}$ кН, α = 45^0. Натяжение троса равно…

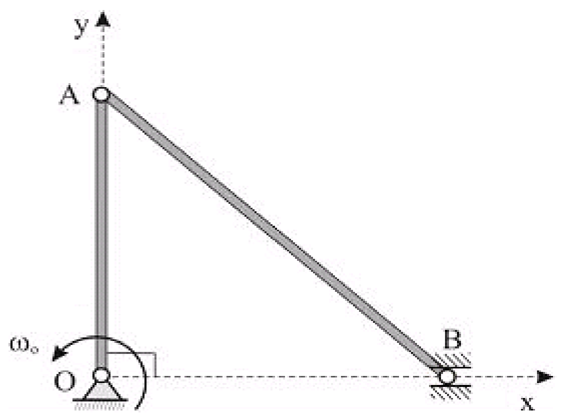
1) $12\sqrt{3}$ кН 2) $3\sqrt{3}$ кН 3) $6\sqrt{3}$ кН 4) $9\sqrt{3}$ кН



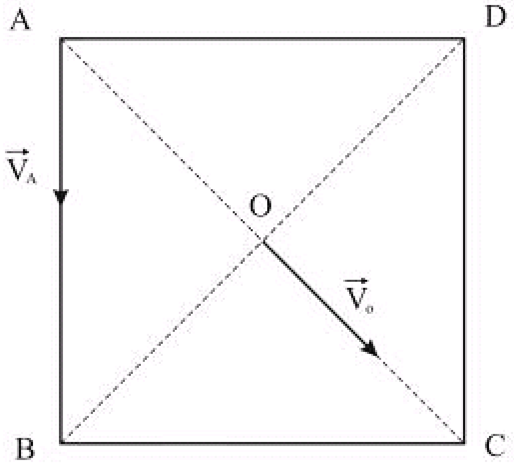
№ 8

Дано: Кривошип длины OA = 2 м имеет в данный момент времени угловую скорость $\omega_0 = 4$ рад / с, AB = 6 м. Скорость ползуна B равна …

1) 6 м / с 2) 7 м / с
3) 8 м / с 4) 5 м / с



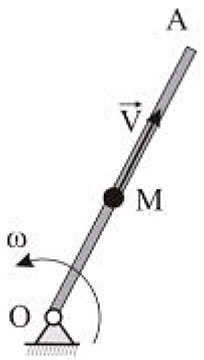
№ 9



Известны направления скоростей двух точек квадрата. Мгновенный центр скоростей находится в …

1) точке B 2) точке C
3) бесконечности 4) точке D

№ 10



Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω = рад / с. По кривошипу движется точка M с постоянной относительной скоростью V = 10 м / с. В тот момент времени, когда OM = $\sqrt{11}$ м, модуль абсолютной скорости точки M равен …

1) 12 м / с 2) 18 м / с 3) 16 м / с 4) 14 м / с

№ 11

Диск вращается вокруг оси шарнира. По ободу диска движется точка M. Направление ускорения Кориолиса точки M правильно показано на …

1) рис.1 2) рис. 2 3) рис. 3 4) рис. 4

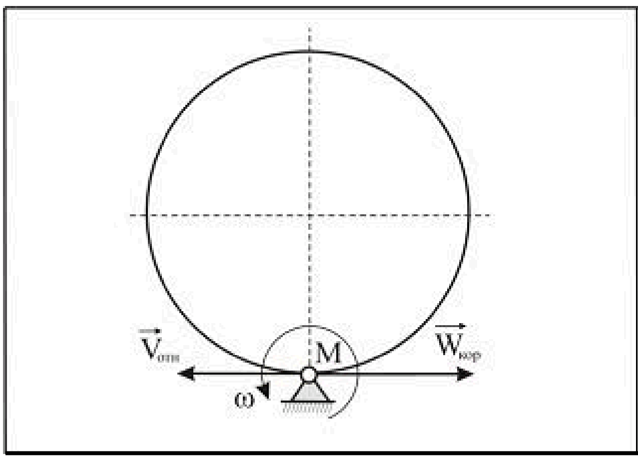


Рис. 1

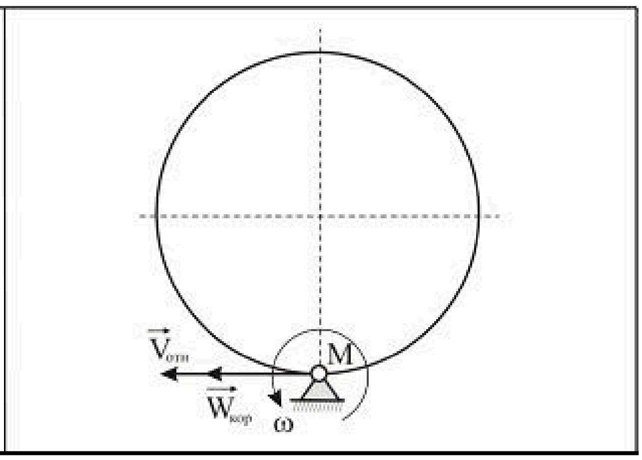


Рис. 2

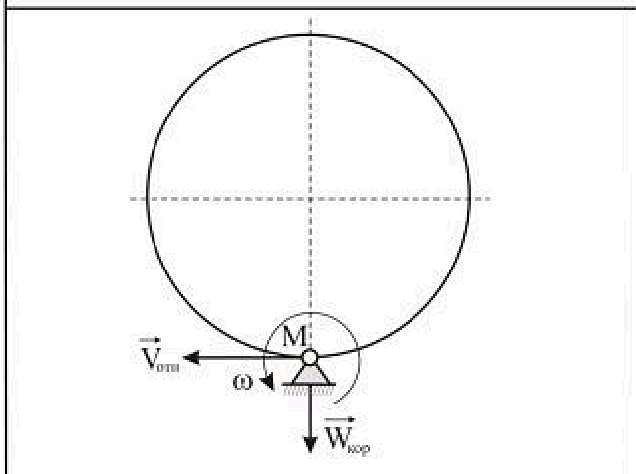


Рис. 3

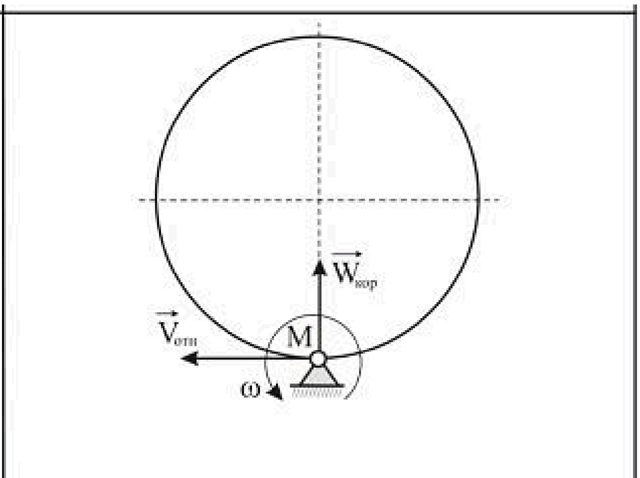
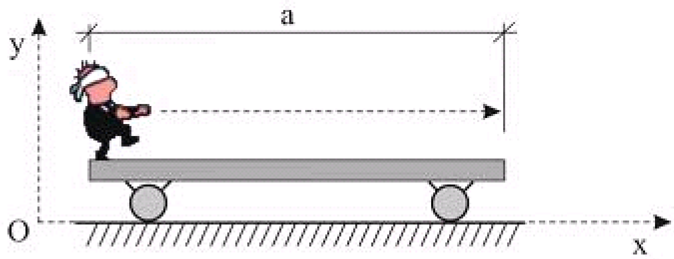


Рис. 4

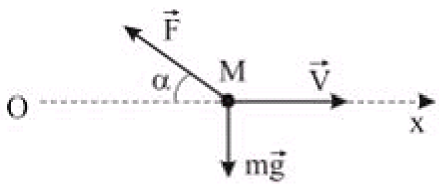
№ 12

Человек, масса которого m_2 = 60 кг, переходит с одного края платформы на другой. Масса платформы m_1 = 240 кг, длина a = 5 м. В начальный момент времени система покоилась. Сопротивление движению платформы не учитывается. Проекция перемещения платформы на ось ОХ равна…



1) 1,0 м 2) -1,4 м 3) 1,4 м 4) 1 м

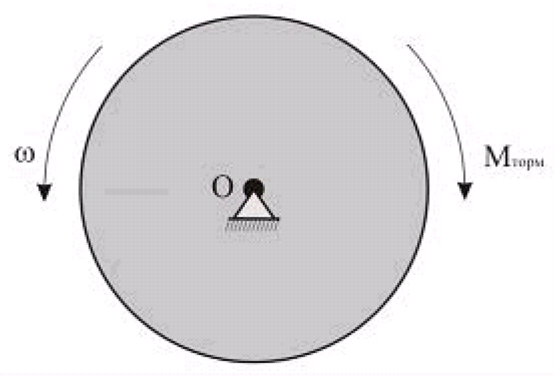
№ 13



Точка M массы m движется по горизонтальной прямой под действием силы $\vec{F}$ и силы тяжести. Дифференциальное уравнение движения имеет вид…

1) $m\frac{dV_x}{dt} = -F\cos\alpha$ 2) $m\frac{dV_x}{dt} = F\cos\alpha$ 3) $m\frac{dV_x}{dt} = -F\sin\alpha$ 4) $m\frac{dV_x}{dt} = mg + F\cos\alpha$

№ 14

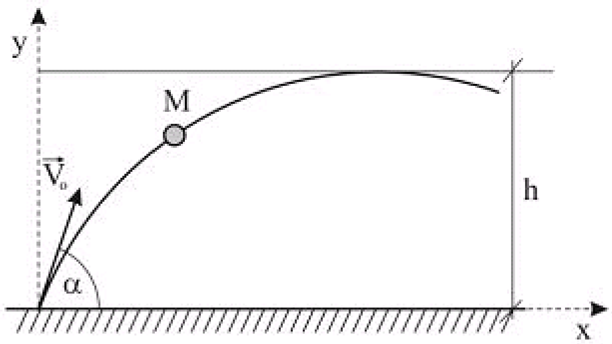


Маховик в момент включения тормоза имеет угловую скорость ω= 4 рад / с. Тормозящий момент постоянный и равен $M_{торм}$ = 10 Нм. Момент инерции маховика относительно оси вращения равен J = 20 кг м^2. До остановки маховика пройдет …

1) 6 с 2) 8 с 3) 5 с 4) 7 с

№ 15

Тело брошено с поверхности Земли под углом α = 30^0 к горизонту с начальной скоростью $V_0 = 4\sqrt{g}$ м / с. Сопротивление воздуха не учитывается. Максимальная высота, на которое поднимется тело, равна …



1) 1 м 2) 2 м 3) 3 м 4) 4 м

7. Библиографический список

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: В 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Изд-во «Лань», 1998. 736 с.

2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов / С. М. Тарг. – М.: Высшая школа, 1995. 416 с.

3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М.; СПб.: Изд-во «Лань», 2001. 768 с.

4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Статика и кинематика: учеб. пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – СПб: Политехника, 1995. 670 с.

5. Новожилов, И. В. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. / И. В. Новожилов, М. Ф. Зацепин. – М.: Высш. шк., 1986. 136 с.

6. Мартынов, А. Г. Определение опорных реакций составной балки с элементами оптимизации: метод. указания / сост. А. Г. Мартынов, Т. П. Мартынова. – Красноярск: КГТУ, 1997. 20 с.

7. Мартынов, А. Г. Кинематический расчет манипулятора: метод. указания / сост. А. Г. Мартынов, К. А. Редкоус. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2000. 26 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Ольга Геннадьевна Максимова
Андрей Владимирович Максимов
Яна Анатольевна Соловьева

**ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**

Учебное пособие

Редактор – И.Т. Куликова

Подписано в печать 15.05.2014. Формат 60 × 90/$_{16}$
Бумага писчая. Печать офсетная.
Усл.-п.л. 6,0. Тираж экз. Заказ №

Отпечатано: РИО, ВоГУ 160000, г. Вологда, ул. Ленина, 15