

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Вологодский государственный университет

Кафедра сопротивления материалов

## **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

Методические указания, контрольные задания и примеры расчета  
для студентов заочной формы обучения

Факультет: инженерно-строительный

Направление подготовки: 270800.62 - строительство

Вологда  
2014

УДК 539.3

**Строительная механика:** методические указания, контрольные задания и примеры расчета для студентов заочной формы обучения строительных специальностей. – Вологда: ВоГУ, 2014. – 36 с.

В методических указаниях даны общие указания по изучению тем программы: порядок выполнения контрольных работ, схемы и данные к задачам, рекомендованным для самостоятельного обучения студентов строительных специальностей, а также подробные примеры решения и оформления задач.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Составители: Комиссарова И.И., канд. техн. наук, доцент  
Шапкина В.А., канд. пед. наук, доцент

Рецензент: Михалевич Н.В., канд. техн. наук, доцент

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ О ПОРЯДКЕ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Каждый студент-заочник выполняет то количество контрольных работ, которое предусмотрено учебным графиком. Исходные данные для решения задач выбираются студентом из таблиц в соответствии с его личным учебным шифром (номером зачетной книжки). Шифром считаются три последние цифры номера зачетной книжки. Каждая таблица вариантов разделена на три части. Для получения исходных данных надо выписать из таблицы три строчки: одну, отвечающую первой цифре шифра, вторую, отвечающую второй (средней) цифре, третью, отвечающую последней – третьей цифре шифра.

### **Работы, выполненные не по шифру, возвращаются без рассмотрения.**

При оформлении работы следует записать условие задания с численными значениями параметров, вычертить заданную расчетную схему и указать на ней все размеры и нагрузки. Решение задачи должно сопровождаться краткими, последовательными пояснениями, четкими схемами со всеми размерами. Необходимые расчеты выполнять в десятичных дробях, оставляя две значащие цифры после запятой. Надо помнить, что язык техники – формулы и чертежи. Графическая часть работы должна быть оформлена в карандаше. Возможно оформление работ в компьютерном варианте.

Перед решением каждой задачи необходимо предварительно изучить соответственный теоретический материал курса. После изучения каждой темы надо обязательно ответить на вопросы для самопроверки; это способствует лучшему усвоению пройденного материала. До сдачи зачета или экзамена необходимо выполнить все контрольные работы, предусмотренные учебным графиком.

Несамостоятельное выполнение контрольных работ не дает возможности преподавателю-рецензенту вовремя заметить недочеты в подготовке студента, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и оказывается неподготовленным к экзамену.

Получив после рецензирования (очного и заочного) контрольную работу, студент обязан выполнить все указанные преподавателем исправления и дополнения. Окончательно вопрос о зачете задания решается после собеседования преподавателя со студентом.

# РАБОТА 1.

## Расчет статически определимой многопролетной балки

*Задание.* Для балки, выбранной согласно варианту (рис.1), требуется построить эпюры изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$  (аналитически).

Исходные данные выбираются в соответствии с шифром из табл.1.

*Таблица 1*

Первая цифра шифра	$l_1$ , м	$q$ кН/м	$b$ м	Вторая цифра шифра	$l_2$ м	$F$ кН	№ сечений	Последняя цифра шифра (№ схемы)	$a$ м	$c$ м	$M$ кНм
1	10	12	5	1	8	12	1,2	1	1	4	2
2	14	8	6	2	7	15	2,3	2	1	2	3
3	8	18	2	3	9	16	3,4	3	2	3	6
4	12	10	4	4	6	18	4,1	4	2	3	4
5	9	15	3	5	11	17	1,3	5	1	2	10
6	11	22	5	6	10	10	2,4	6	2	2	8
7	7	14	2	7	12	15	3,1	7	1	4	2
8	6	10	1	8	15	18	4,3	8	2	5	3
9	5	22	2	9	14	14	1,4	9	3	4	5
0	13	12	5	0	14	13	3,2	0	1	2	7

### *Методические указания:*

Расчет многопролетной балки следует начинать с построения этажной схемы. Для этого мысленно удаляют соединительные шарниры, при этом балка распадается на простые элементы (основные и вспомогательные балки). Основными балками будут считаться те, которые после удаления шарниров останутся без изменений. Это балки на двух опорах или с жесткой заделкой (  ). Они располагаются на нижнем этаже. Вспомогательные балки – те, которые после удаления шарниров остаются на одной опоре или, вообще, без опор (  ). Данные балки располагаются выше и опираются на нижележащий этаж с помощью дополнительных опор.

Расчет ведется с верхнего этажа. Для верхней балки определяются реакции и строятся эпюры поперечной силы и изгибающего момента.

Далее рассчитываются нижележащие этажи. При этом нагрузка с верхнего этажа на нижний передается через реакцию в соответствующей опоре с обратным знаком.

После расчетов всех этажей построенные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов соединяются по одной линии.

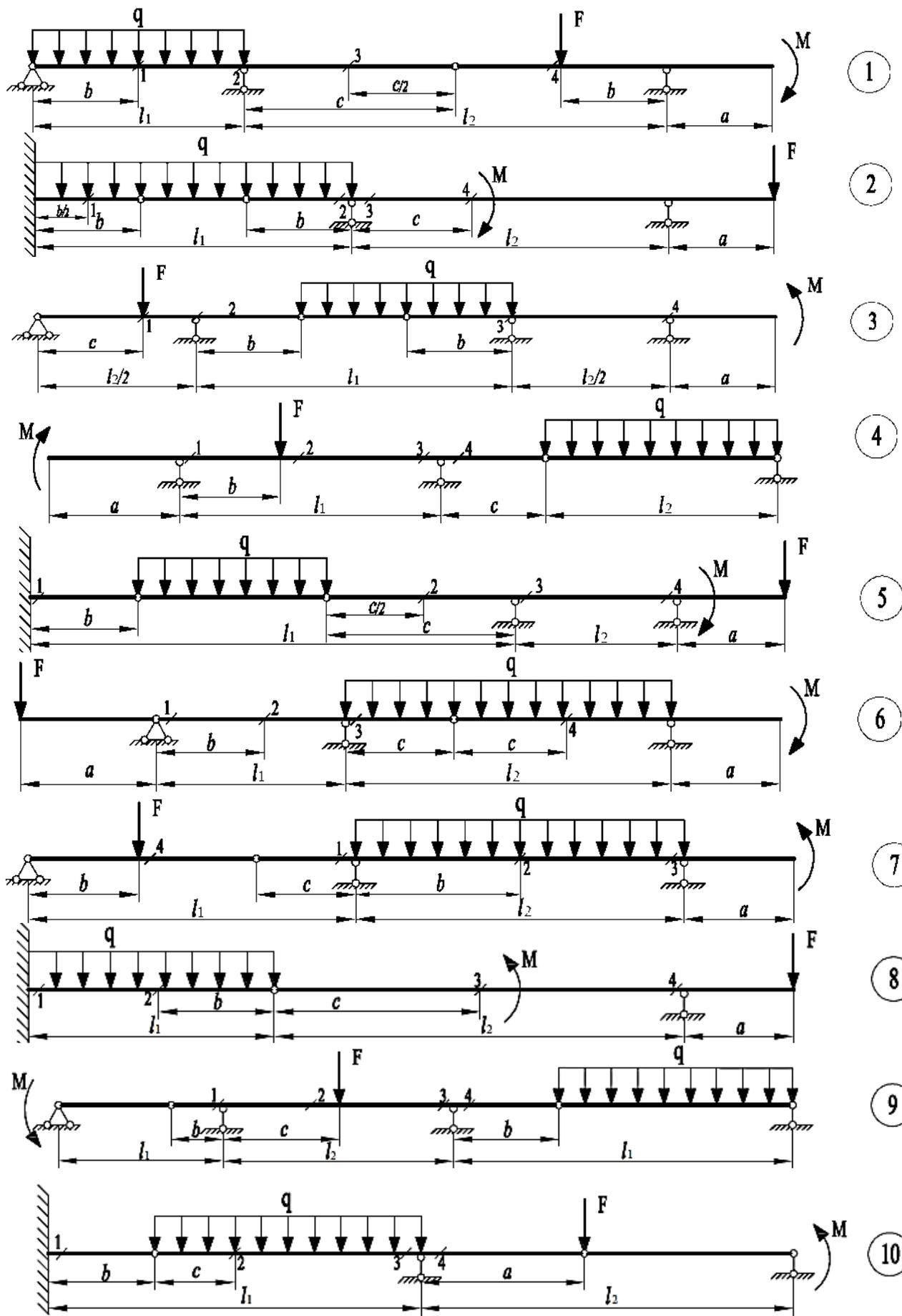


Рис.1

## РАБОТА 2

### Расчет статически определимой балки с помощью линий влияния

**Задание.** Для балки, выбранной согласно варианту (рис.1), требуется:

1. Построить линию влияния опорной реакции (по выбору студента),
2. Построить линии влияния изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$  в указанных сечениях
3. Вычислить по линиям влияния значения реакции, изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$
4. Сравнить результаты вычислений с результатами работы 1 и сделать выводы

Исходные данные выбираются в соответствии с шифром из табл.1.

#### Методические указания:

Линией влияния в балке называется график, показывающий изменение исследуемого фактора при движении по балке единичной силы.

Любая ордината линии влияния показывает величину исследуемого фактора в тот момент, когда сила находится над этой ординатой.

**Статический способ** построения линий влияния в балках основан на составлении уравнений статики (уравнений равновесия). Рассмотрим простую балку на двух шарнирных опорах (рис.2).

1. Построение линии влияния реакции  $R_A$ .

Составим уравнение моментов вокруг опоры  $B$ .  $\sum M_B = 0$ ;

$$R_A \cdot l - \bar{F} \cdot (l - z) = 0;$$

$$R_A = \frac{\bar{F} \cdot (l - z)}{l} = \frac{l - z}{l}.$$

Получаем аналитическое выражение для реакции  $R_A$ .

Строим график по 2-м точкам.

$$z = 0 \quad R_A = 1, \quad z = l \quad R_A = \frac{l - l}{l} = 0$$

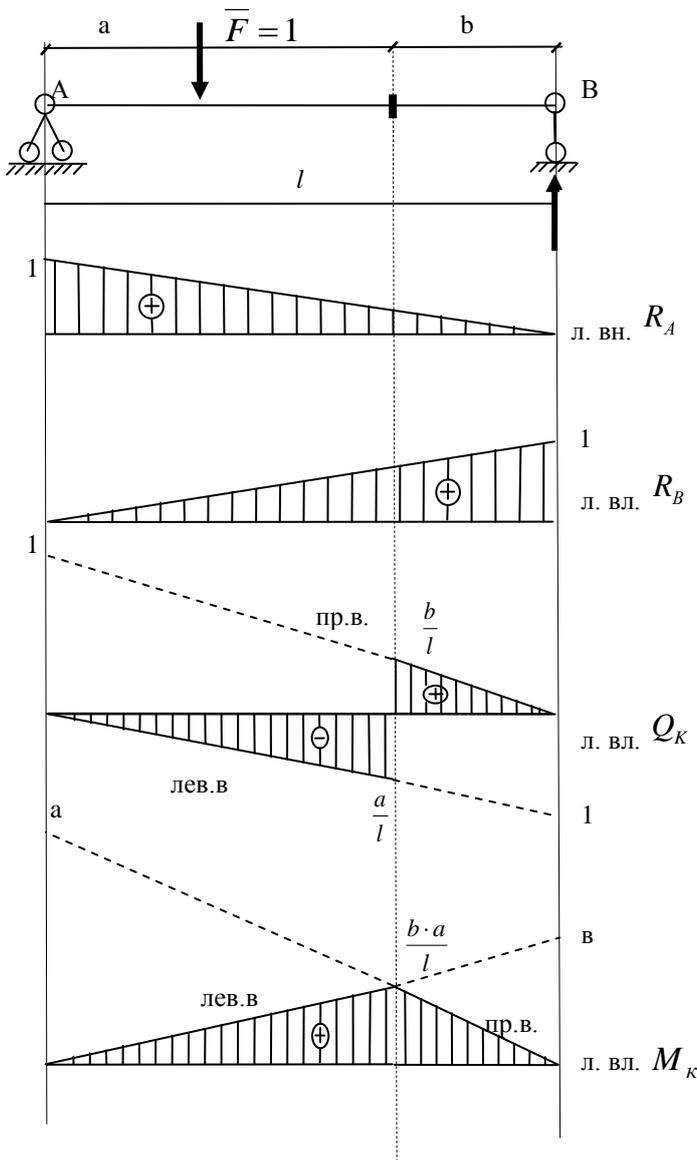


Рис.2

2. Аналогично строится линия влияния реакции  $R_B$ . Составим уравнение моментов вокруг опоры  $A$ .  $\sum M_A = 0, \bar{F} \cdot z - R_B \cdot l = 0, R_B = \frac{z}{l}$ . Получаем аналитическое выражение для реакции  $R_B$ . Строим график

по 2-м точкам:  $z=0 \quad R_B=0, \quad z=l \quad R_B=1$ .

3. Построим линию влияния поперечной силы  $Q_K$ .

Возьмем произвольное сечение  $k$ , находящееся на расстоянии  $a$  от опоры  $A$ . Рассмотрим два положения силы  $\bar{F} = 1$ .

a) сила  $\bar{F} = 1$  находится слева от точки сечения  $K$ , тогда  $Q_K^{np} = -R_B$ . Это значит, что линия влияния  $Q_K$  повторит линию влияния  $R_B$ , но с отрицательным знаком. Справедлива эта линия влияния, когда сила находится левее от точки  $k$ , значит, мы получаем левую ветвь линии влияния;

b) сила  $\bar{F} = 1$  справа от сечения  $K$ , тогда  $Q_K^{лев} = R_A$ . Это значит, что линия влияния  $Q_K$ , повторит линию влияния  $R_A$ . Справедлива эта линия влияния, когда сила находится справа от точки  $k$ , значит, мы получаем правую ветвь линии влияния.

4. Построим линию влияния изгибающего момента  $M_K$  - ?

a) сила  $\bar{F} = 1$  находится слева от точки сечения  $K$ , тогда  $\sum M_K^{np} = R_B b$ . Это значит, что линия влияния  $M_K$  повторит линию влияния  $R_B$ , но увеличенную в  $b$  раз. Справедлива эта линия влияния, когда сила находится левее от точки  $k$ ,

значит, мы получаем левую ветвь линии влияния;

b) сила  $\bar{F} = 1$  справа от сечения  $K$ , тогда  $\sum M_K^{лев} = R_A \cdot a$ .

Это значит, что линия влияния  $M_K$  повторит линию влияния  $R_A$ , но увеличенную в  $a$  раз. Справедлива эта линия влияния, когда сила находится справа от точки  $k$ , значит, мы получаем правую ветвь линии влияния.

**Кинематический способ построения линий влияния основан на принципе возможных перемещений:**

1) для того чтобы построить линию влияния реакции какой-нибудь опоры, нужно изобразить балку без этой опоры, дать данной точке возможное перемещение в

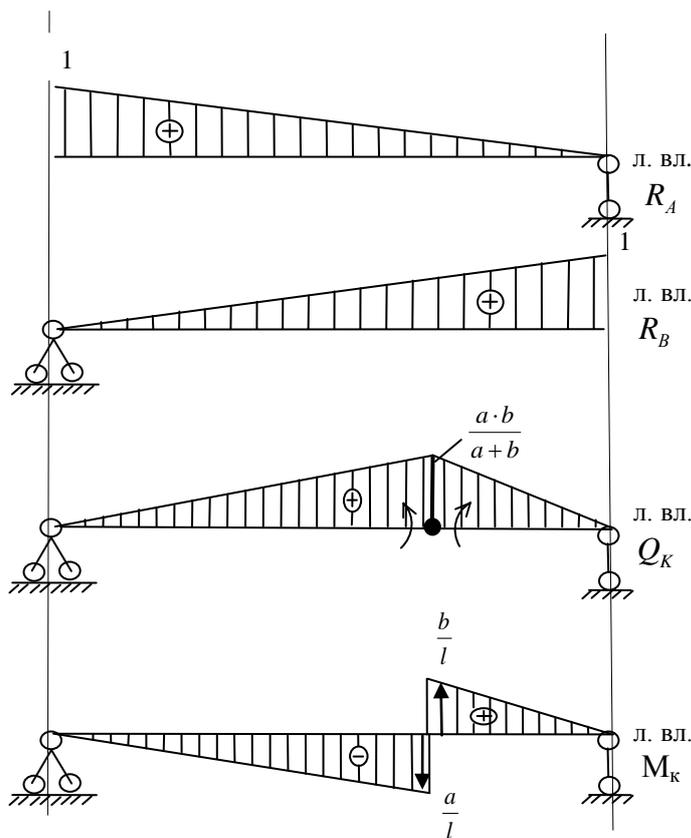


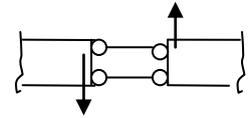
Рис.3

положительном направлении (вверх на единицу) и зарисовать новое положение полученного механизма;

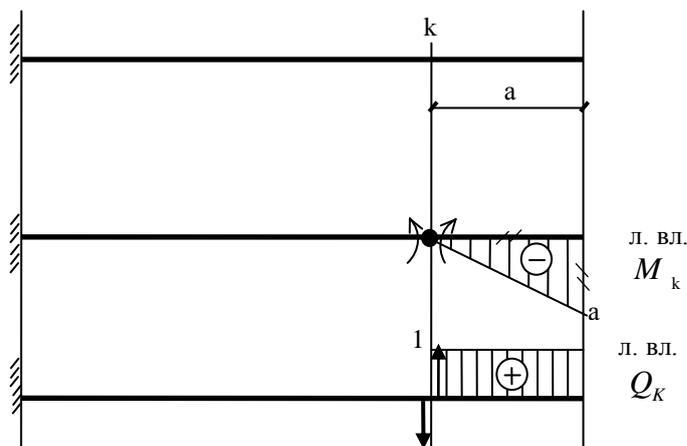
2) для того чтобы построить линию влияния изгибающего момента  $M_K$ , нужно в данное сечение врезать шарнир и повернуть полученный механизм в положительном направлении на единичный угол;



3) для того чтобы построить линию влияния поперечной силы  $Q_K$ , нужно в данное сечение врезать ползун и раздвинуть части балки в положительном направлении на единицу.



Построим линии влияния кинематическим методом в этой же балке (рис.3). Линии влияния получились такие же.



Построим линии влияния поперечной силы и изгибающего момента в консольной балке (рис.4) кинематическим способом. Так как левая часть в этой балке неподвижна, движется только правая часть в положительном направлении. При этом ордината линии влияния момента равна  $a$ , ордината линии влияния поперечной силы равна 1.

Рис. 4

С помощью линий влияния можно определить любые усилия по формуле

$$(R, Q, M) = \sum F_i Y_i + \sum q_i w_i + \sum M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i,$$

где сила считается положительной, если направлена вниз  $\downarrow F \oplus$ ,

$Y_i$  - ордината линии влияния под силой, берется со своим знаком,

нагрузка считается положительной, если направлена вниз  $\downarrow q_i \oplus$ ,

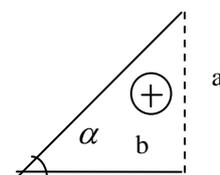
$w_i$  - площадь в линии влияния под нагрузкой, берется со своим знаком,

момент считается положительным, если направлен по часовой стрелке  $\curvearrowright M_i \oplus$ ,

$\operatorname{tg} \alpha$  - тангенс угла наклона линии влияния над моментом,

равный  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$  и считается положительным, если линия

влияния возрастает.



## РАБОТА 3

### Расчет простой плоской статически определимой фермы

*Задание.* Для фермы (рис.5) с выбранными по шифру из табл. 2 размерами и нагрузкой требуется определить (аналитически) усилия в стержнях заданной панели, включая правую и левую стойку (5 стержней). Таблица 2

Первая цифра шифра	$l, \text{ м}$	$F_1, \text{ кН}$	Вторая цифра шифра	№ панели (считая справа)	Последняя цифра шифра (№схемы)	$h, \text{ м}$
1	33	2	1	2	1	6
2	30	3	2	3	2	5
3	27	1	3	4	3	4
4	24	1	4	5	4	4
5	21	2	5	2	5	6
6	18	2	6	3	6	4
7	33	1	7	4	7	5
8	30	3	8	5	8	4
9	21	3	9	2	9	5
0	24	2	0	3	0	4

#### *Методические указания:*

Фермой называется конструкция, состоящая из стержней, соединённых между собой шарнирами, которые называются узлами фермы. Внешняя нагрузка на ферму передаётся через эти узлы. Каждый стержень в ферме находится в условиях простого осевого растяжения – сжатия, но общая деформация фермы – изгибная, то есть ферма работает на изгиб.

Пролет фермы - это расстояние между опорами. Расстояние между узлами фермы по горизонтали называется панелью фермы и обозначается  $d$ .

Выполнить расчет фермы, это значит, что в первую очередь нужно определить усилия в стержнях фермы. Общепринятые обозначения усилий в стержнях фермы:  $O$  – усилие в стержнях верхнего пояса,  $U$  – усилие в стержнях нижнего пояса,  $V$  – усилие в стойках,  $D$  – усилие в раскосах. Расчет фермы начинают с определения опорных реакций. Опорные реакции в ферме определяются как в простой балке, работающей на изгиб.

Для определения усилий в стержнях ферм существуют несколько способов. Рассмотрим некоторые из них:

а) *способ моментной точки.* Применяется, когда можно разрезать ферму на две части так, чтобы в разрез попало три стержня. Для нахождения усилия в одном из них необходимо найти точку пересечения двух других разрезанных стержней (моментная точка) и записать уравнение равновесия (сумма моментов всех сил вокруг этой точки) любой отсечённой части фермы.

б) *способ проекций.* Применяется, когда можно разрезать ферму на две части так, чтобы в разрез попало три стержня. При нахождении усилия в одном из них два других стержня оказываются параллельны (т.е. моментная точка

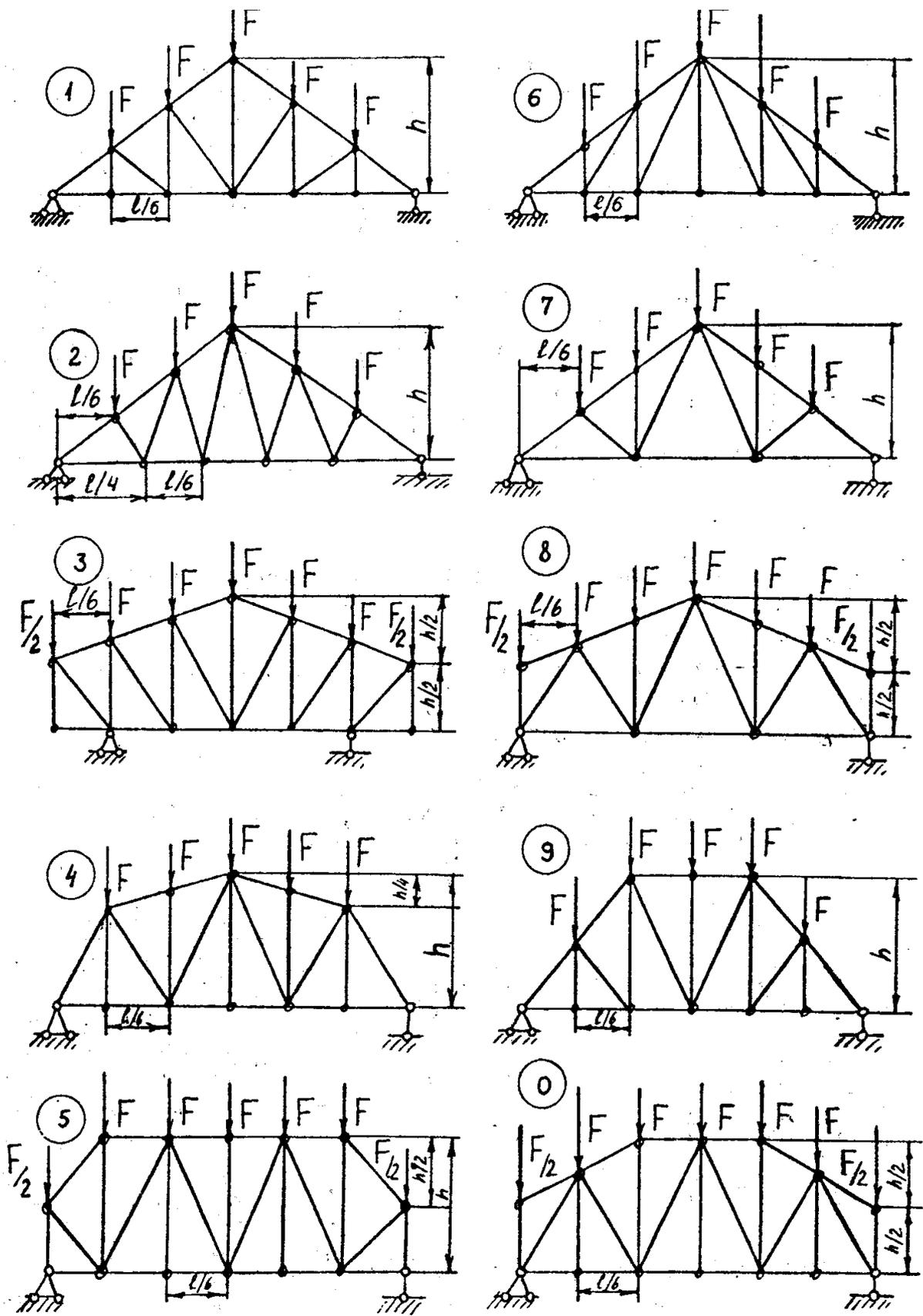


Рис.5

оказывается в бесконечности). Записывается сумма проекций сил на вертикальную ось у любой отсечённой части фермы. Способ проекций чаще всего применяется для нахождения усилий в раскосах или стойках фермы с параллельными поясами.

в) *способ вырезания узлов*. Применяется, когда два предыдущих способа неприменимы, т.е. нельзя провести сечение через три стержня. Данный способ заключается в вырезании узла, к которому принадлежит искомый стержень и рассмотрении равновесия этого узла.

## РАБОТА 4

### Расчет трехшарнирной арки или трехшарнирной рамы

*Задание.* Для сплошной трехшарнирной арки или рамы (рис.6) требуется определить аналитически моменты, поперечные и нормальные силы в сечениях  $K_1$  и  $K_2$  от действия постоянной нагрузки.

Исходные данные, согласно шифру, выбираются по табл.3.

Таблица 3

Первая цифра шифра	$l$ м	$\alpha$	$\beta_1$	Вторая цифра шифра	$\beta_2$	$q_1$ кН/м	$q_2$ кН/м	Последняя цифра шифра	Схема по рис.2	Очертание оси	$\frac{f}{l}$	F кН
1	26	0.20	0.20	1	0.65	0	4	1	а	Парабола	0.34	4
2	36	0.50	0.30	2	0.68	4	0	2	а	Окружность	0.35	3
3	18	0.30	0.22	3	0.70	0	5	3	б	Рама	0.39	5
4	28	0.60	0.25	4	0.72	5	0	4	в	Рама	0.40	6
5	20	0.40	0.15	5	0.80	0	6	5	г	Рама	0.32	7
6	32	0.70	0.40	6	0.84	6	0	6	а	Парабола	0.36	8
7	22	0.80	0.35	7	0.86	7	0	7	а	Окружность	0.38	2
8	34	0.25	0.12	8	0.75	0	7	8	б	Рама	0.33	5
9	24	0.35	0.33	9	0.85	8	0	9	в	Рама	0.30	8
0	39	0.45	0.45	0	0.90	0	8	0	г	Рама	0.31	4

#### Методические указания:

Расчет трехшарнирных арок следует начинать с определения реакций. Вертикальные составляющие реакций в арке  $R_A$  и  $R_B$  определяются так же, как в балке. Горизонтальные реакции  $H_A$ ,  $H_B$  (называемые распором) определяются из уравнений равновесия правой части арки или левой (сумма моментов) вокруг соединительного шарнира.

В поперечном сечении арки возникают продольная и поперечная силы и изгибающий момент. Для их определения необходимо составить уравнения равновесия любой отсеченной части арки (рис.7).

Для определения изгибающего момента:  $\sum M_K^{лев} = 0$ ,  
 $R_A \cdot X_K - F(X_K - X_F) - H \cdot Y_K - M_K = 0$ ,  $M_K = R_A \cdot X_K - F(X_K - X_F) - H \cdot Y_K$ .

Схема нагрузки

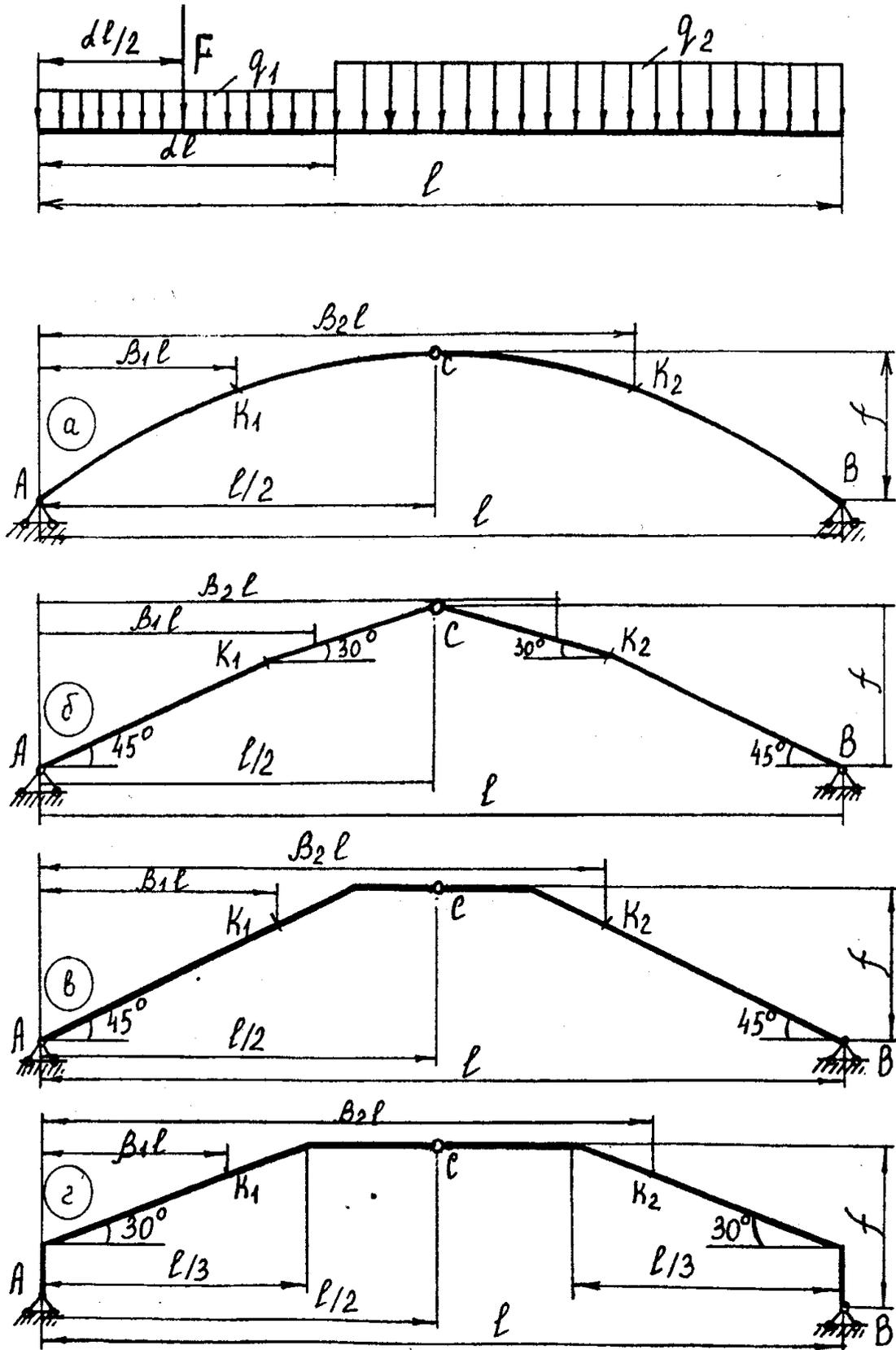
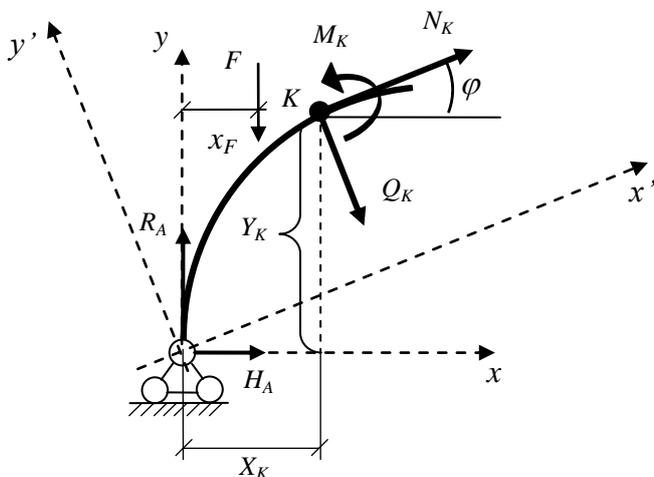


Рис.6

Если рассмотреть балочную аналогию, то момент в сечении К левой части балки будет равен:  $M_K^{\bar{o}} = R_A \cdot X_K - F(X_K - X_F)$ . Тогда формула для определения изгибающего момента в арке будет:  $M_K = M_K^{\bar{o}} - H \cdot Y_K$ , где  $M_K^{\bar{o}}$  - момент в соответствующей балке,  $H$  - распор арки,  $Y_K$  - ордината (высота) сечения К.

Для определения продольной силы:  $\sum x'_{лев} = 0$ ,



$$N_K + H \cdot \cos \varphi + R_A \cdot \sin \varphi - F \cdot \sin \varphi = 0,$$

$$N_K = -[(R_A - F_1) \cdot \sin \varphi + H \cdot \cos \varphi].$$

Если рассмотреть балочную аналогию, то поперечная сила в сечении К левой части балки будет равна:  $Q_K^{\bar{o}} = R_A - F$ . Тогда формула для определения продольной силы в арке будет:

$$N_K = -(Q_K^{\bar{o}} \cdot \sin \varphi_K + H \cdot \cos \varphi_K),$$

где  $Q_K^{\bar{o}}$  - поперечная сила в соответствующей балке,  $\varphi$  - угол наклона касательной в сечении К.

Для определения поперечной силы:  $\sum y'_{лев} = 0$

$$-Q_K - H \cdot \sin \varphi + R_A \cdot \cos \varphi - F_1 \cdot \cos \varphi = 0$$

$$Q_K = (R_A - F_1) \cdot \cos \varphi_K - H \cdot \sin \varphi_K.$$

Тогда формула для определения поперечной силы в арке будет:

$$Q_K = Q_K^{\bar{o}} \cdot \cos \varphi_K - H \cdot \sin \varphi_K.$$

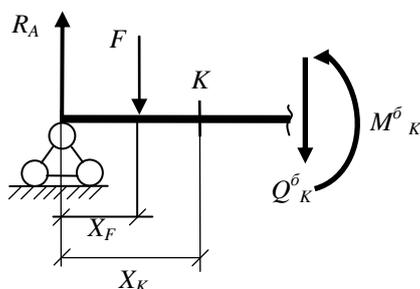


Рис.7

Ординаты точек оси арки и углы наклона касательных определяются по следующим уравнениям:

- при очертании оси по параболе:  $y = \frac{4f}{l^2} x(l - x), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{l^2} (l - 2x);$

- при очертании оси по окружности:  $y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f,$

где  $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}, \quad \sin \varphi = \frac{l - 2x}{2R}, \quad \cos \varphi = \frac{y + R - f}{R}.$

Следует помнить, что для правой половины арки (рамы) угол наклона касательной в сечении К отрицателен, т.е.  $\varphi_K < 0$

Это значит, что  $\operatorname{Cos}(-\varphi_K) = \operatorname{Cos} \varphi_K, \quad \operatorname{Sin}(-\varphi_K) = -\operatorname{Sin} \varphi_K$

## РАБОТА 5

### Определение перемещений в статически определимой раме

*Задание.* Для рамы (рис.8) с выбранными по шифру из табл.4 размерами и нагрузкой требуется определить горизонтальное перемещение (ГП) или угол поворота (УП) одного из сечений.

Таблица 4

Первая цифра шифра	$l$ , м	$q$ , кН/м	Вторая цифра шифра	F кН	h, м	Номер сечения	Последняя цифра шифра (№ схемы)	Вид перемещения	$I_1 : I_2$
1	8	1	1	9	7	1	1	УП	1:2
2	9	2	2	2	6	2	2	УП	2:1
3	9	2	3	5	5	3	3	УП	1:3
4	8	3	4	4	8	4	4	УП	3:1
5	5	2	5	3	9	1	5	УП	1:4
6	5	3	6	10	9	2	6	ГП	4:1
7	6	4	7	7	8	3	7	ГП	1:3
8	8	3	8	8	6	4	8	ГП	3:1
9	6	2	9	1	10	1	9	ГП	1:2
0	7	1	0	6	7	3	0	ГП	2:1

#### **Методические указания:**

Все перемещения следует определять по методу Мора с применением формулы Симпсона.

$$\Delta(\varphi) = \sum \frac{l_i}{6E_i I_i} \left( M_F^n \overline{M}^n + 4M_F^{cp} \overline{M}^{cp} + M_F^k \overline{M}^k \right).$$

Здесь:  $\Delta$ - линейное перемещение,

$\varphi$ - угловое перемещение,

$l_i$ - длина участка,

$EI$ - изгибная жесткость на участке,

$M_F, \overline{M}$  - моменты с грузовой и с единичной эпюры, взятые соответственно в начале, середине и конце участка.

Грузовая эпюра (эп.  $M_F$ )- это эпюра моментов, построенная от действия всей внешней нагрузки.

Единичная эпюра (эп.  $\overline{M}$ ) – эпюра моментов, построенная от действия единичного фактора. В качестве единичного фактора применяется либо сила, равная 1 ( $F=1$ ), для определения линейного смещения, либо момент, равный 1 ( $M=1$ ), для определения угла поворота поперечного сечения.

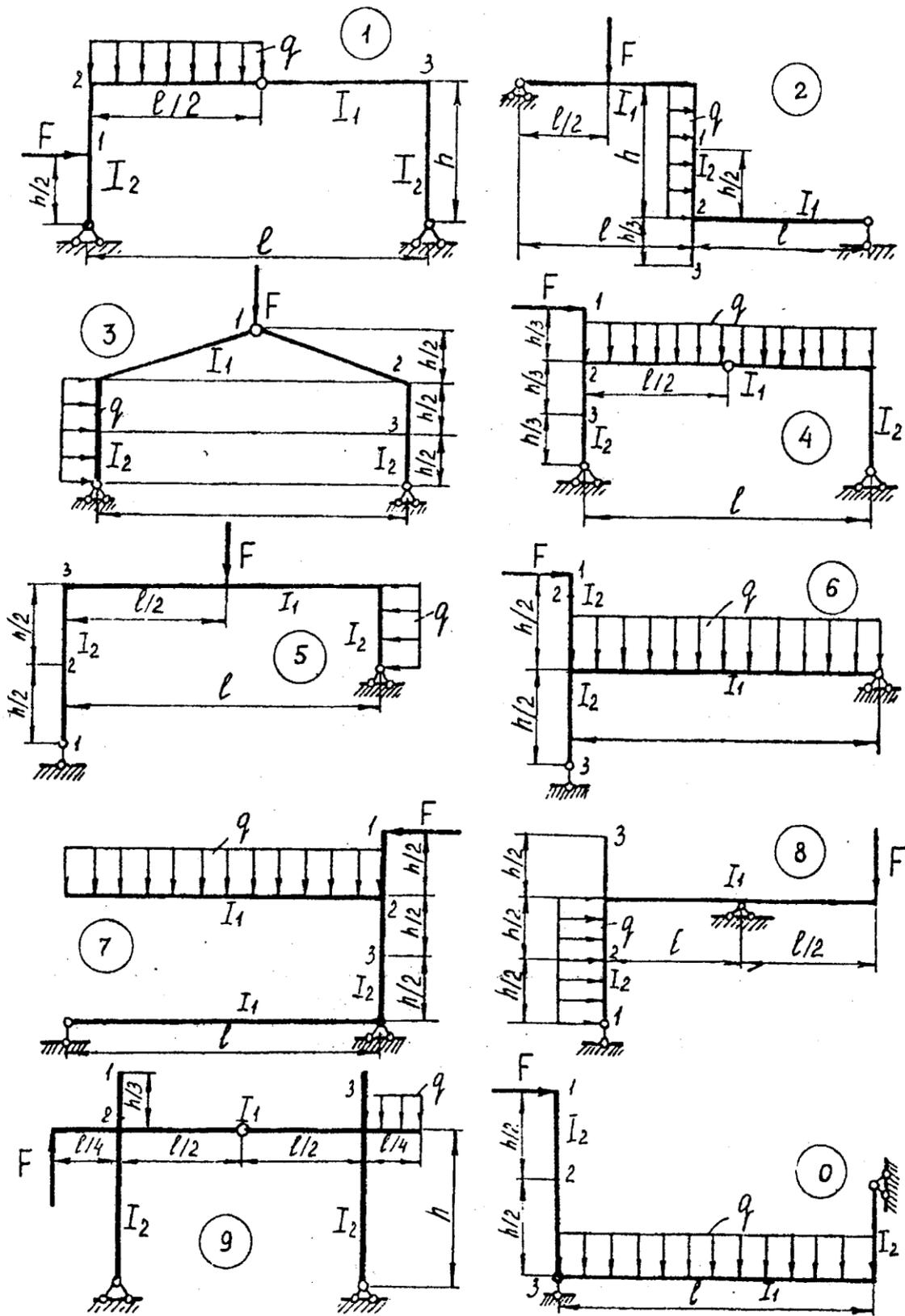


Рис.8

## РАБОТА 6

### Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил

*Задание.* Для рамы (рис.9) с выбранными по шифру из табл.5 размерами и нагрузкой требуется:

- раскрыть статическую неопределимость,
- построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил,
- проверить правильность построенных эпюр.

*Таблица 5*

Первая цифра шифра	Р кН	l, м	Вторая цифра шифра	q кН/м	h, м	Третья цифра шифра	(№ схемы)	I <sub>1</sub> : I <sub>2</sub>
1	4	8	1	2	10	1	1	2:1
2	5	12	2	2	8	2	2	1:2
3	6	9	3	4	6	3	3	3:1
4	5	10	4	4	9	4	4	1:3
5	6	7	5	2	4	5	5	4:1
6	4	6	6	1	5	6	6	1:4
7	6	5	7	2	7	7	7	3:1
8	4	11	8	1	11	8	8	1:3
9	5	4	9	4	12	9	9	2:1
0	4	13	0	1	13	0	0	1:2

**Методические указания:**

Задачу следует начинать решать с определения степени статической неопределимости рамы по формуле:  $n = R - Ш - 3$ ,

где R – число всех неизвестных реакций,

Ш – число простых соединительных шарниров.

Путем отбрасывания лишних связей (количество их равно степени статической неопределимости системы) выбирается основная система для дальнейшего расчета. Основная система должна быть статически определима и геометрически неизменяема.

За неизвестные в методе сил ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) принимаются реакции в отброшенных связях, которые следует определять из системы канонических уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0 \end{cases},$$

где  $\delta_{ij}$ - перемещение по направлению отброшенной связи  $i$  от действия реакции  $X_j=1$ .

$\Delta_{iF}$ - перемещение по направлению отброшенной связи  $i$  от действия заданной нагрузки.

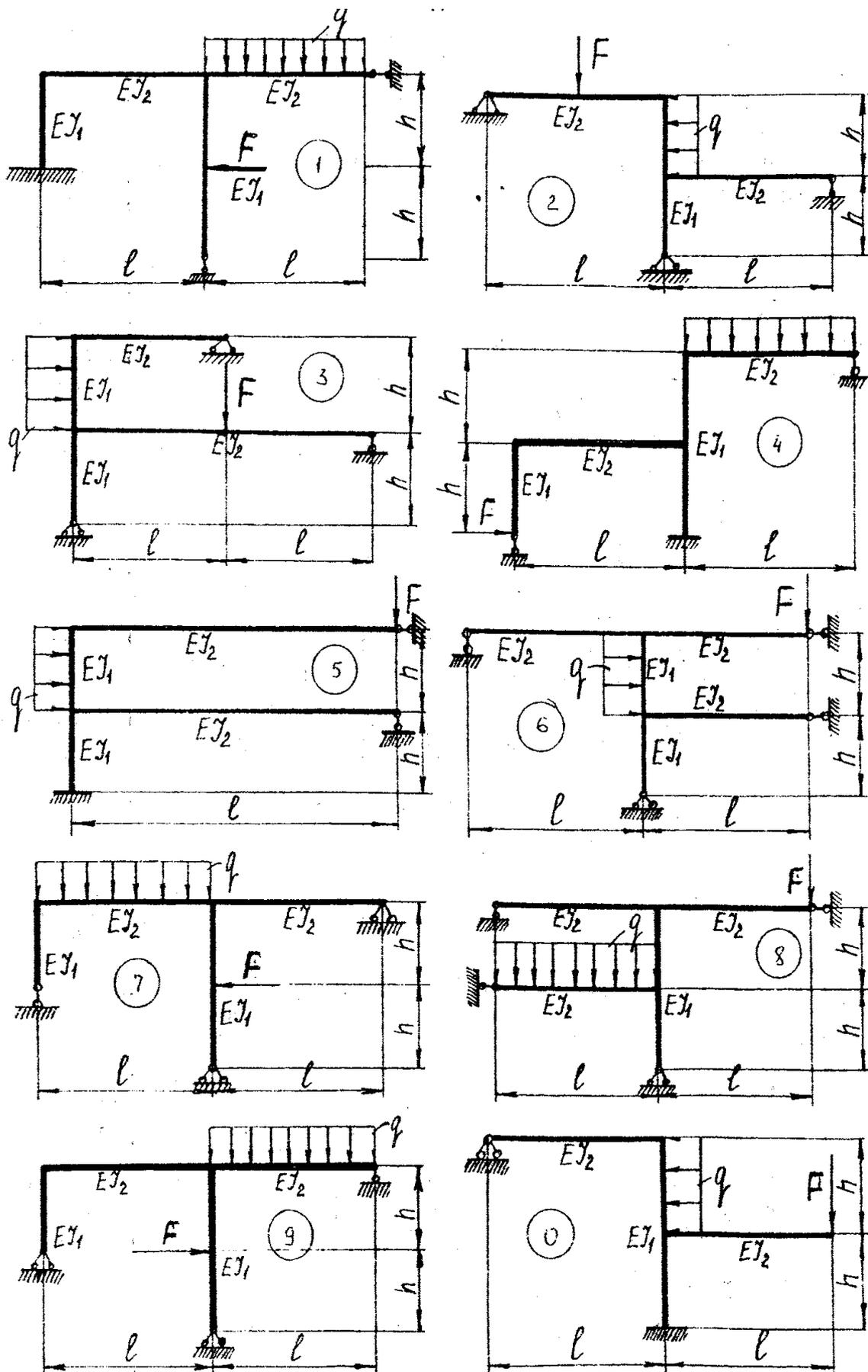


Рис. 9

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### Пример 1. Расчет статически определимой многопролетной балки

Для балки (рис.10) требуется построить эпюры изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$  (аналитически).

Исходные данные:  $F=10кН$ ,  $q=4кН/м$ ,  $M=12кНм$

Решение:

1. Строим этажную схему: мысленно убираем шарниры и конструкция распадается на простые балки.

Основные балки (  ) располагаются на первом нижнем этаже.

Вспомогательные балки (   ) с помощью дополнительных опор устанавливаются выше.

2. Расчет ведем с верхнего этажа. Рассчитываем балку ВС. Так как балка нагружена силой посередине пролета, то на каждую реакцию приходится по половине силы:  $R_C = R_B = \frac{F}{2} = 5кН$ . Построим эпюры поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$  для балки ВС.

Построим эпюры поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$  для балки ВС.

$$\begin{aligned} Q_1 &= R_B & M_1 &= 0 \\ Q_2 &= R_B & M_2 &= R_B \cdot 1 = 5кН \cdot м \\ Q_3 &= -R_C & M_3 &= R_C \cdot 1 = 5кН \cdot м \\ Q_4 &= -R_C & M_4 &= 0 \end{aligned}$$

3. Рассчитываем нижележащие этажи, нагрузка с верхнего этажа на нижний передается через соответствующую реакцию с обратным знаком.

Балка СЕ:

Определяем реакции:  $\sum M_D = 0, R_C \cdot 2 + M + R_E \cdot 1 = 0, R_E = -22кН$

$$\sum M_E = 0, R_C \cdot 3 + M - R_D \cdot 1 = 0, R_D = 27кН$$

Проверка:  $\sum Y = 0, -R_C + R_E - R_D = 0, -5 + 27 - 22 = 0$  (верно)

Построим эпюры поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$  для балки СЕ.

$$\begin{aligned} M_1 &= M_4 = 0 \\ Q_1 = Q_2 &= -R_C = -5кН & M_2 &= -R_C \cdot 2 = -10кН \cdot м \\ Q_3 = Q_4 &= -R_E = 22кН & M_3 &= -R_E \cdot 1 = -22кН \cdot м \end{aligned}$$

Балка АВ: Эта балка консольная, реакции можно не определять, но расчет вести со свободного незакрепленного конца.

$$Q_1 = Q_2 = R_B = 5кН \quad M_1 = 0 \quad M_2 = -R_B \cdot 2 = -10кН \cdot м$$

Балка ЕК: Эта балка тоже консольная, реакции можно не определять, расчет ведем со свободного незакрепленного конца.

$$\begin{aligned} Q_1 &= -R_E = 22кН & M_1 &= 0 \\ Q_3 &= -R_E - q \cdot 4 = 6кН & M_2 &= R_E \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 36кН \cdot м \\ & & M_3 &= R_E \cdot 4 \cdot 2 = 56кН \cdot м \end{aligned}$$

4. Совмещаем все построенные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов по одной линии (рис.11).

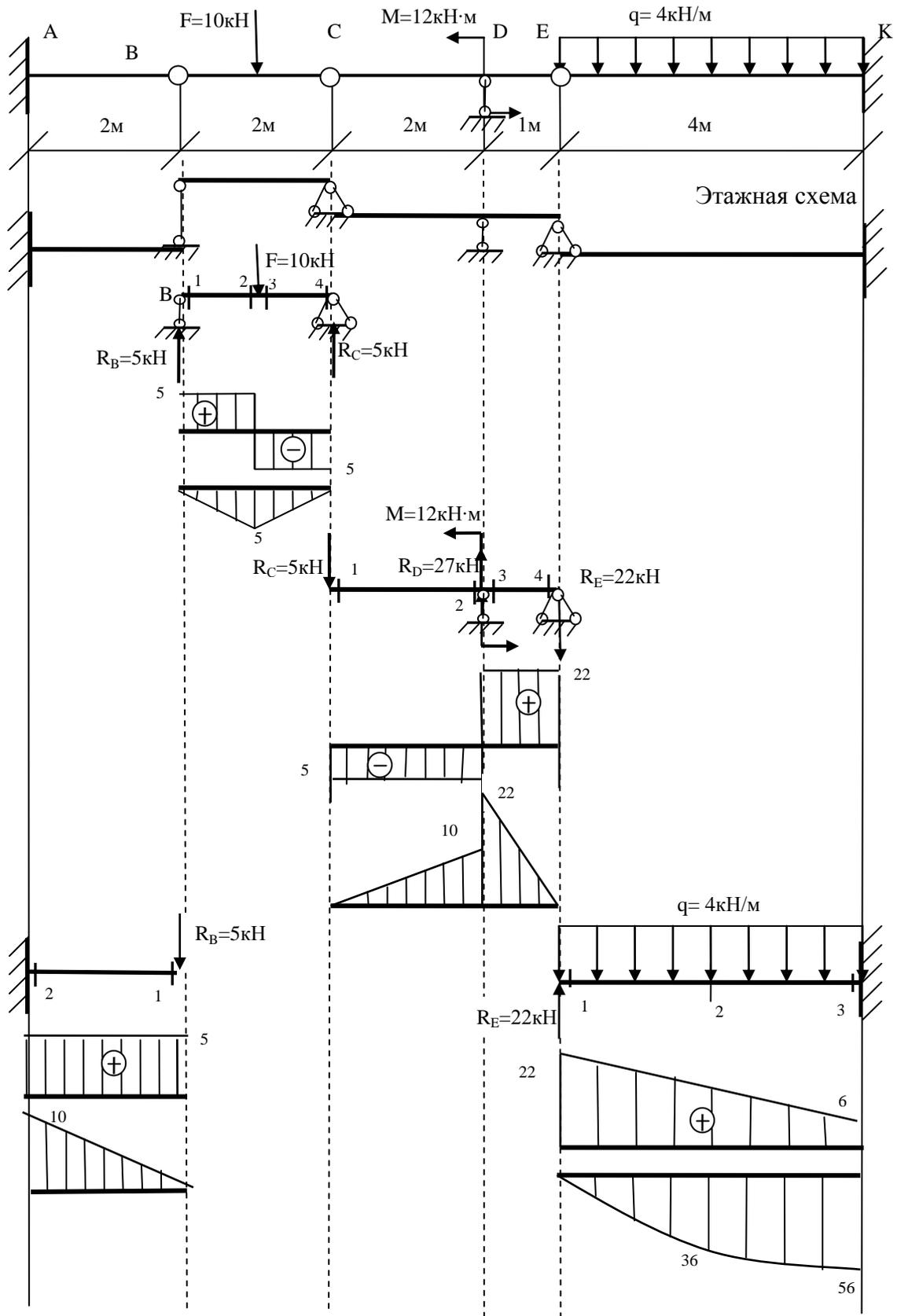


Рис.10

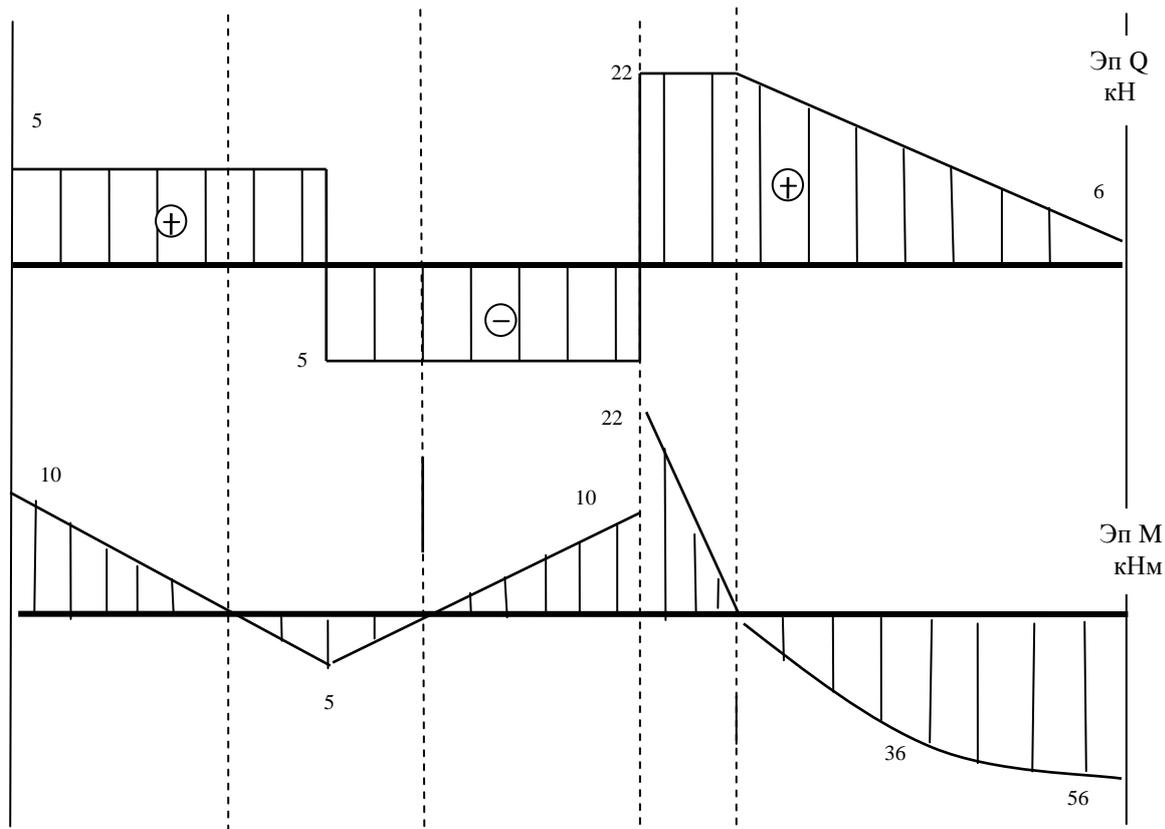


Рис.11

## Пример 2. Расчет статически определимой балки с помощью линий влияния

Для балки (рис.12), требуется:

- построить линию влияния средней опорной реакции;
- построить линии влияния изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$  в указанных сечениях;
- вычислить по линиям влияния значения реакции, изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$ .

Исходные данные:  $F=10\text{кН}$ ,  $q=4\text{кн/м}$ ,  $M=12\text{кНм}$ .

Решение:

Линии влияния в балке строим кинематическим способом.

Для построения линии влияния реакции средней опоры изображаем балку без этой опоры, даем данной точке возможное перемещение в положительном направлении (вверх на единицу) и зарисовываем новое положение полученного механизма.

Для построения линии влияния изгибающего момента  $M_K$  врезаем шарнир и поворачиваем полученный механизм в положительном направлении на единственный угол.

Если сечение рядом с опорой (сечение 3 и сечение 4), то при построении линии влияния момента шарнир нужно врезать прямо над опорой.

Для построения линии влияния поперечной силы  $Q_K$  врезаем ползун и раздвигаем части балки в положительном направлении на единицу.

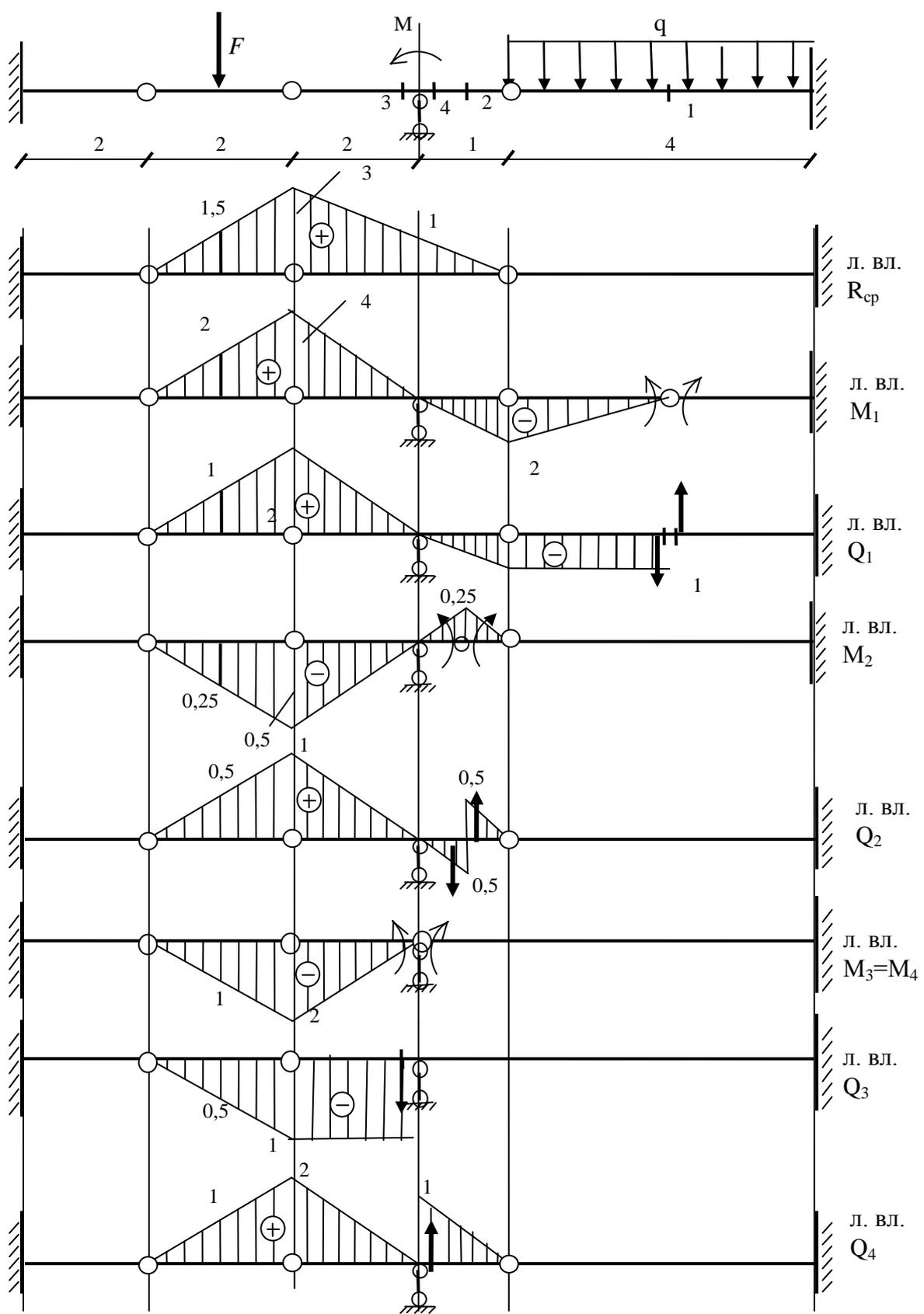


Рис.12

Ординаты линий влияния определяются из подобия треугольников.

Определим реакцию средней опоры и, например, изгибающий момент и поперечную силу в сечении 1 по линиям влияния и сравним результаты с задачей №1.

По линии влияния:

$$R_D = F \cdot 1,5 - M \left( -\frac{3}{3} \right) = 10 \cdot 1,5 - 12 \cdot (-1) = 27 \text{ кН},$$

$$M_{(1)} = F \cdot 2 + q \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) - M \cdot \left( -\frac{4}{2} \right) = 10 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 12 \cdot 2 = 36 \text{ кНм},$$

$$Q_{(1)} = F \cdot 1 + q \cdot (-1 \cdot 2) - M \cdot \left( -\frac{4}{2} \right) = 10 - 2 \cdot 2 + 12 \cdot 2 = 30 \text{ кН}$$

По эпюрам из задачи №1:  $R_D = 27 \text{ кН}$ ,  $M_{(1)} = 36 \text{ кНм}$ ,  $Q_{(1)} = 30 \text{ кН}$ .

Как видим, результаты, полученные разными методами, сошлись.

### Пример 3. Расчет простой плоской статически определимой фермы

Для фермы (рис.13) требуется:

-определить усилия в указанных стержнях

Исходные данные:  $F_1 = 40 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 80 \text{ кН}$ ,  $F_3 = 16 \text{ кН}$ ,  $h = 3 \text{ м}$ ,  $d = 2 \text{ м}$ .

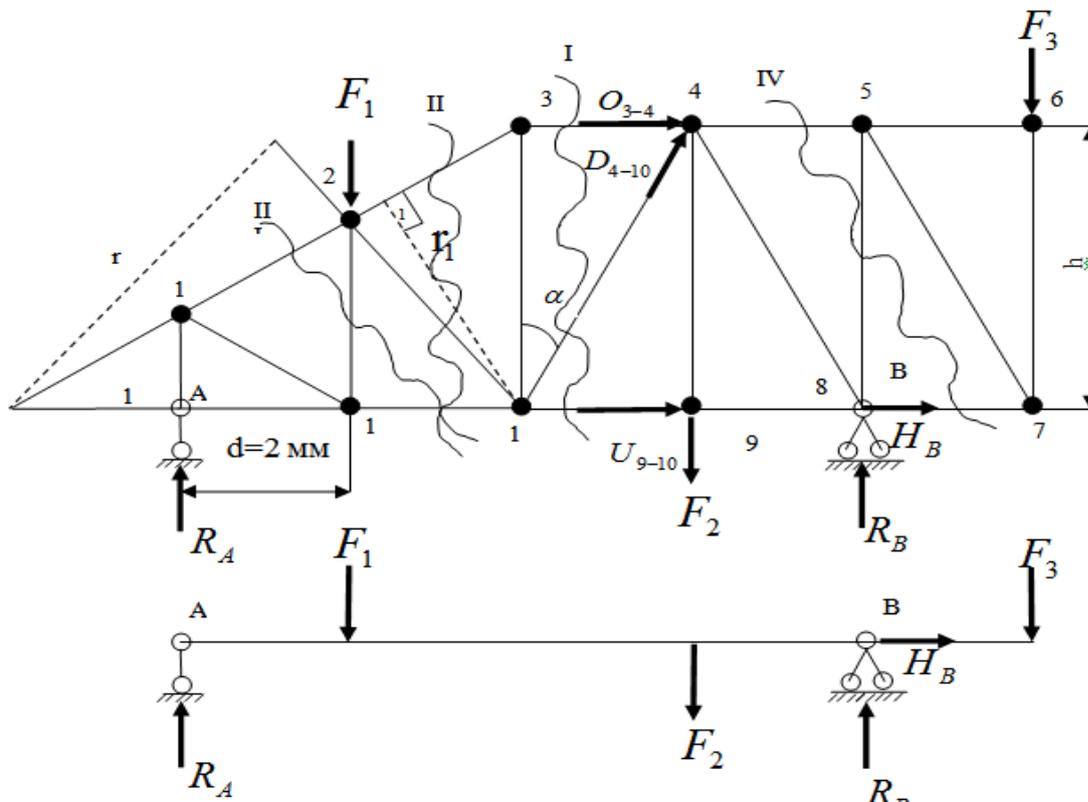


Рис.13

Решение:

1. Определяем реакции в ферме. Можно изобразить балочную аналогию и найти реакции, как в балке.  $\sum Z = 0, \quad H_B = 0;$

$$\sum M_A = 0; \quad F_1 \cdot d + F_2 \cdot 3d + F_3 \cdot 5d - R_B \cdot 4d = 0; \quad R_B = \frac{40 + 80 \cdot 3 + 16 \cdot 5}{4} = 90 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 4d - F_1 \cdot 3d - F_2 \cdot d + F_3 \cdot d = 0, \quad R_A = 46 \text{ кН}.$$

Проверка.

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - F_1 - F_2 - F_3 = 0; \quad 90 + 46 - 40 - 80 - 16 = 136 - 136 = 0.$$

Проверка выполняется, значит, реакции определены верно.

2. Определение усилий в стержнях фермы.

1)  $U_{9-10}$  -? Стержень принадлежит нижнему поясу, проводим сечение I, находим моментную точку 4, составляем уравнение моментов вокруг этой точки левой отсеченной части фермы:

$$\sum M_4^{\text{лев}} = 0; \quad R_A \cdot 6 - F_1 \cdot 4 - U_{9-10} \cdot h = 0; \quad U_{9-10} = \frac{46 \cdot 6 - 40 \cdot 4}{3} = 38,67 \text{ кН}.$$

2)  $O_{3-4}$  -? Стержень принадлежит верхнему поясу, проводим сечение I, находим моментную точку 10, составляем уравнение моментов вокруг этой точки левой отсеченной части фермы:

$$\sum M_{10}^{\text{лев}} = 0; \quad R_A \cdot 4 - F_1 \cdot 2 + O_{3-4} \cdot 3 = 0; \quad O_{3-4} = -\frac{46 \cdot 4 - 40 \cdot 2}{3} = -34,67 \text{ кН}.$$

3)  $O_{2-3}$  -? Стержень принадлежит нижнему поясу, проводим сечение II, находим моментную точку 10, составляем уравнение моментов вокруг этой точки левой отсеченной части фермы:

$$\sum M_{10}^{\text{лев}} = 0; \quad R_A \cdot 4 - F_1 \cdot 2 + O_{3-4} \cdot r_1 = 0;$$

$$O_{2-3} = -\frac{46 \cdot 4 - 40 \cdot 2}{2,7} = -38,52 \text{ кН}, \text{ где } r_1 = 2,7 \text{ м (плечо усилия } O_{2-3}) \text{ находим}$$

из геометрических соображений или по масштабу;

4)  $D_{2-10}$  -? Стержень является раскосом, проводим сечение II, находим моментную точку С, составляем уравнение моментов вокруг этой точки левой отсеченной части фермы:

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0; \quad -R_A \cdot 2 + F_1 \cdot 4 + D_{2-10} \cdot r_2 = 0;$$

$$D_{2-10} = \frac{46 \cdot 2 - 40 \cdot 4}{4,4} = -15,45 \text{ кН} , \text{ где } r_2 = 4,4 \text{ м (плечо усилия } D_{2-10}) \text{ находим}$$

из геометрических соображений или по масштабу;

5)  $V_{2-11}$  -? Стержень является стойкой, проводим сечение III, находим моментную точку С, составляем уравнение моментов вокруг этой точки левой отсеченной части фермы:

$$\sum M_c^{лев} = 0; \quad -R_A \cdot 2 + F_1 \cdot 4 - V_{2-11} \cdot 4 = 0; \quad V_{2-11} = \frac{-46 \cdot 2 + 40 \cdot 4}{4} = 17 \text{ кН} .$$

6)  $D_{4-10}$  -? Стержень является раскосом, проводим сечение I, применяем способ проекций, т.к. два других разрезанных стержня параллельны, составляем уравнение проекций сил на вертикальную ось левой отсеченной части фермы:

$$\sum Y^{лев} = 0; \quad R_A - F_1 + D_{4-10} \cdot \cos \alpha = 0; \quad \alpha = \arctg \frac{2}{3} = 33,7^\circ; \quad \cos \alpha = 0,83;$$

$$D_{4-10} = \frac{40 - 46}{0,83} = -7,2 \text{ кН} .$$

7)  $V_{5-8}$  -? Стержень является стойкой, проводим сечение IV, применяем способ проекций, т.к. два других разрезанных стержня параллельны, составляем уравнение проекций сил на вертикальную ось правой отсеченной части фермы:

$$\sum Y^{np} = 0; \quad -F_3 - V_{5-8} = 0; \quad V_{5-8} = -16 \text{ кН}$$

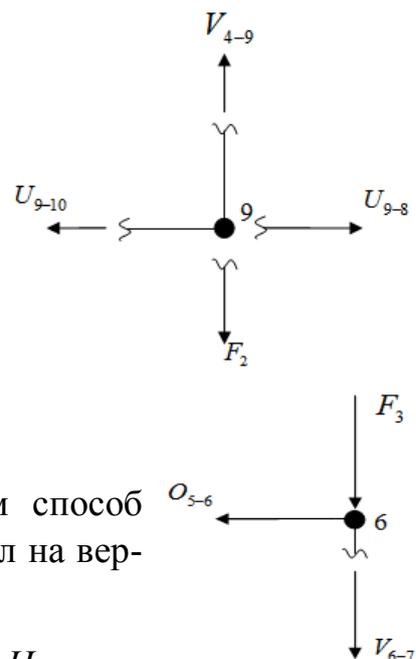
8)  $V_{4-9}$  -? Стержень является стойкой, применяем способ вырезания узлов, т.к. два других способа не применимы (нельзя разрезать ферму через три стержня), составляем уравнение проекций сил на вертикальную ось для узла 9:

$$\sum Y = 0, \quad V_{4-9} - F_2 = 0;$$

$$V_{4-9} = F_2 = 80 \text{ кН} .$$

9)  $V_{6-7}$  -? Стержень является стойкой, применяем способ вырезания узлов, составляем уравнение проекций сил на вертикальную ось для узла 6:

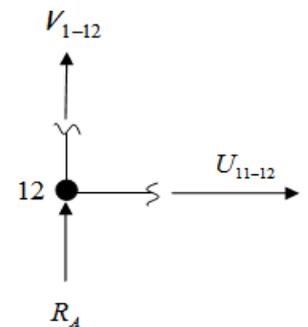
$$\sum Y = 0; \quad -F_3 - V_{6-7} = 0; \quad V_{6-7} = -F_3 = -16 \text{ кН} .$$



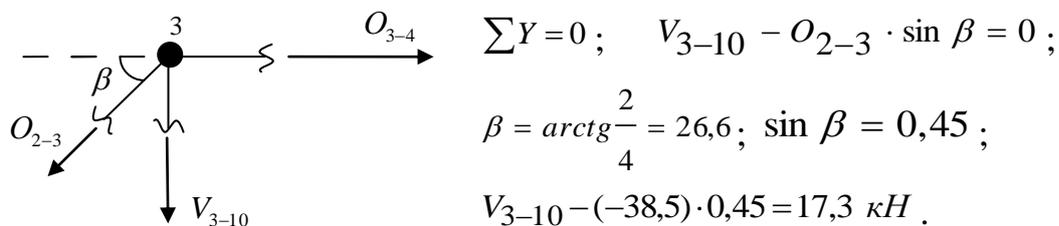
10)  $V_{1-12}$  -? Стержень является стойкой, применяем способ вырезания узлов, составляем уравнение проекций сил на вертикальную ось для узла 12:

$$\sum Y = 0; \quad R_A + V_{1-12} = 0;$$

$$V_{1-12} = -R_A = -46 \text{ кН}.$$



11)  $V_{3-10}$  -? Стержень является стойкой, применяем способ вырезания узлов, составляем уравнение проекций сил на вертикальную ось для узла 3:



#### Пример 4. Расчет трехшарнирной арки или трехшарнирной рамы

Для сплошной трехшарнирной арки (рис.14) требуется определить аналитически моменты, поперечные и нормальные силы в сечениях  $K_1$  и  $K_2$  от действия постоянной нагрузки.

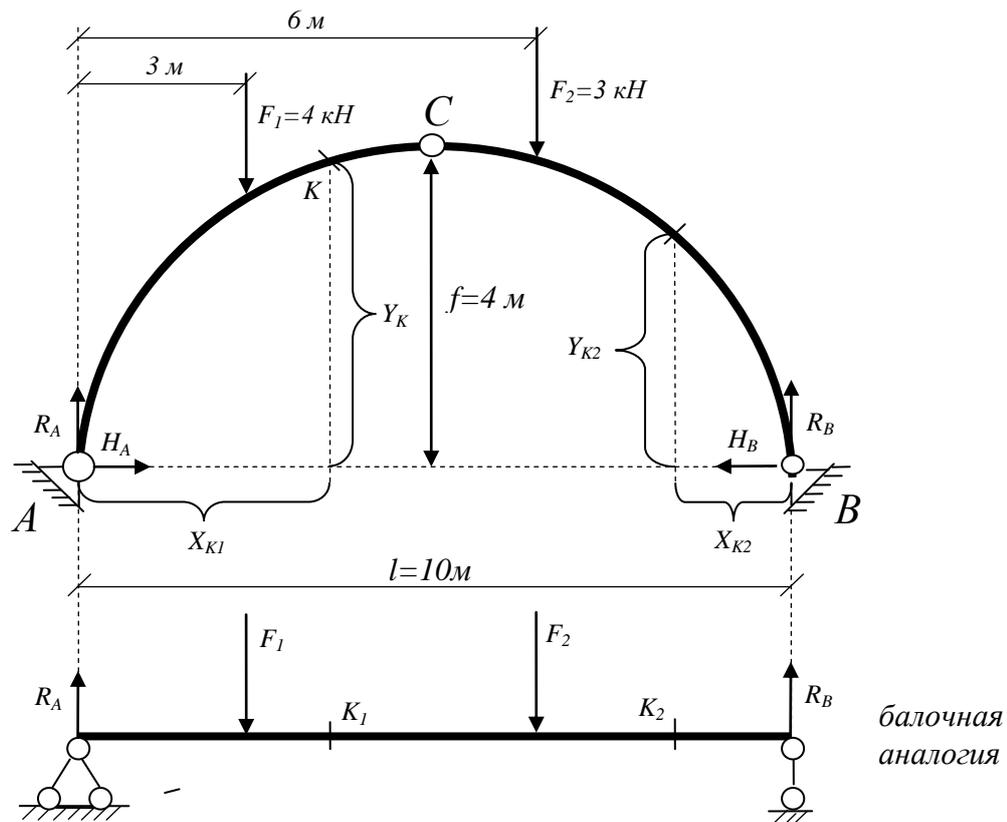


Рис.14

Исходные данные:  $F_1 = 4\text{кН}$ ,  $F_2 = 3\text{кН}$ ,  $l = 10\text{м}$ ,  $f = 4\text{м}$ ,  $X_{K1} = 4\text{ м}$ ,  $X_{K2} = 7,5\text{ м}$  (слева). Арка очерчена по окружности.

Решение:

1) Определение реакций в трехшарнирной арке

Вертикальные реакции в арке определяются так же, как в балке.

$$\sum M_A = 0, F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 6 - R_B \cdot 10 = 0, R_B = \frac{12+18}{10} = 3\text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, R_A \cdot 10 - F_1 \cdot 7 - F_2 \cdot 4 = 0, R_A = 4\text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum Y = 0, R_A + R_B - F_1 - F_2 = 0, 4 + 3 - 4 - 3 = 0$  (верно).

Горизонтальные реакции  $H_A, H_B$  (распор) определяются как сумма моментов вокруг шарнира С правой и левой частей арки, где  $f$  – стрела подъема арки.

$$\sum M_C^{ЛЕВ} = 0, R_A \cdot \frac{l}{2} - F_1 \cdot 2 - H_A \cdot f = 0, H_A = \frac{4 \cdot 5 - 4 \cdot 2}{4} = 3\text{ кН};$$

$$\sum M_C^{ПРАВ} = 0, F_2 \cdot 1 - R_B \cdot 5 + H_B \cdot f = 0, H_B = \frac{3 \cdot 5 - 3 \cdot 1}{4} = 3\text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum X = 0, H_A - H_B = 0, H_A = H_B = H = 3\text{ кН}.$

2) Определение усилий в арке

При очертании арки по окружности находим необходимые геометрические размеры арки:

- радиус кривизны арки:  $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} = \frac{4}{2} + \frac{100}{8 \cdot 4} = 5,125\text{ м};$

- ординаты сечений  $K_1$  и  $K_2$ :  $Y_K = \sqrt{R^2 - (\frac{l}{2} - X_K)^2} - R + f,$

$$Y_{K_1} = \sqrt{5,125^2 - (\frac{10}{2} - 4)^2} - 5,125 + 4 = 3,9\text{ м}, Y_{K_2} = \sqrt{5,125^2 - (5 - 7,5)^2} - 5,125 + 4 = 3,3\text{ м};$$

- синус и косинус угла наклона касательной в сечении К:

$$\sin \varphi_K = \frac{l - 2X_K}{2R}, \quad \cos \varphi_K = \frac{Y_K + R - f}{R}$$

$$\sin \varphi_{K_1} = \frac{10 - 8}{2 \cdot 5,125} = 0,19, \quad \cos \varphi_{K_1} = \frac{3,9 + 5,125 - 4}{5,125} = 0,98$$

$$\sin \varphi_{K_2} = \frac{10 - 2 \cdot 7,5}{2 \cdot 5,125} = -0,48, \quad \cos \varphi_{K_2} = \frac{3,3 + 5,125 - 4}{5,125} = 0,86$$

а) рассматриваем сечение  $K_1$

$$M_{K_1} = M_{K_1}^{\bar{0}} - H \cdot Y_{K_1}, \quad M_{K_1}^{\bar{0}} = R_A \cdot X_{K_1} - F(X_{K_1} - 3) = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 12\text{ кНм},$$

$$M_{K_1} = 12 - 3 \cdot 3,9 = 0,3\text{ кНм}$$

$$Q_{K_1} = Q_{K_1}^{\bar{0}} \cdot \cos \varphi_{K_1} - H \cdot \sin \varphi_{K_1}, \quad Q_{K_1}^{\bar{0}} = R_A - F_1 = 4 - 4 = 0, \quad Q_{K_1} = 0 - 3 \cdot 0,19 = -0,57\text{ кН}$$

$$N_{K_1} = -(Q_{K_1}^{\bar{0}} \cdot \sin \varphi_{K_1} + H \cdot \cos \varphi_{K_1}), \quad N_{K_1} = -(0 + 3 \cdot 0,98) = -2,94\text{ кН}$$

б) рассматриваем сечение  $K_2$

$$M_{K_2} = M_{K_2}^{\bar{0}} - H \cdot Y_{K_2} = 7,5 - 3 \cdot 3,3 = -2,4\text{ кНм}, \text{ где } M_{K_2}^{\bar{0}} = R_B \cdot 2,5 = 7,5\text{ кНм}$$

$$Q_{K_2} = Q_{K_2}^{\bar{0}} \cdot \cos \varphi_{K_2} - H \cdot \sin \varphi_{K_2}, \quad Q_{K_2}^{\bar{0}} = -R_B = -3 \text{ кН},$$

$$Q_{K_2} = -3 \cdot 0,86 - 3 \cdot (-0,48) = 1,2 \text{ кН},$$

$$N_{K_2} = -(Q_{K_2}^{\bar{0}} \cdot \sin \varphi_{K_2} + H \cdot \cos \varphi_{K_2}) = -(-3 \cdot (-0,48) + 3 \cdot 0,86) = -3,72 \text{ кН}.$$

### Пример 5. Определение перемещений в статически определимой раме

Для заданной рамы (рис.15) требуется определить угол поворота сечения 1 и горизонтальное перемещение сечения 2.

Исходные данные:  $L=8 \text{ м}$ ,  $F=2 \text{ кН}$ ,

$q=1 \text{ кН/м}$ ,  $h=6 \text{ м}$ ,  $I_1=I$ ,  $I_2=2I$

Решение:

1. Строим грузовую эпюру:

а) Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0, \quad -R_B \cdot 8 + q \cdot 4 \cdot 2 + F \cdot 3 = 0,$$

$$R_B = 1,75 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0, \quad R_A \cdot 8 + F \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 6 = 0,$$

$$R_A = 2,25 \text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum y = 0$ ,  $R_A - q \cdot 4 + R_B = 0$ ,  
 $1,75 + 2,25 - 1 \cdot 4 = 0$ . Проверка сошлась.

Вертикальные реакции определены верно.

Для определения горизонтальных реакций нужно записать уравнение моментов относительно шарнира всех сил, расположенных с одной стороны рамы.

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0,$$

$$H_A \cdot 6 + R_A \cdot 4 - F \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad H_A = 0,83 \text{ кН}$$

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0, \quad R_B \cdot 4 - H_B \cdot 6 = 0, \quad H_B = 1,17 \text{ кН}$$

Проверка:  $\sum y = 0$ ,  $H_A + H_B - F = 0$ ,  
 $0,83 + 1,17 - 2 = 0$ . Проверка сошлась, значит, горизонтальные реакции определены верно.

б) Разбиваем раму на участки. На каждом участке намечаем сечения в начале и конце участка, а на участках с распределенной нагрузкой – дополнительное сечение в середине. В каждом сечении определяем значение внутреннего изгибающего момента по правилу: изгибающий момент равен

алгебраической сумме моментов всех внешних сил, расположенных с одной стороны от сечения, относительно центра этого сечения. Правило знаков для изгибающего момента: момент считается положительным, если он растягивает нижние волокна.

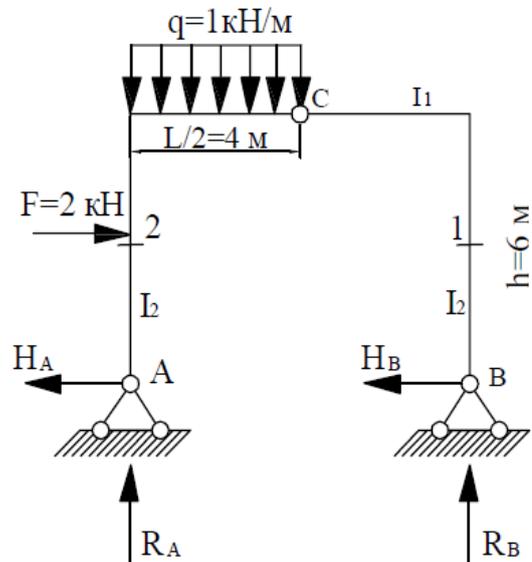


Рис.15

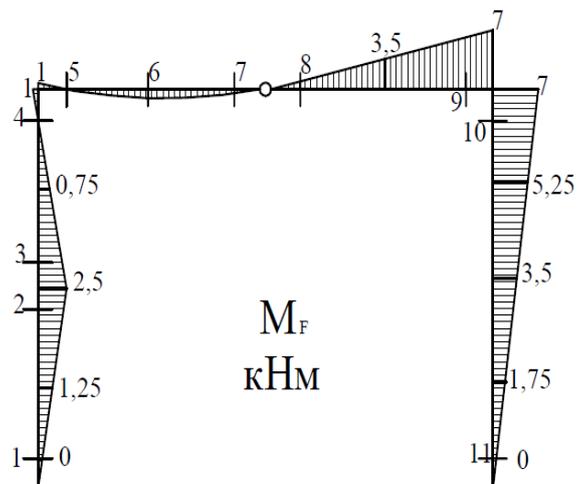


Рис.16

$M_1=0$  кНм,  $M_2=H_A \cdot 3=0,83 \cdot 3=2,5$  кНм;  
 $M_3=H_A \cdot 3-F \cdot 0=0,83 \cdot 3=2,5$  кНм,  $M_4=H_A \cdot 6-F \cdot 3=0,83 \cdot 6-2 \cdot 3=-1$  кНм;  
 $M_5=H_A \cdot 6-F \cdot 3+R_A \cdot 0=0,83 \cdot 6-2 \cdot 3=-1$  кНм;  
 $M_6=H_A \cdot 6-F \cdot 3+R_A \cdot 2-q \cdot 2 \cdot 1=0,83 \cdot 6-2 \cdot 3+2,25 \cdot 2-1 \cdot 2 \cdot 1=1,50$  кНм;  
 $M_7=H_A \cdot 6-F \cdot 3+R_A \cdot 4-q \cdot 4 \cdot 2=0,83 \cdot 6-2 \cdot 3+2,25 \cdot 4-1 \cdot 4 \cdot 2=0$  кНм;  
 $M_8=-H_B \cdot 6+R_B \cdot 4=-1,17 \cdot 6+1,75 \cdot 4=0$  кНм;  
 $M_9=-H_B \cdot 6+R_B \cdot 0=-1,17 \cdot 6=-7$  кНм,  $M_{10}=H_B \cdot 6+R_B \cdot 0=1,17 \cdot 6=7$  кНм,  $M_{11}=0$  кНм.  
 Грузовая эпюра моментов показана на рис.16.

2. Определяем угол поворота сечения (1)

а) Для того, чтобы определить угол поворота указанного сечения, нужно зарисовать исходную раму без внешней нагрузки и к заданному сечению приложить единичный момент (рис.17). Построить единичную эпюру моментов (рис.18).

Определяем реакции:  $\sum M_A=0$ ,  $R_B \cdot 8-\bar{M}=0$ ,  $R_B=0,125$

$\sum M_B=0$ ,  $R_A \cdot 8-\bar{M}=0$ ,  $R_A=0,125$

Проверка:  $\sum y=0$ ,  $R_A-R_B=0$ ,  $0,125-0,125=0$ .

$\sum M_C^{\text{лев}}=0$ ,  $R_A \cdot 4-H_A \cdot 6=0$ ,  $H_A=0,083$

$\sum M_C^{\text{прав}}=0$ ,  $R_B \cdot 4+M+H_B \cdot 6=0$ ,  $H_B=0,083$

Проверка:  $\sum x=0$ ,  $H_A-H_B=0$ ,  $0,083-0,083=0$ .

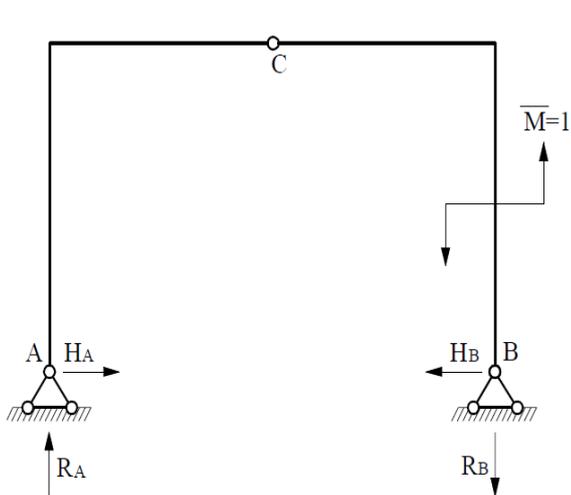


Рис. 17

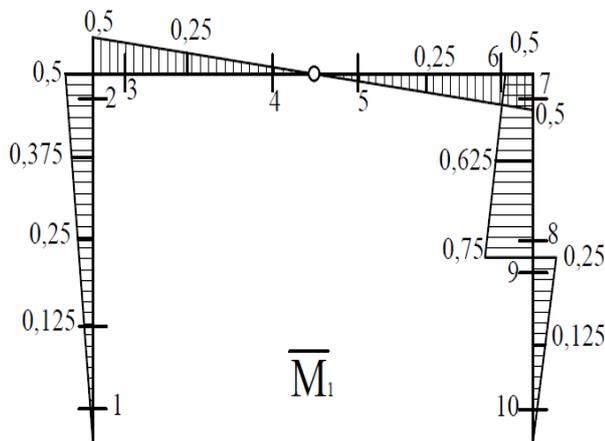


Рис. 18

$M_1=0$  кНм  $M_2=-H_A \cdot 6=-0,083 \cdot 6 \approx -0,5$  кНм;

$M_3=-H_A \cdot 6+R_A \cdot 0=-0,083 \cdot 6 \approx -0,5$  кНм;

$M_4=-H_A \cdot 6+R_A \cdot 4=-0,083 \cdot 6+0,125 \cdot 4 \approx 0$  кНм;

$M_5=R_B \cdot 4+H_B \cdot 6+M=-0,125 \cdot 4-0,083 \cdot 6+1 \approx 0$  кНм;

$M_6=R_B \cdot 0+H_B \cdot 6+M=-0,083 \cdot 6+1 \approx 0,5$  кНм;

$M_7=H_B \cdot 6+M=-0,083 \cdot 6+1 \approx 0,5$  кНм;

$M_8=H_B \cdot 3+M=-0,083 \cdot 3+1 \approx 0,75$  кНм;

$M_9=H_B \cdot 3=-0,083 \cdot 3 \approx -0,25$  кНм;  $M_{10}=0$  кНм.

б) Определяем угол поворота по формуле Симпсона, подставив  $I_1=I$ ,  $I_2=2I$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{[1]} &= \frac{3}{6 \cdot E \cdot I_2} (0 - 4 \cdot 1,25 \cdot 0,125 - 2,5 \cdot 0,25) + \frac{3}{6 \cdot E \cdot I_2} (-2,5 \cdot 0,25 - 4 \cdot 0,75 \cdot 0,375 + 0,5 \cdot 1) + \\ &\quad + \frac{4}{6 \cdot E \cdot I_1} (1 \cdot 0,5 - 4 \cdot 1,5 \cdot 0,25 \cdot 0) + \frac{4}{6 \cdot E \cdot I_1} (0 - 4 \cdot 3,5 \cdot 0,25 - 7 \cdot 0,5) + \\ &\quad + \frac{3}{6 \cdot E \cdot I_2} (-7 \cdot 0,5 - 4 \cdot 5,25 \cdot 0,625 - 3,5 \cdot 0,75) + \frac{3}{E \cdot I_2} (3,5 \cdot 0,25 + 4 \cdot 1,75 \cdot 0,125 + 0) = \\ &= \frac{-3,75}{12 \cdot E \cdot I} - \frac{3,75}{12 \cdot E \cdot I} - \frac{4}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{28}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{57,75}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{5,25}{2 \cdot E \cdot I} = \frac{-65,25 - 64 + 31,5}{12 \cdot E \cdot I} = \frac{-97,75}{12 \cdot E \cdot I} \end{aligned}$$

Знак « - » означает, что поворот сечения происходит против направления единичного момента, т.е. по часовой стрелке.

3. Определяем горизонтальное перемещение сечения (2).

а) Для того чтобы определить горизонтальное перемещение в указанном сечении, нужно зарисовать исходную раму без внешней нагрузки и к заданному сечению приложить в горизонтальном направлении единичную силу (рис.19). Построить единичную эпюру моментов (рис.20).

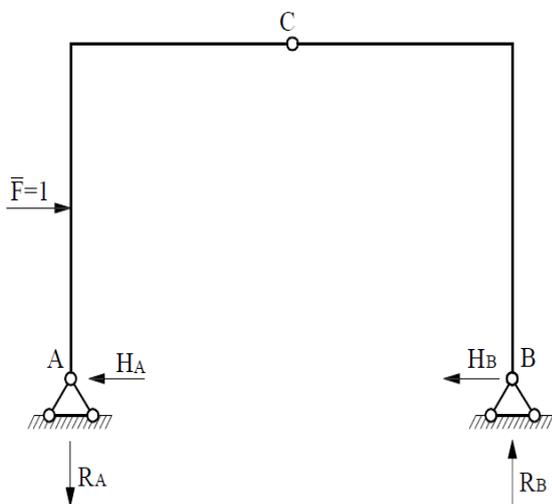


Рис. 19

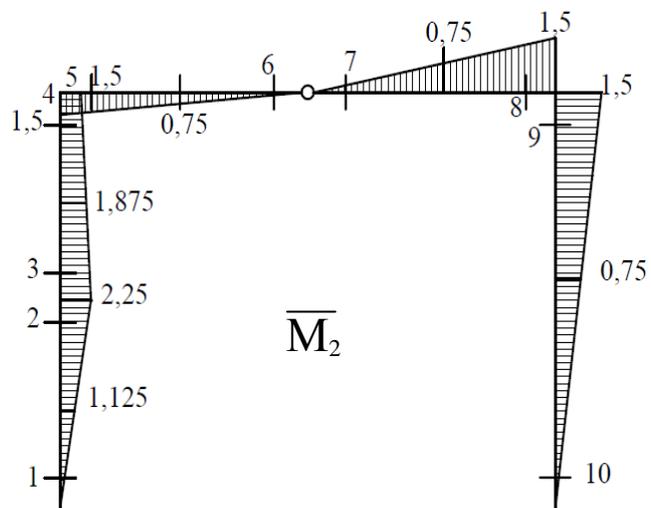


Рис.20

Определяем реакции:

$$\sum M_A = 0, \quad \bar{F} \cdot 3 - R_B \cdot 8 = 0, \quad R_B = 0,375, \quad \sum M_B = 0, \quad \bar{F} \cdot 3 - R_A \cdot 8 = 0, \quad R_A = 0,375$$

$$\text{Проверка: } \sum y = 0, \quad -R_A + R_B = 0, \quad -0,375 + 0,375 = 0$$

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0, \quad H_A \cdot 6 - \bar{F} \cdot 3 - R_A \cdot 4 = 0, \quad H_A = 0,75$$

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0, \quad H_B \cdot 6 - R_B \cdot 4 = 0, \quad H_B = 0,25$$

$$\text{Проверка: } \sum x = 0, \quad -H_A - H_B + \bar{F} = 0, \quad 0,083 - 0,083 = 0.$$

$$M_1 = 0 \text{ кНм} \quad M_2 = H_A \cdot 3 = 2,25 \text{ кНм} \quad M_3 = H_A \cdot 3 = 2,25 \text{ кНм}$$

$$M_4 = M_5 = H_A \cdot 6 - \bar{F} \cdot 1 = 1,5 \text{ кНм} \quad M_6 = M_7 = H_A \cdot 6 - \bar{F} \cdot 1 + R_A \cdot 4 = 0 \text{ кНм}$$

$$M_8 = -H_B \cdot 6 = -1,5 \text{ кНм} \quad M_9 = H_B \cdot 6 = 1,5 \text{ кНм} \quad M_{10} = 0 \text{ кНм}$$

б) Определяем горизонтальное перемещение сечения (2) по формуле Симпсона:

$$\begin{aligned} \Delta_{гор.} &= \frac{3}{6 \cdot E \cdot I_2} (0 + 4 \cdot 1,25 \cdot 1,125 + 2,5 \cdot 2,25) + \frac{3}{6 \cdot E \cdot I_2} (2,5 \cdot 2,25 + 4 \cdot 0,75 \cdot 1,875 - 1,5 \cdot 1) + \\ &+ \frac{4}{6 \cdot E \cdot I_1} (-1 \cdot 1,5 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 0) + \frac{4}{6 \cdot E \cdot I_1} (0 + 4 \cdot 3,5 \cdot 0,75 + 7 \cdot 1,5) + \\ &+ \frac{6}{E \cdot I_2} (7 \cdot 1,5 + 4 \cdot 0,75 \cdot 3,5 + 0) = \frac{33,75}{6 \cdot E \cdot I_2} + \frac{29,25}{6 \cdot E \cdot I_2} + \frac{12}{6 \cdot E \cdot I_1} + \frac{84}{6 \cdot E \cdot I_1} + \frac{126}{E \cdot I_2} = \\ &= \frac{63}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{96}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{126}{2 \cdot E \cdot I} = \frac{63 + 192 + 756}{12 \cdot E \cdot I} = \frac{84,25}{E \cdot I} \end{aligned}$$

Результат получился с «+», значит точка (2) перемещается по направлению единичной силы, т.е. вправо.

### Пример 6. Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил

Для статически неопределимой рамы (рис.21) требуется:

- построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил
- проверить правильность построения эпюр.

Исходные данные:  $L=8 \text{ м}$ ,  $F=4 \text{ кН}$ ,  $q=2 \text{ кН/м}$ ,  $h=8 \text{ м}$ ,  $I_1=2I$ ,  $I_2=I$

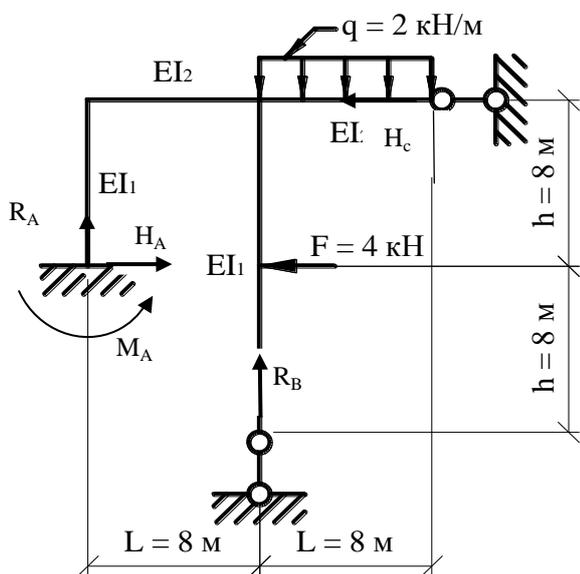


Рис.21

Решение:

1. Определяем степень статической неопределимости:

$n = R - Ш - 3 = 5 - 0 - 3 = 2$ , где  $R$  – число всех неизвестных реакций (рис.21),  $Ш$  – число простых соединительных шарниров, в данной схеме их нет. Рама получилась дважды статически неопределима.

2. Выбираем основную систему путем отбрасывания лишних связей (рис.22).

3. Зарисовываем эквивалентную систему: к основной системе прикладываем всю внешнюю нагрузку и вместо отброшенных связей неизвестные реакции  $X_1, X_2$  (рис.23).

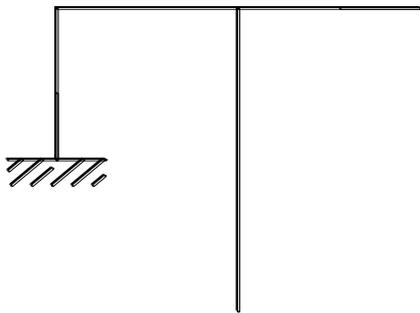


Рис. 22

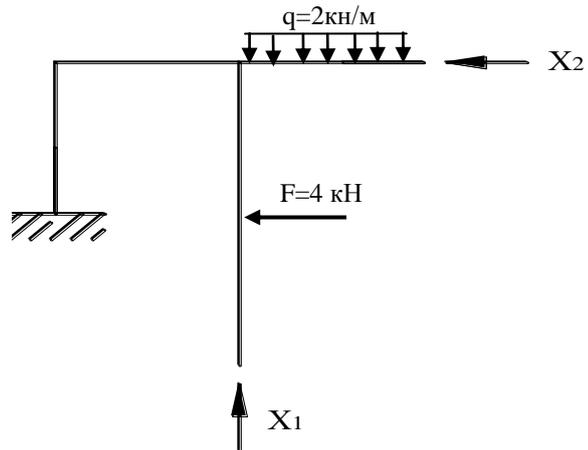


Рис.23

4. Составляем канонические уравнения:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

5. Строим единичные эпюры: к основной системе прикладываем сначала  $\bar{X}_1=1$ , затем  $\bar{X}_2=1$ .

а) Построение эпюры  $\bar{M}_1$  (рис.24)

$$\begin{aligned} M_1 &= X_1 \cdot 1 = 1 \cdot 8 = 8 \text{ кНм} \\ M_2 &= X_1 \cdot 1 = 1 \cdot 8 = 8 \text{ кНм} \\ M_3 &= X_1 \cdot 1 = 1 \cdot 8 = 8 \text{ кНм} \\ M_4 &= 0 \quad M_5 = 0 \\ M_6 &= 0 \quad M_7 = 0 \\ M_8 &= 0 \quad M_9 = 0 \\ M_{10} &= 0 \end{aligned}$$

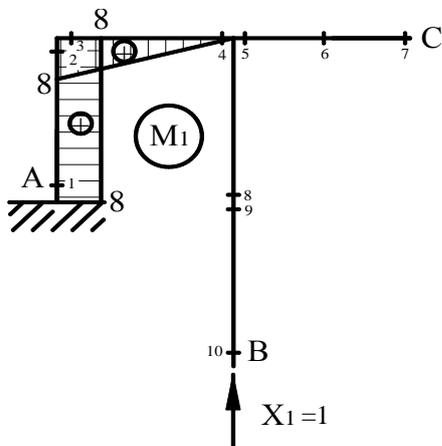


Рис.24

б) Построение эпюры  $\bar{M}_2$  (рис.25)

$$\begin{aligned} M_1 &= X_1 \cdot 1 = 1 \cdot 8 = 8 \text{ кНм} \\ M_2 &= 0 \\ M_3 &= 0 \\ M_4 &= 0 \quad M_5 = 0 \\ M_6 &= 0 \quad M_7 = 0 \\ M_8 &= 0 \quad M_9 = 0 \\ M_{10} &= 0 \end{aligned}$$

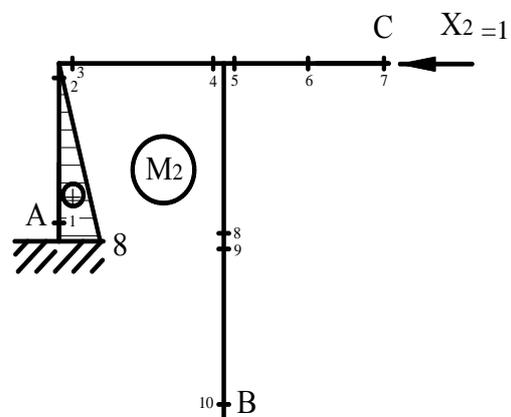


Рис.25

6. Строим грузовую эпюру моментов. К основной системе прикладываем всю заданную внешнюю нагрузку (рис.26).

$$M_1 = -q \cdot L \cdot 1,5L = -2 \cdot 8 \cdot 12 = -192 \text{ кНм}$$

$$M_2 = -q \cdot L \cdot 1,5L - F \cdot h = -2 \cdot 8 \cdot 12 - 4 \cdot 8 = -224 \text{ кНм}$$

$$M_3 = -q \cdot L \cdot 1,5L - F \cdot h = -2 \cdot 8 \cdot 12 - 4 \cdot 8 = -224 \text{ кНм}$$

$$M_4 = -q \cdot L \cdot L/2 - F \cdot h = -2 \cdot 8 \cdot 4 - 4 \cdot 8 = -96 \text{ кНм}$$

$$M_5 = -q \cdot L \cdot L/2 = -2 \cdot 8 \cdot 4 = -64 \text{ кНм}$$

$$M_6 = -q \cdot L/2 \cdot L/4 = -2 \cdot 4 \cdot 2 = -16 \text{ кНм}$$

$$M_7 = 0 \quad M_8 = F \cdot h = 4 \cdot 8 = 32 \text{ кНм}$$

$$M_9 = M_{10} = M_{11} = 0.$$

7. Определяем коэффициенты канонических уравнений по формуле Симпсона:

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_1 = \frac{8}{6EI_1} (8 \cdot 8 + 4 \cdot 8 \cdot 8 + 8 \cdot 8) + \frac{8}{6EI_2} (8 \cdot 8 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 0) = \frac{1280}{3EI_2};$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \times \bar{M}_2 = \frac{8}{6EI_1} (8 \cdot 8 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 0) = \frac{256}{3EI_2};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_2 = \frac{8}{6EI_1} (8 \cdot 8 + 4 \cdot 4 \cdot 8 + 0) = \frac{384}{3EI_2};$$

$$\Delta_{1F} = M_F \times \bar{M}_1 = \frac{8}{6EI_1} (-192 \cdot 8 - 4 \cdot 208 \cdot 8 - 224 \cdot 8) + \frac{8}{6EI_2} (-224 \cdot 8 - 4 \cdot 160 \cdot 4 + 0) = -\frac{37376}{3EI_2};$$

$$\Delta_{2F} = M_F \times \bar{M}_2 = \frac{8}{6EI_1} (-192 \cdot 8 - 4 \cdot 208 \cdot 4 - 224 \cdot 0) = -\frac{9728}{3EI_2}$$

8. Проверяем коэффициенты канонических уравнений.

Для этого строим суммарную единичную эпюру (рис.27): к основной системе прикладываем одновременно  $\bar{X}_1=1$  и  $\bar{X}_2=1$ . Эпюра  $M_s = M_1 + M_2$ .

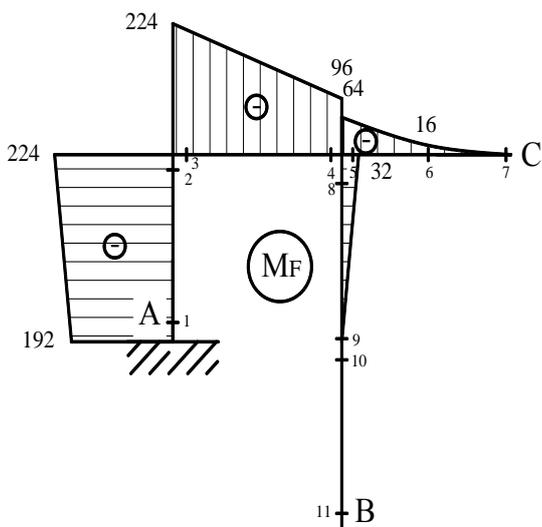


Рис. 26

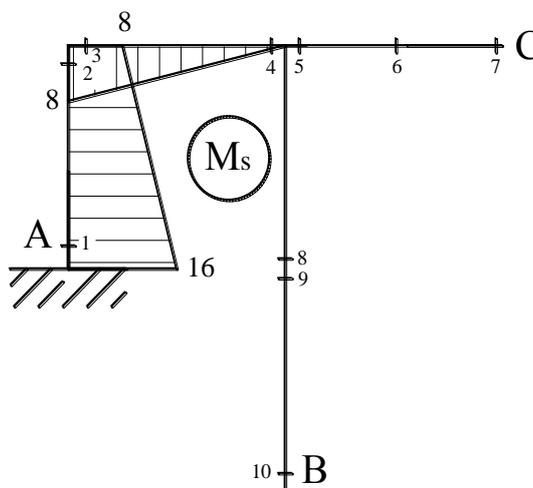


Рис. 27

а) Первая проверка заключается в равенстве:  $M_s \cdot M_s = \sum \delta_{ij}$

$$\bar{M}_s \times \bar{M}_s = \frac{8}{6EI_1} (16 \cdot 16 + 4 \cdot 12 \cdot 12 + 8 \cdot 8) + \frac{8}{6EI_2} (8 \cdot 8 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 0) = \frac{2304}{3EI_2};$$

$$\sum \delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{1280}{3EI_2} + 2 \frac{384}{3EI_2} + \frac{256}{3EI_2} = \frac{2304}{3EI_2}$$

б) Вторая проверка заключается в равенстве:  $M_s \cdot M_F = \sum \Delta_{iF}$

$$M_F \times \bar{M}_s = \frac{8}{6EI_1} (-192 \cdot 16 - 4 \cdot 208 \cdot 12 - 224 \cdot 8) + \frac{8}{6EI_2} (-224 \cdot 8 - 4 \cdot 160 \cdot 4 + 0) = -\frac{47104}{3EI_2};$$

$$\sum \Delta_{iF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} = -\frac{37376}{3EI_2} - \frac{9728}{3EI_2} = -\frac{47104}{3EI_2}.$$

Все проверки выполняются, значит, коэффициенты определены верно.

9. Решаем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} 1280x_1 + 384x_2 - 37376 = 0 & X_1 = 32,36 \text{ кН} \\ 384x_1 + 256x_2 - 9728 = 0 & X_2 = -10,55 \text{ кН} \end{cases}$$

10. Строим окончательную эпюру моментов  $M_{ок}$  (рис.28) по формуле:

$$M_{ок} = M_F + \bar{M}_1 \cdot x_1 + \bar{M}_2 \cdot x_2$$

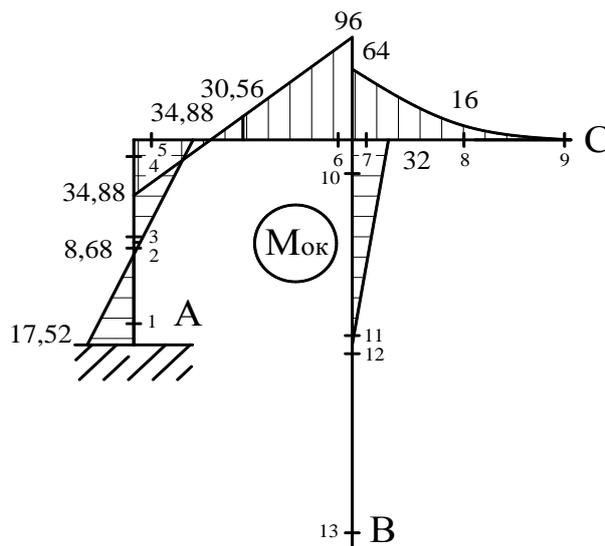


Рис. 28

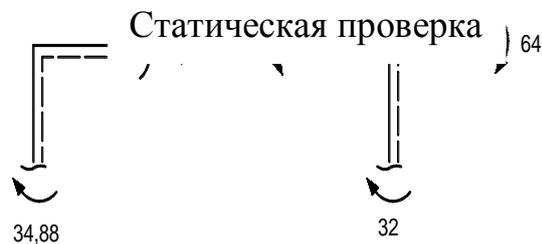


Рис.29

$$M_1 = -192 + 8 \cdot 32,36 + 8(-10,55) = -17,52 \text{ кНм}$$

$$M_2 = M_3 = 8,68 \text{ кНм}, M_4 = M_5 = -224 + 8 \cdot 32,36 = 34,88 \text{ кНм}$$

$$M_6 = -96 \text{ кНм}, M_7 = -64 \text{ кНм}, M_8 = -16 \text{ кНм}$$

$$M_9 = 0 \text{ кНм}, M_{10} = 32 \text{ кНм}, M_{11} = M_{12} = M_{13} = 0 \text{ кНм}.$$

11. Проверки окончательной эпюры моментов  $M_{ок}$ :

а) статическая проверка: заключается в проверке равновесия вырезанных узлов. Вырезается узел, пунктирной линией показываются растянутые волокна, прикладываются узловые моменты со стороны растянутых волокон и проверяется равновесие вырезанного узла (рис.29)

б) деформационная проверка: заключается в определении перемещений по направлению отброшенных связей. Эти перемещения должны быть равны нулю. Ошибка может составлять не более 5%.

$$M_{ок} \times \bar{M}_s = \frac{8}{6EI_1} (-17,52 \cdot 16 + 4 \cdot 8,68 \cdot 12 + 34,88 \cdot 8) +$$

$$+ \frac{8}{6EI_2} (34,88 \cdot 8 - 4 \cdot 30,56 \cdot 4 + 0) = \frac{277 - 280}{EI_2} \approx 0.$$

Ошибка составляет:  $\Delta = \frac{277 - 280}{280} 100\% = 1,07\% (< 5\%)$ , что допустимо.

12. По эюре  $M_{OK}$  строим эюру поперечных сил  $Q$  (рис.31) с использованием

формулы:  $Q(z) = \frac{ql}{2} + \frac{M^{np} - M^{лев}}{l} - qz$ ,

где  $M^{np}$  и  $M^{лев}$  – моменты с эюры  $M_{OK}$ , соответственно с правой и с левой стороны участка (рис.30). Моменты берутся со своими знаками,  $l$  - длина участка,  $q$  - распределенная нагрузка на участке. Если нагрузки на участке нет, и эюра моментов представляет собой прямую линию, то в формуле полагаем  $q=0$ .

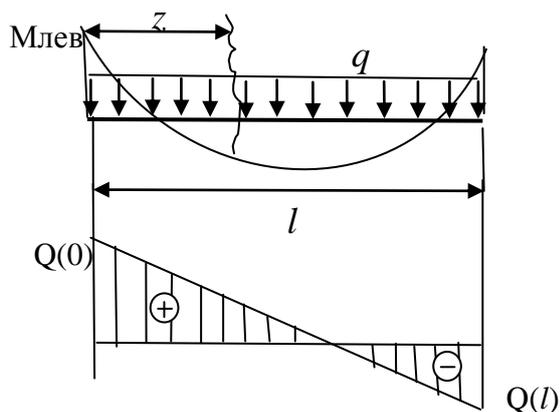


Рис. 30

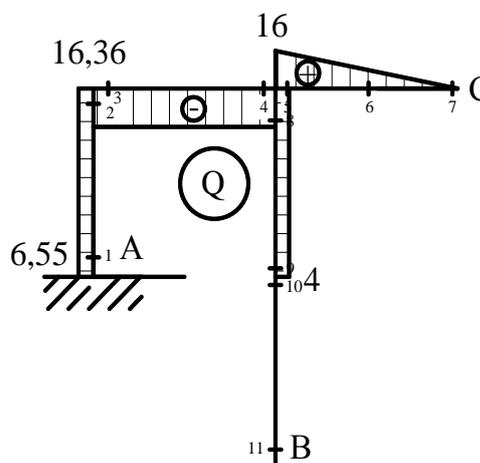


Рис.31

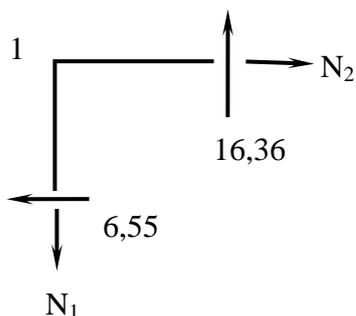
$$Q_{1-2} = \frac{34,88 - (-17,52)}{8} = 6,55 \text{ кН}, \quad Q_{3-4} = \frac{-96 - 34,88}{8} = -16,36 \text{ кН},$$

$$Q_7 = \frac{2 \cdot 8}{2} + \frac{0 - (-64)}{8} = 16 \text{ кН}, \quad Q_5 = \frac{2 \cdot 8}{2} + \frac{0 - (-64)}{8} - 2 \cdot 8 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_{8-9} = \frac{32 - 0}{8} = 4 \text{ кН}, \quad Q_{10-11} = 0 \text{ кН}.$$

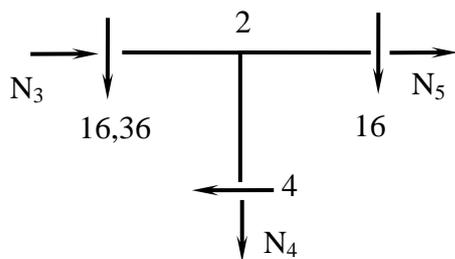
13. По эюре  $Q$  строим эюру продольных сил  $N$  (рис.32): вырезаем узел, к узлу прикладываем неизвестные продольные силы в положительном направлении (от узла - растяжение), затем известные поперечные силы с эюры  $Q$  со своим знаком (+ по часовой стрелке) и рассматриваем равновесие данного узла.

Вырезаем узел 1



$$\sum x = 0, \quad -6,55 + N_2 = 0, \quad N_2 = 6,55 \text{ кН}$$

$$\sum y = 0, \quad 16,36 - N_1 = 0, \quad N_1 = 16,36 \text{ кН}$$



Вырезаем узел 2

$$\sum X = 0, \quad -N_3 + N_5 - 4 = 0$$

$$N_5 = 6,55 + 4 = 10,55 \text{ кН}$$

$$\sum Y = 0, \quad -N_4 - 16,36 - 16 = 0$$

$$N_4 = -32,36 \text{ кН}$$

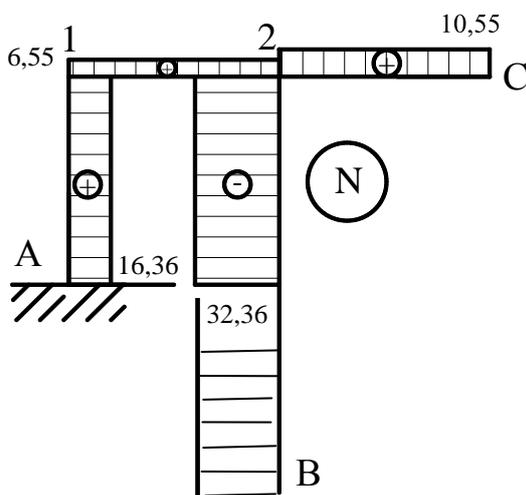


Рис.32

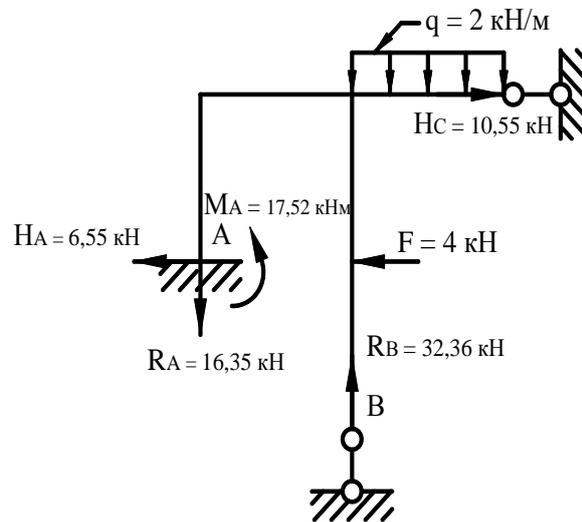


Рис.33

14. Общая статическая проверка: зарисовывается исходная рама, в опорах показываются все реакции (их числовые значения необходимо брать с построенных эпюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  с учетом знаков), и проверяется равновесие рамы в целом (рис.33).

$$\sum X = 0, \quad H_A - F - H_C = 0, \quad -6,55 - 4 + 10,55 = 0, \quad 0 = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad -R_A + R_B - q \cdot l = 0, \quad -16,36 + 32,36 - 2 \cdot 8 = 0, \quad 0 = 0$$

$$\sum M_B = 0, \quad H_A \cdot h + R_A \cdot l - M_A - F \cdot h + q \cdot l \cdot l/2 - H_C \cdot 2h = 0$$

$$-6,55 \cdot 8 - 16,36 \cdot 8 - 17,52 - 4 \cdot 8 + 2 \cdot 8 \cdot 4 + 10,55 \cdot 2 \cdot 8 = 0, \quad 0 = 0.$$

Все проверки выполняются.

## Библиографический список

1. Дарков, А. В. Строительная механика: учебник/ А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. - Изд. 12-е, стер. - СПб. [и др.]: Лань, 2010. - 655 с.
2. Смирнов, В. А. Строительная механика: учебник для бакалавров по направлению "Архитектура"/ В. А. Смирнов, А. С. Городецкий; под ред. В. А. Смирнова. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Юрайт, 2013. - 422 с.
3. Бабанов, В. В. Строительная механика: учебник для вузов по направлению "Строительство": в 2 т. Т. 1/ В. В. Бабанов. - 2-е изд., стер. - М.: Академия, 2012. - 303 с.
4. Бабанов, В. В. Строительная механика: учебник для вузов по направлению "Строительство" : в 2 т. Т. 2/ В. В. Бабанов. - 2-е изд., стер. - М.: Академия, 2012. - 285 с.
5. Сборник задач по строительной механике: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по строительным специальностям/ Л. В. Кроткова, А. И. Филипович, В. Г. Архипов, Е. В. Луцык. - М.: АСВ, 2011. - 224 с.
6. Анохин, Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. Ч. I: Статически определимые системы/ Н. Н. Анохин. - 3-е изд., доп. и перераб. - М.: АСВ, 2010. - 333 с.
7. Анохин, Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. Ч. II: Статически неопределимые системы/ Н. Н. Анохин. - 3-е изд., доп. и перераб. - М.: АСВ, 2010. - 464 с.
8. Строительная механика: основы теории с примерами расчетов учебник для вузов по техн. специальностям/ А. Е. Саргсян, А. Т. Демченко, Н. В. Дворянчиков, Г. А. Джинчвелашвили; под ред. А. Е. Саргсяна. - М.: Высш. шк., 2000. - 416 с.

---

Подписано в печать 6.03.2014.	Усл. печ. л. 2,25	Тираж	экз.
Печать офсетная.	Бумага писчая.	Заказ №	_____.

---

Отпечатано: РИО ВоГУ, г. Вологда, ул. Ленина, 15