

Министерство образования и науки Российской Федерации
Вологодский государственный университет

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов заочной формы обучения

Факультет экологии

Направление: 08.03.01 «Строительство»

Профиль: Водоснабжение и водоотведение

Вологда
2015

УДК 51:378.147 (076)

Математика : методические указания и контрольные задания для студентов первого курса заочной формы обучения. – Вологда: ВоГУ, 2015. – 40 с.

Данные методические указания включают в себя две контрольные работы: по алгебре и математическому анализу. Каждая работа состоит из пяти заданий по 30 вариантов каждое. Методические указания предлагаются для студентов заочной формы обучения 1 курса направления 08.03.01 факультета экологии.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Составитель: А.А. Абильдин, канд. техн. наук, доцент

Рецензент: В.А. Быстроумов, канд. техн. наук, доцент

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания предназначены для самостоятельного изучения основ некоторых разделов курса «Высшая математика» студентами заочной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство». В них даны указания, теоретические сведения, разобраны типовые примеры. Студент не должен ограничиваться рассмотрением только этих примеров, а может закрепить свои знания, решая примеры из соответствующих разделов сборников задач по алгебре и математическому анализу. Указана литература, приведены задания для контрольных работ №1 и №2.

ТЕМА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, имеющая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} - называются элементами матрицы A .

Примечание. Матрицу $A_{m \times n}$ можно представить в виде совокупности m вектор-строк или n вектор-столбцов, т.е.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \dots \\ \bar{a}_m \end{pmatrix} = (\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \dots \quad \bar{a}_n).$$

Матрица, у которой количество строк равно количеству столбцов, называется квадратной.

Квадратная матрица, имеющая единицу по главной диагонали и нули на всех остальных местах, является единичной и обозначается E , т.е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1. Действия с матрицами

1. Транспонирование матриц

Транспонированием матриц называется такое преобразование исходной матрицы, когда столбцы преобразуются в строки и наоборот - строки в столбцы.

Пример 1. Транспонируя матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, получим $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. Сложение

Суммой двух матриц является третья матрица той же размерности, каждый элемент которой представляет сумму двух соответствующих элементов слагаемых матриц: $C = A + B$; $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример 2. Складываем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ получим } C = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Умножение матрицы на скаляр

Произведением матрицы на скаляр λ является матрица

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = \|\lambda a_{ij}\|.$$

Каждый элемент матрицы A умножен на скаляр λ .

4. Умножение матриц

Произведением матрицы $A_{m \times n}$ на матрицу $B_{n \times r}$ называется новая матрица $C_{m \times r}$, каждый элемент которой представляет скалярное произведение соответствующей вектор-строки левой матрицы на вектор-столбец правого множителя:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times r} = C_{m \times r},$$

$$\text{где } c_{ik} = a_{ij} \cdot b_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Пример 3.

Рассмотрим произведение $A_{2 \times 4} \cdot B_{4 \times 3} = C_{2 \times 3}$ или

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 5 & 21 \\ 1 & -3 & 13 \end{pmatrix},$$

где $C_{11} = 14$ представляет скалярное произведение вектор-строки $(2; 3; 1; 0)$ на вектор-столбец $(4; 2; 0; 1)$, т.е. $C_{11} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 14$ и т.д.

Правило. Перемножать можно матрицы только в том случае, когда количество столбцов первой (левой) матрицы равно количеству строк второй (правой) матрицы.

Свойства операции умножения матрицы.

- a) $A(B+C)=AB+AC$
- b) $(A+B)C=AC+BC$
- c) $C(AB)=(CA)B$
- d) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Определителем 2-го порядка называется число, получаемое из элементов матрицы 2-го порядка, представленных в виде квадратной таблицы. Он равен разнице произведений чисел, расположенных по главной и побочной диагоналям:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - элементы определителя;

(a_{11}, a_{22}) , - главная диагональ;

(a_{12}, a_{21}) - побочная диагональ.

Определителем 3-го порядка называется число, которое можно найти по следующей формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}.$$

Определитель третьего порядка, также можно найти по теореме Лапласа:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3}$$

- это разложение по i-й строке. Чтобы вычислить алгебраическое дополнение A_{i1} элемента a_{i1} , вычеркнем мысленно из матрицы, например, вторую ($i = 2$) строку и первый столбец, на пересечении которых стоит a_{21} . Оставшемуся определителю второго порядка припишем знак $(-1)^{2+1}$:

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13})$$

Следующий элемент во второй строке a_{22} , а алгебраическое дополнение

элемента a_{23} будет $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{12})$.

1.2. Обратная матрица

Пусть **A** - квадратная матрица. Матрица **B** называется обратной для матрицы **A**, если произведение этих матриц равно единичной матрице, т.е. $AB = BA = E$.

Если определитель квадратной матрицы не равен нулю, то эта матрица имеет обратную и притом единственную.

Правило. Для вычисления обратной матрицы необходимо осуществить следующие операции:

1. Вычислить определитель $|A|$ исходной матрицы; если он не равен нулю, то обратная матрица существует.

2. Вычислить алгебраические дополнения элементов исходной матрицы: $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{n1}, \dots, A_{nn}$.

3. Составить из алгебраических дополнений матрицу $\|A_{ij}\|$.

4. Транспонируя полученную матрицу, получить присоединенную $A^* = \|A_{ij}\|^T$.

5. Разделив присоединенную матрицу на определитель, получить обратную матрицу $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$,

6. Сделать проверку $A_n^{-1} \cdot A_n = E_n$

Пример 4. Вычислить обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Проводим расчеты по пунктам, описанным выше:

1.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-2) - (2 + 1) + 0 = -9 \neq 0.$$

2.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

3.

$$\|A_{ij}\| = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -7 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

4.

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & -7 & -2 \end{pmatrix}.$$

5.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ТЕМА 2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Метод обратной матрицы

Пример 1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 7 \\ -2x_1 + x_2 = -5 \end{cases}$.

Запишем систему в матричном виде: вместо $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 7 \\ -2x_1 + x_2 = -5 \end{cases}$ имеем

$$A\bar{x} = \bar{b}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}, \text{ то } \bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}.$$

Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}{11} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}.$$

Затем из каждой 2-й, 3-й, ..., m -й строки матрицы (3) вычитаем почленно первую строку умноженной соответственно на $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{m1}$, при этом результат вычитания получится в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{\alpha_{11}} \dots & \frac{a_{1n}}{\alpha_{11}} & \frac{b_1}{\alpha_{11}} \\ 0 & \alpha_{22} \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{m2} \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix} \quad (4)$$

где $\alpha_{22} = a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}, \dots, \beta_2 = b_2 - a_{21} \frac{b_1}{a_{11}}.$

Повторяя указанную операцию необходимое число раз, получим матрицу вида

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha_{12} \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \gamma_{2n} & \delta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \gamma_{mn} & \delta_m \end{array} \right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ x_2 + \dots + \gamma_{2n}x_n = \delta_2 \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_{mn}x_n = \delta_m \end{array} \right.$$

Пользуясь тем, что система имеет треугольный вид, её можно решать последовательно, начиная с последнего уравнения.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \quad (5)$$

Матрица этой системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad (6)$$

Первую строку матрицы (6) умноженную на 2 и на 3 вычитаем из второй и третьей, соответственно

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & -2 & -7 & 0 \end{array}\right) \quad (7)$$

Далее, к третьей строке матрицы (7) прибавив вторую, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -12 & 6 \end{array} \right)$$

соответствующей системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 - 5x_3 = 6 \\ -12x_3 = 6 \end{cases}$$

Значит, решением системы (5) будет

$$x_3 = -0.5, x_2 = 3 - 2.5 \cdot 0.5 = \frac{7}{4}, x_1 = 4 - \frac{7}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

ТЕМА 3. ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Вектором называется направленный отрезок $\overline{AB}$. Точка А называется началом вектора, точка В – концом вектора. Векторы обозначают так же строчными буквами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ и пишут $\vec{a} = \overline{AB}, \vec{b} = \overline{CD}, \dots$. Длину вектора $\vec{a}$ обозначаем через $|\vec{a}|$. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются коллинеарными между собою, если все они, будучи приложенными в одной и той же точке, оказываются лежащими на одной прямой. Если векторы расположены в одной либо в параллельных плоскостях, то они называются компланарными.

Базисом (максимальной линейно независимой системой векторов) n -мерного пространства называется линейно независимое множество векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$ через которые посредством линейных комбинаций может быть выражен любой вектор этого пространства.

Пример 1. Вектор $\vec{a} = [2; 3; 4]$ может быть разложен единственным образом по векторам $\vec{e}_1 = [1; 0; 0]$, $\vec{e}_2 = [0; 1; 0]$, $\vec{e}_3 = [0; 0; 1]$, которые образуют базис пространства $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$.

3.1. Действия над векторами

1. Сложение векторов.

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Прилагаем вектор $\vec{a}$ к какой-нибудь точке А, получаем $\vec{a} = \overline{AB}$; прилагаем $\vec{b}$ к точке В, получаем $\vec{b} = \overline{BC}$. По определению вектор $\overline{AC} = \vec{c}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е.

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

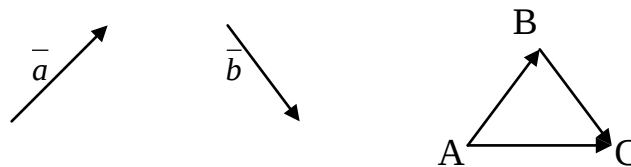


Рис. 1

2. Умножение вектора на число

Если отношение вектора $\overrightarrow{CD}$ к вектору $\overrightarrow{AB}$ равно числу λ , то пишут $\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}} = \lambda$ или $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Поэтому нахождение вектора $\overrightarrow{CD}$, отношение которого к данному вектору $\overrightarrow{AB}$ равно данному числу λ , называется умножением вектора на это число λ .

3. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов a и b называется число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$a \cdot b = |a| |b| \cos(a, b) \quad (8)$$

Из формулы (1) для ненулевых векторов можно вычислить косинус угла $\cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$. Предположим в пространстве задан декартов базис (i, j, k) и два вектора $\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k$, $\vec{b} = b_x i + b_y j + b_z k$, то скалярное произведение векторов и длина вектора вычисляются по формулам:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$
$$|a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Условие перпендикулярности векторов: $a \cdot b = 0$ или

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

Условие коллинеарности векторов:

$$a = \lambda b \quad \text{или} \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \quad (9)$$

4. Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов a и b называется вектор c , который обозначается символом $c = a \times b$ и удовлетворяет следующим трём условиям:

- 1) вектор c перпендикулярен плоскости векторов a и b ;
- 2) образует с векторами a и b правую тройку;
- 3) длина вектора c численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах a и b , т.е.

$$|c| = |a| \cdot |b| \sin(a, b) \quad (10)$$

Из свойств векторного произведения следует обратить внимание на антикоммутативность, т.е. $a \times b = -b \times a$

В декартовом базисе $\{i, j, k\}$ векторное произведение векторов $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ назовем вектор

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Пример 2. Найти координаты вектора $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, если он перпендикулярен векторам $\vec{a}_1(2, -3, 1)$ и $\vec{a}_2(1, -2, 3)$ и удовлетворяет условию;

$$\bar{b}(i + 2j - 7k) = 10.$$

Вектор $\bar{b}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. Поэтому его можно искать в виде:

$$b = \lambda(a_1 \times a_2) = \lambda \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \lambda(-7i - 5j - k); b = -7\lambda i - 5\lambda j - \lambda k$$

Удовлетворим условию $\bar{b}(i + 2j - 7k) = 10$; $-7\lambda - 10\lambda + 7\lambda = 10$; $-10\lambda = 10$, $\lambda = -1$.

Таким образом вектор имеет вид: $\bar{b} = 7i + 5j + k$.

Пример 3. Вычислить площадь треугольника, вершины которого расположены в точках $A(1,2,3)$, $B(2,1,-1)$, $C(3,-1,1)$. $S_{\Delta ABC} = 1/2 |\overline{AB} \times \overline{AC}|$ (§12,(2);[2]). Вычислим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ и векторное произведение $\overline{AB} \times \overline{AC}$.

$$\overline{AB}(1,-1,-4); \overline{AC}(2,-3,-2); \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -10i - 6j - k;$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{10^2 + 6^2 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{137} (ед^2)$$

5. Смешанное произведение трёх векторов

Если векторы a, b, c некопланарны, то смешанное произведение $(a \times b) \cdot c$ равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c , взятому со знаком "+", если упорядоченная тройка векторов a, b, c - правая, и со знаком "-", если эта тройка - левая.

Если в декартовом базисе (i, j, k) заданы векторы $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$ и

$$\bar{c}(c_x, c_y, c_z)$$

то смешанное произведение определяется формулой

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (11)$$

Условием компланарности этих векторов является соотношение

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 4. Вычислить длину высоты тетраэдра $ABCD$, проведённую из вершины D к основанию ABC , если вершины тетраэдра имеют координаты:

$A(1,2,0)$, $B(2,1,1)$, $C(0,-3,-1)$, $D(3,3,4)$. Найдём координаты векторов, выходящих из вершины A :

$AB(1,-1,1)$, $AC(-1,-5,-1)$, $AD(2,1,4)$. Как известно из элементарной геометрии, объем V тетраэдра равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, т. е. $V_{\text{тетр}} = 1/6(|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}|)$ или $V_{\text{тетр}} = 1/3(S_{\Delta ABC} \cdot H_D)$.

Отсюда: $H_D = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}}$, где $S_{\Delta ABC} = 1/2 (|\overline{AB} \times \overline{AC}|)$.

ТЕМА 4. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

называется общим уравнением плоскости. В этом уравнении коэффициенты A, B, C координаты вектора $\overline{n}(A, B, C)$, перпендикулярного плоскости.

Если в пространстве, в котором установлена система координат $Oxyz$, соответствующая некоторому базису (i, j, k) , задана прямая l , то она определяется как пересечение двух плоскостей системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Соотношения } \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (12)$$

представляют собой уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\overline{a}(m, n, p)$.

Пример 1. Перейти от общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 2 = 0 \\ x - y - 3z + 6 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

к каноническим уравнениям. Прежде всего выберем какую-нибудь точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$; для этого следует задать численное значение одной из неизвестных переменных x_0, y_0, z_0 и подставить его вместо соответствующей переменной в уравнения системы (13). После этого две другие переменные определяются путем совместного решения уравнения системы. Направляющий вектор прямой

$$\text{может быть выбран в виде } \overline{a} = \overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -5i + 5j - 5k,$$

где $\overline{n_1}(2, 3, -1)$ и $\overline{n_2}(1, -1, -3)$ – нормальные векторы к плоскостям, пересечением которых и задается прямая. Канонические уравнения прямой мы получим, подставляя координаты точки M_0 и направляющего вектора $\overline{a}$ в уравнения (12):

$$\frac{x}{-5} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-5} \quad \text{или} \quad \frac{x}{-1} = y = \frac{z-2}{-1}.$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, 2, 3)$ параллельно векторам $\overline{a}(3, -1, 0)$ и $\overline{b}(2, 1, 2)$.

Плоскость параллельна векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, поэтому вектор нормали к плоскости $\overline{n}(A, B, C)$ равен векторному произведению векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и находится по

формуле $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 6j + 5k$. Уравнение искомой плоскости, имеющей нормальный вектор $\vec{n} = (-2, -6, 5)$, имеет вид $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ или $-2(x-1) - 6(y-2) + 5(z-3) = 0$.

ТЕМА 5. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Всякий ненулевой вектор $\vec{X} (x_1, x_2, x_3)$ называется собственным вектором линейного преобразования, если

$$A \vec{X} = \lambda \vec{X}, \quad (14)$$

где λ - некоторое число, называемое собственным значением (числом) линейного преобразования.

Если A - матрица линейного преобразования, X - матрица-столбец из координат вектора $\vec{X}$, то равенство (14) можно записать в матричном виде

$$AX = \lambda X.$$

Переносим члены в одну сторону, получим

$$AX - \lambda X = 0 \text{ или } (A - \lambda E)X = 0. \quad (15)$$

Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ для собственных значений называется характеристическим уравнением.

Если матрица A имеет вид $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то равенство (15) записывается в

виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}. \quad (16)$$

Система (16), однородная, имеет отличные от нуля (нетривиальные) решения только тогда, когда определитель равен нулю, т.е.

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (17).$$

Каждый действительный корень λ уравнения (17) является собственным числом. Соответствующие собственному числу координаты собственного вектора находятся из системы (16).

Пример 1. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы линейного преобразования

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Система однородных линейных алгебраических уравнений (16) для нахождения собственных векторов имеет вид

$$\begin{aligned}(11-\lambda)x_1+2x_2-8x_3&=0; \\ 2x_1+(2-\lambda)x_2+10x_3&=0; \\ -8x_1+10x_2+(5-\lambda)x_3&=0.\end{aligned}\tag{18}$$

Вычислим определитель системы (18) и решим соответствующее характеристическое уравнение.

Характеристическое уравнение имеет вид

$\lambda^3-18\lambda^2-81\lambda+1458=0$, а его решение $\lambda_1=9$, $\lambda_2=18$, $\lambda_3=-9$. Найденные значения λ подставим в (18).

Решение этой системы при $\lambda_1=9$ $x_1=C(2,2,1)^T$, $C \in \mathbb{R}$, а соответствующий единичный вектор $x_1^0=(2/3, 2/3, 1/3)^T$; при $\lambda_2=18$ $x_2^0=(-2/3, 1/3, 2/3)^T$, при $\lambda_3=-9$ $x_3^0=(1/3, -2/3, 2/3)$.

ТЕМА 6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексными называются числа вида $z=x+iy$, где x и y -действительные числа, а $i^2=-1$. Число x называется действительной частью комплексного числа z , а число y – коэффициент при i – мнимой частью. Число $\bar{z}=x-iy$ называется сопряженным к числу $z=x+iy$. У сопряженных чисел равны действительные части, а мнимые отличаются только знаком. Числу z можно сопоставить вектор, направленный из начала O в точку z . Модуль $|z|$ комплексного числа z вычисляется по формуле

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Угол φ , образованный радиусом-вектором Oz (рис.2) с положительным направлением действительной оси Ox , называется аргументом числа z и обозначается $\text{Arg}z$.

Любое комплексное число z можно представить в алгебраической форме $z=x+iy$ и в тригонометрической форме $z=r(\cos\varphi+isin\varphi)$. Здесь $r=|z|$, $\varphi=\text{Arg}z$, причем различные значения аргумента φ отличаются на $2\pi k$, где k - целое число. Под главным значением аргумента понимается значение φ , удовлетворяющее условию $-\pi<\varphi<\pi$. Таким образом $\text{Arg}z=\arg z+2\pi k$.

Комплексные числа z еще можно представить в показательной форме $z=re^{i\varphi}$, где r и φ - то, что и в тригонометрической форме.

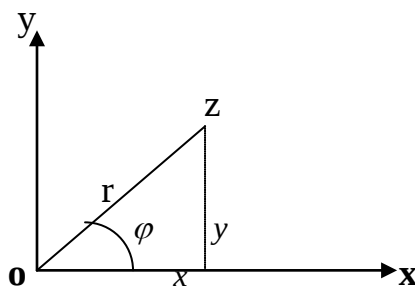


Рис. 2

Пример 1.

Найти корни уравнения $z^3 - \frac{\sqrt{2}}{1+i} = 0$.

Решение. Находим модуль и аргумент числа $\frac{\sqrt{2}}{1+i}$

$$\frac{\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$$

$$r = \left| \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = 1$$

$$\varphi = \arg \frac{\sqrt{2}}{1+i} = \arctg \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда корни данного уравнения определяем по формулам

$Z_k = \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{3} \right)$, $k = 0, 1, 2$, т.е. уравнение имеет три корня:

$$z_0 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right), \text{ при } k=0;$$

$$z_1 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} \right), \text{ при } k=1;$$

$$z_2 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} \right), \text{ при } k=2.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Задание 1. 1. Даны координаты вершин пирамиды A1, A2, A3, A4. Найти:

- 1) угол между ребром A1A4 и гранью A1A2A3;
- 2) площадь грани A1A2A3;
- 3) объем пирамиды;
- 4) уравнение плоскости A1A2A3;
- 5) уравнение высоты, опущенной из вершины A4 на грань A1A2A3. Сделать чертеж.

1. A1 (4; 2; 5), A2 (0; 7; 2), A3 (0; 2; 7), A4 (1; 5; 0).
2. A1 (4; 4; 10), A2 (4; 10; 2), A3 (2; 8; 4), A4 (9; 6; 4).
3. A1 (4; 6; 5), A2 (6; 9; 4), A3 (2; 10; 10), A4 (7; 5; 9).
4. A1 (3; 5; 4), A2 (8; 7; 4), A3 (5; 10; 4), A4 (4; 7; 8).
5. A1 (10; 6; 6), A2 (-2; 8; 2), A3 (6; 8; 9), A4 (7; 10; 3).

6. A1 (1; 8; 2), A2 (5; 2; 6), A3 (5; 7; 4), A4 (4; 10; 9).
7. A1 (6; 6; 5), A2 (4; 9; 5), A3 (4; 6; 11), A4 (6; 9; 3).
8. A1 (7; 2; 2), A2 (5; 7; 7), A3 (5; 3; 1), A4 (2; 3; 7).
9. A1 (8; 6; 4), A2 (10; 5; 5), A3 (5; 6; 8), A4 (8; 10; 7).
10. A1 (7; 7; 3), A2 (6; 5; 8), A3 (3; 5; 8), A4 (8; 4; 1).
11. A1 (3; -4; -2), A2 (2; 5; -2), A3 (4; 1; 3), A4 (-1; 2; 3).
12. A1 (1; 2; 3), A2 (0; 0; 0), A3 (1; 4; 9), A4 (1; 1; -1).
13. A1 (2; -1; 1), A2 (5; 5; 4), A3 (3; 2; -1), A4 (-1; -6; 3).
14. A1 (-1; 2; 3), A2 (1; 4; 4), A3 (5; 4; 6), A4 (3; -1; 1).
15. A1 (5; 1; 0), A2 (7; 0; 1), A3 (2; 1; 4), A4 (0; 3; -2).
16. A1 (1; 2; -3), A2 (3; 3; -1), A3 (4; 2; 1), A4 (-4; 2; 5).
17. A1 (-1; 1; 1), A2 (1; 3; 0), A3 (-2; 1; 2), A4 (3; 3; 4).
18. A1 (2; -1; 1), A2 (5; 5; 3), A3 (3; 1; 3), A4 (3; 3; -1).
19. A1 (-1; 0; 2), A2 (2; 2; 8), A3 (1; 1; 4), A4 (4; 1; 0).
20. A1 (1; 0; -2), A2 (3; 3; 4), A3 (2; 2; 0), A4 (1; -3; -1).
21. A1 (1; -3; 0), A2 (3; -1; 1), A3 (4; 1; 0), A4 (4; 2; 1).
22. A1 (3; 1; -1), A2 (4; 3; 1), A3 (6; 3; 5), A4 (2; -2; 4).
23. A1 (0; 1; -2), A2 (2; 2; 0), A3 (6; 4; 0), A4 (1; 0; -2).
24. A1 (2; 1; 3), A2 (4; -2; 0), A3 (1; 3; -8), A4 (3; 1; 3).
25. A1 (1; 1; 1), A2 (4; 4; -2), A3 (2; 0; 2), A4 (-2; 1; 0).
26. A1 (1; 2; 3), A2 (2; 18; -4), A3 (0; 15; 4), A4 (3; -1; 2).
27. A1 (0; 1; 2), A2 (2; 1; 7), A3 (2; 7; 34), A4 (3; 0; -3).
28. A1 (0; -2; -3), A2 (1; 2; 6), A3 (1; 6; 0), A4 (-1; 1; 1).
29. A1 (4; -3; -3), A2 (1; 2; -11), A3 (7; 4; -1), A4 (1; 2; 0).
30. A1 (4; 3; -3), A2 (2; -1; 1), A3 (0; 1; 1), A4 (3; 5; 3).

Задание 1.2. Написать канонические уравнения прямой.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $2x+y+z-2=0$, $2x-y-3z+6=0$. | 17. $2x-3y+z+6=0$, $x-3y-2z+3=0$. |
| 2. $x-3y+2z+2=0$, $x+3y+z+14=0$. | 18. $5x+y+2z+4=0$, $x-y-3z+2=0$. |
| 3. $x-2y+z-4=0$, $2x+2y-z-8=0$. | 19. $4x+y+z+2=0$, $2x-y-3z-8=0$. |
| 4. $x+y+z-2=0$, $x-y-2z+2=0$. | 20. $2x+y-3z-2=0$, $2x-y+z+6=0$. |
| 5. $2x+3y+z+6=0$, $x-3y-2z+3=0$. | 21. $x+y-2z-2=0$, $x-y+z+2=0$. |
| 6. $3x+y-z-6=0$, $3x-y+2z=0$. | 22. $x+5y-z+11=0$, $x-y+2z-1=0$. |
| 7. $x+5y+2z+11=0$, $x-y-z-1=0$. | 23. $x-y+z-2=0$, $x-2y-z+4=0$. |
| 8. $3x+4y-2z+1=0$, $2x-4y+3z+4=0$. | 24. $6x-7y-z-2=0$, $x+7y-4z-5=0$. |
| 9. $5x+y-3z+4=0$, $x-y+2z+2=0$. | 25. $x+5y+2z-5=0$, $2x-5y-z+5=0$. |
| 10. $x-y-z-2=0$, $x-2y+z+4=0$. | 26. $x-3y+z+2=0$, $x+3y+2z+14=0$. |
| 11. $4x+y-3z+2=0$, $2x-y+z-8=0$. | 27. $2x+3y-2z+6=0$, $x-3y+z+3=0$. |
| 12. $3x+3y-2z-1=0$, $2x-3y+z+6=0$. | 28. $3x+4y+3z+1=0$, $2x-4y-2z+4=0$. |
| 13. $6x-7y-4z-2=0$, $x+7y-z-5=0$. | 29. $3x+3y+z-1=0$, $2x-3y-2z+6=0$. |
| 14. $8x-y-3z-1=0$, $x+y+z+10=0$. | 30. $6x-5y+3z+8=0$, $6x+5y-4z+4=0$. |
| 15. $6x-5y-4z+8=0$, $6x+5y+3z+4=0$. | |
| 16. $x+5y-z-5=0$, $2x-5y+2z+5=0$. | |

Задание 1.3. Решить систему уравнений методом Гаусса и с помощью обратной матрицы

$$1. \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 12 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$12. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$13. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$16. \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

$$17. \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$18. \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + 7x_3 = 4 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -5 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 4x_1 - 5x_2 - 11x_3 = 7 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 14 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_3 - 2x_2 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Задание 1.4.

Найти собственные векторы и собственные значения линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей.

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad 3. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 6. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad 8. A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 9. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix} \quad 11. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad 12. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 8 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \quad 14. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad 15. A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad 17. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad 18. A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad 20. A = \begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -0.5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad 21. A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad 23. A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 24. A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad 26. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 27. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$28. A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix} \quad 29. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 30. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 1.5.

Дано комплексное число α :

- 1) Записать число α в алгебраической и тригонометрической формах.
- 2) Найти и изобразить на плоскости все корни уравнения $Z^3 + \alpha = 0$.

$$1. a = \frac{\sqrt{3}-i}{4i} \quad 2. a = \frac{-\sqrt{3}-i}{4i} \quad 3. a = \frac{2\sqrt{2}}{1+i} \quad 4. a = \frac{-\sqrt{3}-i}{4i}$$

$$\begin{array}{llll}
5. a = \frac{4}{1+i\sqrt{3}} & 6. a = \frac{4}{-1+i} & 7. a = \frac{2}{1+i} & 8. a = \frac{2}{-1-i} \\
9. a = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}} & 10. a = \frac{4}{\sqrt{3}-i} & 11. a = \frac{1+i}{(1+i)^2} & 12. a = \frac{4}{-1+i\sqrt{3}} \\
13. a = \frac{-2\sqrt{2}}{1+i} & 14. a = \frac{1+i\sqrt{3}}{-i} & 15. a = \frac{2\sqrt{2}}{1-i} & 16. a = \frac{-\sqrt{3}-i}{4i} \\
17. a = \frac{4}{2\sqrt{3}+2i} & 18. a = \frac{-i}{1+i\sqrt{3}} & 19. a = \frac{(1+i)^2}{\sqrt{3}-i} & 20. a = \frac{(1-i)^2}{\sqrt{3}+i} \\
21. a = \frac{6}{\sqrt{3}+i\sqrt{3}} & 22. a = \frac{4i}{2+2i} & 23. a = \frac{4}{2\sqrt{3}+2i} & 24. a = \frac{2\sqrt{3}-2i}{i} \\
25. a = \frac{2-2i}{i} & 26. a = \frac{1}{\sqrt{3}-i} & 27. a = \frac{-2+2i}{i} & 28. a = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{i} \\
29. a = \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{6i} & 30. a = \frac{i\sqrt{3}}{-1+i} & &
\end{array}$$

ТЕМА 7. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Не повторяя данных в учебнике определений и доказательств, рассмотрим ряд конкретных примеров, в которых отражена сущность теории пределов.

Пример 1.

Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2+x)^2 - (2-x)^2}{(x+3)^2 - (x+1)^2}$.

Здесь выражение под знаком пределов представляет собой отношение двух многочленов аргумента x . И числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности. В этом случае говорят, что имеется «неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Для отыскания предела следует раскрыть скобки и разделить числитель и знаменатель на высшую степень x .

Получаем

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2+x)^2 - (2-x)^2}{(x+3)^2 - (x+1)^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+4x+x^2-4+4x-x^2}{x^2+6x+9-x^2-2x-1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{4x+8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = 2
\end{aligned}$$

Так как $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Пример 2.

Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 6x + 1} - x)$.

Здесь мы имеем «неопределенность типа $(\infty - \infty)$ ».

Умножив и разделив эту разность на сопряженное выражение

$$\sqrt{x^2 + 6x + 1} + x, \text{ получим } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 6x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 6x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 6x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 6x + 1} + x}$$

Разделив числитель и знаменатель на высшую степень x , будем иметь

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 1}{\sqrt{x^2 + 6x + 1} + x} = 3.$$

Пример 3.

Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x - 1} \right)^{2x}$

В этом примере следует воспользоваться вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

Преобразовав выражение, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x - 1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1 + 5}{3x - 1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{3x - 1} \right)^{\frac{3x - 1}{5}} \right]^{\frac{5 \cdot 2x}{3x - 1}} = e^{\frac{10}{3}},$$

так как выражение в квадратных скобках стремится к e , а $\frac{5 \cdot 2x}{3x - 1} \rightarrow \frac{10}{3}$ при $x \rightarrow \infty$.

Пример 4.

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(20x) - \sin(10x)}{x}$.

Для решения применим предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Здесь при $x \rightarrow 0$ и числитель и знаменатель стремятся к нулю, получаем «неопределенность типа $\frac{0}{0}$ ». Используя формулу тригонометрии

имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(20x) - \sin(10x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(5x) \cdot \cos(15x)}{x}.$$

Заметим, что $\cos(15x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10 \sin(5x)}{5x} = 10.$$

Пример 5.

Найти точки разрыва функции $f(x) = \frac{\sin(1-x)}{2-\sqrt{x+3}}$. Изобразить график в окрестности точки разрыва.

Знаменатель $2 - \sqrt{x+3}$, при $x=1$ обращается в нуль и значит $f(x)$ при $x=1$ не существует, следовательно, $x=1$ - точка разрыва функции. Для определения типа разрыва надо найти пределы функции слева и справа при $x=1$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(2 + \sqrt{x+3}) \cdot \sin(1-x)}{(2 - \sqrt{x+3})(2 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(2 + \sqrt{x+3}) \cdot \sin(1-x)}{1-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+0} (2 + \sqrt{x+3}) \cdot \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\sin(1-x)}{1-x} = 4.\end{aligned}$$

При тех же рассуждениях получим $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 4$.

Итак, пределы функции слева и справа при $x \rightarrow 1$ равны, но в точке $x=1$ функция не определена, значит, точка устранимого разрыва. График функции в окрестности точки разрыва выглядит следующим образом:

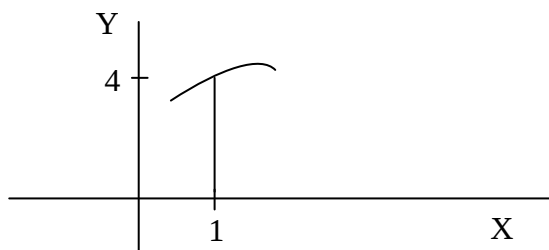


Рис. 3

Такой разрыв называют устранимым разрывом, так как доопределив функцию $f(x)$ надлежащим образом (положив при $x=1$ $f(x)=4$) получим непрерывную функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(1-x)}{2-\sqrt{x+3}}, & \text{если } x \neq 1 \\ 4, & \text{если } x = 1 \end{cases}.$$

ТЕМА 8. ПРОИЗВОДНАЯ

При освоении техники дифференцирования необходимо заучить таблицу производных основных элементарных функций и научиться пользоваться основными правилами дифференцирования. При этом особое внимание следует уделить дифференцированию сложных функций.

Пример 1. $y = (x^2 + 1)^5$.

Данную функцию можно представить в виде цепочки двух простых функций: $y = u^5$; $u = x^2 + 1$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Но $y'_u = 5u^4$, $u'_x = 2x$, а потому $y'_x = 5u^4 \cdot 2x = 10x(x^2 + 1)^4$.

Пример 2.

$$y = \sin \ln x.$$

Очевидно, что $y = \sin u$, $u = \ln x$ и тогда $y'_x = \cos u \cdot \frac{1}{x}$, так как

$$\cos u = \cos \ln x, \text{ то } y'_x = \frac{1}{x} \cos \ln x.$$

В двух рассмотренных примерах каждая из сложных функций содержала лишь один промежуточный аргумент u и поэтому разлагалась на цепочку из двух простых функций. В более сложных случаях промежуточных аргументов может оказаться больше одного.

Пример 3. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{3-2x}$ и построить ее график.

Область определения данной функции - вся числовая ось, кроме точки $x = \frac{3}{2}$. Функция не является ни четной, ни нечетной. Действительно,

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{3-2 \cdot (-x)} = \frac{x^2}{3+2x} \neq f(x) \text{ и } \neq -f(x).$$

Прямая $x = \frac{3}{2}$ есть вертикальная асимптота, так как точка $x = \frac{3}{2}$ есть точка разрыва второго рода.

Найдем угловой коэффициент наклонной асимптоты, предполагая, что такая существует: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(3-2x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3-2x} = \frac{1}{-2}$; $k = -\frac{1}{2}$.

Находим свободный член b для уравнения асимптоты: $y = -\frac{1}{2}x + b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{3-2x} + \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \frac{3}{2}x - x^2}{3-2x} = -\frac{3}{4}.$$

Итак, уравнение асимптоты: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.

Находим критические точки, т.е. точки, в которых первая производная обращается в нуль: $y' = \frac{2x(3-2x) - x^2(-2)}{(3-2x)^2} = \frac{2x(3-x)}{(3-2x)^2}$.

Производная обращается в нуль, если $2x(3-x) = 0$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$.

Подвергая испытанию каждую из этих двух точек, можно узнать, меняется ли знак производной при прохождении аргумента через точки 0 и 3:

а) $y' < 0$ при $x < 0$ (функция убывает), $y' > 0$ при $x > 0$ (функция y возрастает), следовательно, в точке $x=0$ функция y достигает минимума, причем $y_{\min} = y(0) = \frac{0^2}{3 - 2 \cdot 0} = 0$;

б) при $x < 3$ $y' > 0$ (возрастает); $x > 3$ $y' < 0$ (убывает).

Таким образом, в точке $x=3$ функция достигает максимума, равного

$$y_{\max} = y(3) = \frac{3^2}{3 - 2 \cdot 3} = -3.$$

Для уточнения графика функции найдем точки перегиба и установим направление вогнутости (выпуклости) кривой в различных интервалах, для чего обращаемся ко второй производной). Положительный множитель 2, входящий в первую производную, может быть отброшен, поскольку он не влияет на знак второй производной. Имеем

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(3-2x)^2(3-2x) - x(3-x) \cdot 2 \cdot (3-2x) \cdot (-2)}{(3-2x)^4} = \\ &= \frac{(3-2x)^2 + 4x(3-x)}{(3-2x)^3} = \frac{9}{(3-2x)^3}. \end{aligned}$$

Если $x < \frac{3}{2}$, то $y'' > 0$ и кривая обращена вогнутостью вверх.

При $x > \frac{3}{2}$ знаменатель $(3-2x)^3 < 0$ и $y'' = \frac{9}{(3-2x)^3} < 0$.

Следовательно, справа от точки разрыва кривая обращена вогнутостью вниз. Точек перегиба нет, y'' ни при каком значении из области определения не обращается в нуль. Принимая во внимание выводы всех предыдущих пунктов, строим график функции

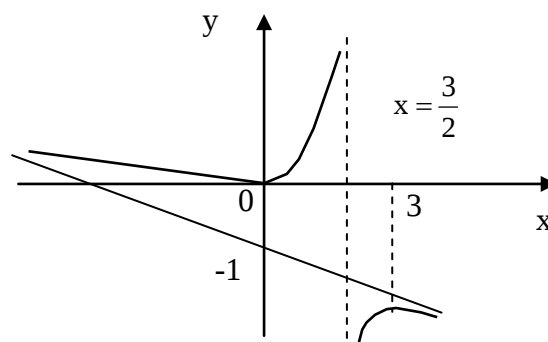


Рис. 4

ТЕМА 9. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Пример 1. Графически или аналитически отделить корень уравнения $e^x - x = 2$ и найти этот корень с точностью 0,001 по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - x - 2$. Методом «проб» устанавливаем, что $f(0) = -1$, а $f(2) = e^2 - 4 > 0$. Значит, на отрезке $[0, 2]$ есть корень данного уравнения. При этом $f'(x) = e^x - 1 > 0$, а $f''(x) = e^x > 0$ для всех $x \in [0, 2]$, т.е. сохраняют знак на $[0, 2]$. Значит, можно применить метод Ньютона. Обозначим начальное приближение через x_0 . Если $[a, b]$ промежуток, в котором изолирован корень функции $f(x)$, то за начальное приближение принимают $x=a$ и $x_0=b$, смотря по тому, в какой из этих точек знак произведения положителен. В данном случае $f(2)f''(2) > 0$, следовательно $x_0=2$.

Вычисление напомним в виде таблицы

Таблица 1

№/П	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$	x_{n+1}
0	2	3,3890	6,3890	0,5304	1,4696
1	1,4696	0,8789	3,3485	0,2625	1,2071
2	1,2071	0,1374	2,3445	0,0586	1,1485
3	1,1485	0,0048	2,1533	0,0022	1,1463
4	1,1463	0,0005	2,1468	0,0002	1,1461

Приближенное значение корня найдено с необходимой точностью, и оно равно 1,146.

ТЕМА 10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой теме важным разделом являются понятия экстремума функции двух переменных, уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

Уравнение касательной плоскости можно получить, используя геометрический смысл частных производных. Например, $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} /_M = \operatorname{tg} \alpha$, где α - угол между касательной прямой и осью Ox в точке M в сечении $y = \text{const}$. Аналогично и $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} /_M$. Плоскость, проходящая через эти две касательные прямые, будет искомой касательной плоскостью. Очевидно, направляющий вектор касательной прямой, связанной с z'_x , будет $\vec{n}_1 \left(\frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x}}, 0, \frac{z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x}} \right)$, а направляющий вектор

касательной прямой, связанной с z'_y , будет $\overline{n}_2(\frac{1}{\sqrt{1+z'^2_y}}, 0, \frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_y}})$, причем z'_x, z'_y берутся в точке касания $M(x_0, y_0, z_0)$. Текущий вектор касательной плоскости будет $\overline{n}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, где (x, y, z) – текущая точка касательной плоскости. Из векторной алгебры известно, что три вектора $\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}$ будут лежать в одной плоскости, если смешанное их произведение равно нулю:

$$\overline{n}_1 \overline{n}_2 \overline{n} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x}} & 0 & \frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_y}} & \frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_y}} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$z-z_0 = z'_x / M (x-x_0) + z'_y / M (y-y_0) \quad (19)$$

т.е. уравнение касательной плоскости. При неявном задании поверхности $F(x, y, z) = 0$ имеем:

$$z'_x = - \frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{и} \quad z'_y = - \frac{F'_y}{F'_z},$$

и уравнение (19) перепишется:

$$F'_x / M (x-x_0) + F'_y / M (y-y_0) + F'_z / M (z-z_0) = 0.$$

Отсюда следует уравнение нормали к поверхности в точке M

$$\frac{x-x_0}{F'_x} = \frac{y-y_0}{F'_y} = \frac{z-z_0}{F'_z}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Задание 2.1. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{1 - \cos x}$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 4x}$ | в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + x^2 - x + 5}$ |
| 2. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^2}{5x^2 - 4x - 1}$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sqrt{1+4x^3} - 1}$ | в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 3x \cdot \cos x}{x \cdot \operatorname{tg} 4x}$ |
| 3. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^x + 3x - 1}$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{9x^2}$ | в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x + 2}{3x^2 + x - 1}$ |

$$4. a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin 3x}$$

$$5. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^x + 3x - 1}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{(1 + \cos x)^2}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - x^2 + 3x^3}{2 - 3x - x^3}$$

$$6. a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 7x - 6}{x^2 - 4}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 2x}}{x}$$

B)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \operatorname{tg}^2 x}{x^2 \cos x}$$

$$7. a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}{(x^3 - 1)^2}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos 2x}{x^2 - \pi^2}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x - 2}{2x^4 - x + 1}$$

$$8. a) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{4x^2 - 4x + 1}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 - x}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \operatorname{tg} 3x}{\sin 4x \cdot (1 - \cos x)}$$

$$9. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} + 2^x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^2 - x}{x^3 - 1}$$

$$10. a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{6 - x - 2x^2}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x - x} - x}{x^2 - x - 2}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}^2 3x \cdot \sin^2 4x}{\left(1 - \cos \frac{x}{3}\right) \cdot x^2}$$

$$11. a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x^2 + 2x - 3}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{3}}{x^2 - 9}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16 - x^4}{x^4 - 2x + 3}$$

$$12. a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 3x - 2}{x^2 - 1}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x - 1} - 3}{x^2 - 25}$$

B)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 4x) \cdot \sin \pi x}{x^3 \cdot \operatorname{tg}^2 3x}$$

$$13. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x - x^2}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{3x - x^2}$$

$$14. a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - x - 15}{3x^2 - 8x - 3}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{\sqrt{5x - 6} - 2}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 2x \left(\frac{1}{\cos^2 3x} - 1 \right)}{3x \cdot \sin \frac{x}{3}}$$

$$15. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{2x^2+x} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3 - \frac{\pi}{x}}{(\frac{1}{2} - \cos x)^2} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x - x^2}{3x^2 + 4}$$

$$16. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^3 + 27} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - 2x^3}}{x^3} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 2x} - 1\right)}{\operatorname{tg} x \cdot \sin 3x}$$

$$17. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(x - \frac{\pi}{4})^2} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^x - 2}{x^2 + 3x} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 4}{x^3 + x^2 + 7x + 5}$$

$$18. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{10x^2 + 9x - 7}{4x^2 - 1} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^3+1}}{4x^3} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^4 2x \cdot \operatorname{ctg}^2 3x}$$

$$19. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 + \cos \frac{\pi x}{3}}{x^2 - 2x - 3} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sin^2 \pi x} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 6}{x^5 - 2x^3 + 9}$$

$$20. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x - 1}{x^2 - 3x + 2} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2+x-5}}{x^3 - 8} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \cos 2x)}{\sin^3 \frac{x}{2}}$$

$$21. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^5 - 4x^4 + 2}{3x^5 - 2x + 1} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$22. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^5 - 4x^4 + 2}{3x^5 - 2x + 1} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x^2 - 17x - 28}{x^2 - 9x + 4} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{x^2}{x-2}}$$

$$23. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x + 3}{x^4 - x^2 - 1} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x}$$

$$24. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 12}{5x^3 - 3x + 2} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 6} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 5x}$$

$$25. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8} \quad \text{в) }$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$$

$$26. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^4 - 2x^2 + x}{3x^4 + 3x^2 - 2x + 1} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$$

$$27. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^7 - 7x^5 + 7}{7x^7 + 5x^3 - 2} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

$$28. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 4}}{\sqrt{3x^3 + 2x - 5}}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

$$29. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 + 4x^2 + 1}{5x^3 - 2x + 3}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$$

$$30. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + x}{4x^3 + x^2 - 2}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1}\right)^{x^2}$$

Задание 2.2. Задана функция $y = f(x)$. Исследовать эту функцию и построить ее график.

$$1. y = \frac{1}{e^x - 1}$$

$$2. y = \frac{4x + 2x^2 - 4}{x + 3}$$

$$3. y = 3\sqrt[3]{x^2}$$

$$5. y = -\frac{(x^2 + 4x + 1)}{x + 4}$$

$$4. y = \frac{1}{x(x-8)}$$

$$6. y = 2x + \operatorname{ctg} x$$

$$7. y = \frac{2x^4}{(1-x)^3}$$

$$8. y = \frac{8 - x^5}{x^4}$$

$$9. y = 3\sqrt[3]{x^2} - x$$

$$10. y = \frac{-2e^{-x}}{2x + 3}$$

$$12. y = \frac{x^4}{(x-1)^3}$$

$$13. y = \frac{(3-x)^2}{1-x}$$

$$14. y = \ln(x+1) - x$$

$$15. y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$

$$16. y = \frac{2 - x^2 - 2x}{x + 3}$$

$$11. y = \frac{x^5 - 32}{x^4}$$

$$17. y = \ln(4 - x^2)$$

$$18. y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$19. y = \frac{x^4}{2(x-2)^3}$$

$$20. y = 2 + x - \ln(x+3)$$

$$21. y = \frac{e^{-x}}{2x + 3}$$

$$22. y = \ln \frac{1}{4 - x^2}$$

$$23. y = \frac{-2x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$24. y = \frac{x^5 - 8}{x^4}$$

$$25. y = x \ln x$$

$$26. y = \frac{2}{x(8-x)}$$

$$27. y = x - \ln(x+1)$$

$$28. y = \ln \frac{4 - x^2}{3}$$

$$29. y = x \arctg x$$

$$30. y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$$

Задание 2.3.

Найти указанные производные и дифференциалы функций двух переменных.

1.

a) $y = 2 + 4e^{-x} + \operatorname{tg} \frac{x}{5} - \operatorname{arctg} 3x$; $y' = ?$

b) $y = \sqrt[3]{x} \cdot \arccos^4 x + 5 \ln(1 + x^2) + \sqrt{x}$; $y' = ?$

c) $y = \frac{x^5}{3 + 2^x} + \frac{1}{\sqrt{7 - 2x}}$; $y' = ?$

d) $y = \frac{1}{x + 3} + \sin 7x$; $y'' = ?$

e) $z = \operatorname{arctg}(y - x) + \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt[3]{y} \cdot \ln(1 - x) + \sin 2x + 1$; $dz = ?$

2.

a) $y = 2 \cdot 4^{-x} + 4 - \operatorname{arctg} 4x + \operatorname{ctg} \frac{x}{7}; y' = ?$

b) $y = \sqrt[4]{x} + \sqrt{x} \cdot \arcsin^3 x - 3 \ln(2 + x^2); y' = ?$

c) $y = \frac{2 + e^{3x}}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[3]{2 - 5x}}; y' = ?$

d) $y'' = ? y = \cos 5x + \frac{1}{x - 2}$

e) $z = 2^{x-y} + \cos(1 - y) + y^2 \cdot (1 - \sqrt{x}) + \arcsin 2x + 1 dz = ?$

3.

a) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \arcsin 3x - 30 + 5^{-x} y' = ?$

b) $y = 2 \ln(7 - x^3) - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^3} \cdot \operatorname{arctg}^2 x y' = ?$

c) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + 7x}} + \frac{4 - e^{2x}}{x^5} y' = ?$

d) $y = \ln(x + 1) + \sin 3x y'' = ?$

e) $z = x^3 \cdot \ln(5 + y^2) - \sqrt{x - y^2} + e^{-y} + 3 - \frac{1}{x^3} dz = ?$

4.

a) $y = \arccos 2x - 7 + \operatorname{tg} \frac{x}{3} - 2^{-x} y' = ?$

b) $y = \sqrt[6]{x} \cdot \operatorname{arctg}^2 x - 4 \ln(5 + x^3) + 2\sqrt{x} y' = ?$

c) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2 + 3x}} + \frac{x^4}{3 + e^{5x}} y' = ?$

d) $y = \sin 5x - \ln(x - 2) y'' = ?$

e) $z = \sin(x + y^2) + \ln(1 + x^2) + \operatorname{tg} \frac{y}{2} + \frac{x^3 - 1}{y^2} dz = ?$

5.

a) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3} + 3 \cdot 5^{-x} + \operatorname{arctg} 4x - 11 y' = ?$

b) $y = 3\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} \cdot \arcsin^3 x + 3 \ln(4 - x^2) y' = ?$

c) $y = \frac{e^{2x} + 7}{x^5} - \frac{1}{\sqrt{3 + 4x}} y' = ?$

d) $y = \cos 5x - \ln(x - 2) y'' = ?$

e) $z = x^2 \cdot \arccos 2y + \ln(5x + y) + \sqrt{3} - \sqrt[3]{x} + e^{-y} dz = ?$

6.

a) $y = \arcsin 2x - \operatorname{ctg} \frac{2x}{3} + \frac{1}{4} + 5e^{-x} \quad y' = ?$

b) $y = \sqrt[5]{x} + 5 \ln(1 + x^2) + \sqrt{x} \cdot \operatorname{arccotg}^3 x \quad y' = ?$

c) $y = \frac{x^4}{3^x - 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{2 - 5x}} \quad y' = ?$

d) $y = \frac{4}{x + 3} + \cos 2x \quad y'' = ?$

e) $z = \arcsin(x - y) - y \sin(1 + x^2) + \sqrt{1 - y} + \operatorname{tg} x \quad dz = ?$

7.

a) $y = \frac{2}{5} - \operatorname{tg} \frac{x}{7} + 30^{-x} + \arccos 2x \quad y' = ?$

b) $y = \ln(7 + x^2) - \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} \cdot \operatorname{arctg}^5 x \quad y' = ?$

c) $y = \frac{5 + 3^x}{x^6} + \frac{1}{\sqrt{1 - 7x}} \quad y' = ?$

d) $y = \sin 6x + \frac{1}{2 + x} \quad y'' = ?$

e) $z = \arcsin(x - y) - y \sin(1 + x^2) + \sqrt{1 - y} + \operatorname{tg} x \quad dz = ?$

8.

a) $y = 4^{-x} + \operatorname{ctg} 80x - \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + 1 \quad y' = ?$

b) $y = \sqrt[4]{x} + 2 \ln(1 - x^2) + \sqrt{x} \cdot \arcsin^2 x \quad y' = ?$

c) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{2 + 5x}} + \frac{e^{3x} - 1}{x^5} \quad y' = ?$

d) $y = \cos 8x + \frac{1}{x + 8} \quad y'' = ?$

e) $z = \sqrt{y} \operatorname{tg}^2 x + 5^{x+2y} + \sqrt{x} + \cos^2 y + 5 \quad dz = ?$

9.

a) $y = \operatorname{tg} 2x + 4 \lg(x + 1) \quad y' = ?$

b) $y = (\sin 4x)e^{3x} + (\cos 4x)^x \quad y' = ?$

c) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - 2\sqrt{5x + 4} \quad y' = ?$

d) $y = \frac{2 - x}{x^2 \ln x} \quad y' = ?$

e) $z = \ln(x - \operatorname{tg} 2y) \quad dz = ?$

10.

a) $y = 3 \operatorname{tg} 7x + \arcsin(2 - 3x) \quad y' = ?$

b) $y = (\operatorname{sh} 2x) \sqrt[4]{x} + 2(\sin x)^x \quad y' = ?$

c) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^3} - 9 \operatorname{ctg} 5x \quad y' = ?$

d) $y = \frac{4 + x^3}{\cos 2x - x} \quad y' = ?$

e) $z = \cos^2 \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{4} \right); \quad dz = ?$

11.

a) $y = 7 \cos 5x - 2^{x+3} \quad y' = ?$

b) $y = (\sin 8x) \ln(1-x) + x^x \quad y' = ?$

c) $y = \arccos \frac{1}{x^2} + 4 \sqrt[5]{7x+3} \quad y' = ?$

d) $y = \frac{x^2 + 3}{x - \operatorname{ch} x} \quad y' = ?$

e) $z = \frac{3x - 2y}{\cos x + y} \quad dz = ?$

12.

a) $y = 2 \operatorname{ctg} 6x - \operatorname{cth}(5+2x) \quad y' = ?$

b) $y = (2^{4x}) \cos 4x + \left(\lg \frac{x}{2} \right)^x \quad y' = ?$

c) $y = \log_3 \frac{1}{x^2} + \sqrt[7]{5-4x} \quad y' = ?$

d) $y = \frac{\sin 5x - x}{x^3 - \ln x} \quad y' = ?$

e) $z = \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{y}{x} \right); \quad dz = ?$

13.

a) $y = 8 \operatorname{sh} 3x + \arcsin 7x \quad y' = ?$

b) $y = \sqrt[3]{5-4x} \cdot \operatorname{ctg} 2x + \left(\cos \frac{x}{2} \right)^x \quad y' = ?$

c) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^4} - \lg^4 x + 2 \quad y' = ?$

d) $y = \frac{\sin 8x + x^2}{x^2 - x} \quad y' = ?$

e) $z = \sin^2(2x+5y); \quad dz = ?$

14.

a) $y = e^{-4x} - \ln 10x$ $y' = ?$

b) $y = (\sin 8x)\sqrt[9]{x} + (\lg x)^x$ $y' = ?$

c) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^5} - \operatorname{tg} 12x$ $y' = ?$

d) $y = \frac{\cos x - x^2}{x^3 + 3}$ $y' = ?$

e) $z = (x + 4y)e^{xy}$ $dz = ?$

15.

a) $y = \sqrt[3]{5 - 12x} + 3\log_5(8 - 2x)$ $y' = ?$

b) $y = \arccos \frac{1}{x^7} + (\operatorname{tg} 8x)^x$ $y' = ?$

c) $y = (\operatorname{ch} 5x)\sqrt{x+1}$ $y' = ?$

d) $y = \frac{x^2 + x - 1}{\ln x - x}$ $y' = ?$

e) $z = \operatorname{arctg} \frac{3y}{4x}$; $dz = ?$

16.

a) $y = 5 \arcsin(10x + 3) - 10^{4x}$ $y' = ?$

b) $y = (\ln 2x)\operatorname{arcctg} x + x^x$ $y' = ?$

c) $y = \log_7 \frac{1}{x^5} + 2\operatorname{tg} 4x + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{9}$ $y' = ?$

d) $y = \frac{\cos x - 2x}{x - x^2}$ $y' = ?$

e) $z = \sqrt{x} \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$; $dz = ?$

17.

a) $y = 2 \cos 3x + \arccos \frac{1}{x}$ $y' = ?$

b) $y = (\log_3 4x)\sqrt{7-x} + x^{\operatorname{ctg} x}$ $y' = ?$

c) $y = \operatorname{arctg}(2x + 6) - 9e^{-x}$ $y' = ?$

d) $y = \frac{x^2 + x - \operatorname{tg} 5}{2x^3 - \sin x}$ $y' = ?$

e) $z = \ln \operatorname{tg}^2(3x - 2y)$; $dz = ?$

18.

a) $y = 3\operatorname{arcctg} 10x - 8 \sin \frac{x}{2}$ $y' = ?$

b) $y = \frac{1}{2} [\cos(1-x)] 2^{-3x} + (\operatorname{ctg} x)^x \quad y' = ?$

c) $y = -\arccos 4x + \ln \frac{1}{x^2} \quad y' = ?$

d) $y = \frac{(9x+7)^2 + 1}{x - \operatorname{ch} x} \quad y' = ?$

e) $z = e^{\frac{5x-4y}{x+y}}; \quad dz = ?$
19.

a) $y = -3 \arccos \frac{x}{4} + \log_{42}(1-x) \quad y' = ?$

b) $y = -(\sin 11x) \operatorname{tg} 5x + (\cos 5x)^x \quad y' = ?$

c) $y = \frac{1}{\sqrt{(3-x)^3}} - 4^{-x^2} \quad y' = ?$

d) $y = \frac{\ln 2 - x}{(x+4)^2} \quad y' = ?$

e) $z = \arccos \frac{y}{2} + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y} \cdot e^{-2x} + 3; \quad dz = ?$
20.

a) $y = \log_3 \frac{1}{x+1} - 4 \cos 5x \quad y' = ?$

b) $y = [\arccos(-x)](x+3)^3 \quad y' = ?$

c) $y = \operatorname{tg}(2x-1) + 4 \operatorname{sh} x \quad y' = ?$

d) $y = \frac{\operatorname{ctg} x + 2^{-7x}}{3x + \operatorname{ch} 1} + (\sin x)^x \quad y' = ?$

e) $z = \sin(y^4 + 5x); \quad dz = ?$

21.

a) $y = \sqrt[3]{2-x+x^2} + 3 \lg 10x \quad y' = ?$

b) $y = (\arccos 2x) \operatorname{tg} \frac{1}{x} + \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{10} \right)^x \quad y' = ?$

c) $y = 4^{-x} - \operatorname{arctg}(x+1) \quad y' = ?$

d) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} + 12^{\frac{\pi}{5}} \quad y' = ?$

e) $z = x^4 + 5x^2 y^2 - 3; \quad dz = ?$

22.

a) $y = -2 \operatorname{sh} 4x + \operatorname{ch} 7x \quad y' = ?$

b) $y = (\operatorname{tg} 3x) \operatorname{ctg} 4x + 2x^x \quad y' = ?$

c) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} - \arcsin(2-x) \quad y' = ?$

d) $y = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x + 1 + \cos 2x} \quad y' = ?$

e) $z = \ln(x^2 - \sqrt{y}); \quad dz = ?$

23.

a) $y = \sqrt{\sin 2x} - 3 \lg 4x \quad y' = ?$

b) $y = (\cos 4x) \operatorname{tg} 3x - 8(\operatorname{ctg} x)^x \quad y' = ?$

c) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} - 3 \arccos(2x+1) \quad y' = ?$

d) $y = \frac{x^8 - x^7 + 5^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2-x}} \quad y' = ?$

e) $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{y}}; \quad dz = ?$

24.

a) $y = \operatorname{tg}^3 3x + \sqrt[5]{2-x} \quad y' = ?$

b) $y = (\sin 8x) \operatorname{ctg} \frac{x}{4} - (\cos 8x)^x \quad y' = ?$

c) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} + 3 \arcsin 4x \quad y' = ?$

d) $y = \frac{x^{10} - x^5 - 1}{x - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{13}} \quad y' = ?$

e) $z = \ln(\cos x + y); \quad dz = ?$

25.

a) $y = \arccos(x+1) - 2x^2 + \frac{1}{x} \quad y' = ?$

b) $y = [\sin(-4x)] \ln 2x + (\log_3 x)^x \quad y' = ?$

c) $y = \frac{10}{\sqrt[5]{2x+3}} - \operatorname{arctg} 3x \quad y' = ?$

d) $y = \frac{\operatorname{ctg} 2 - x^2}{(x+1)^2} \quad y' = ?$

e) $z = \frac{x-y}{x+y}; \quad dz = ?$

26.

a) $y = \log_3(2 - x) + \arcsin 4x \quad y' = ?$

b) $y = (\cos 5x)\sin 10x + (\operatorname{ctg} 10x)^x \quad y' = ?$

c) $y = \sqrt[8]{x^2 + 3} - 3\operatorname{arccctg} x \quad y' = ?$

d) $y = \frac{\operatorname{tg} 3 + x}{(1 + x)^2} \quad y' = ?$

e) $z = \ln(3x - 2y)^2 \quad dz = ?$

27.

a) $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} - \sin(2x+3) \quad y' = ?$

b) $y = (\ln 4x)\operatorname{tg} 2x - (\log_3 2x)^x \quad y' = ?$

c) $y = \arcsin \frac{1}{x} + 4\cos 5x \quad y' = ?$

d) $y = \frac{-x^2 + 4}{x - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{11}} \quad y' = ?$

e) $z = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{y}; \quad dz = ?$

28.

a) $y = \sqrt{2 - x - 3x^2} + 2\log_3 x \quad y' = ?$

b) $y = (\arccos 2x) \left(2^{\frac{1}{x}} - 5 \right) + x^x \quad y' = ?$

c) $y = \frac{3}{1 - x^2} + 4\operatorname{ctg} 7x \quad y' = ?$

d) $y = \frac{\ln 2 - x^3}{2x^2 - x} \quad y' = ?$

e) $z = e^{-x^3 + 4\sqrt{y}}; \quad dz = ?$

29.

a) $y = \operatorname{arctg} 2x - 2\operatorname{arccctg} 2x \quad y' = ?$

b) $y = (\sin 10x)\lg(-5x) + \left(\operatorname{sh} \frac{x}{10} \right)^x \quad y' = ?$

c) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + 2^{-x^3} \quad y' = ?$

d) $y = \frac{\operatorname{ctg} 3 + 4x^2}{-2x + 1} \quad y' = ?$

e) $z = \ln(x - y^2); \quad dz = ?$

30.

a) $y = -\operatorname{tg} 3x + 3\operatorname{ctg} 2x$ $y' = ?$

b) $y = x^3 \sqrt{x^2 + 1} + \left(\sin \frac{\pi x}{13} \right)^x$ $y' = ?$

c) $y = e^{-4x} + \operatorname{arctg}(1 - x)$ $y' = ?$

d) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x}}$ $y' = ?$

e) $z = \cos(x - y) + \frac{4 - y}{x^2} + \ln(1 - x^2) + \lg 2y + 2$; $dz = ?$

Задание 2.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

1. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 - 4y^2$ в точке, для которой $x=2$, $y=1$.

2. К поверхности $x^2 - 2y^2 + 3z = 2$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $2x + 4y + 6z = 0$

3. К поверхности $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $2x - 6y + 3z + 10 = 0$

4. К поверхности $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x + 2y - z = 0$

5. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x + 4y + 6z = 0$

6. На поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

7. Для поверхности $z = xy$ написать уравнение касательной плоскости, перпендикулярной прямой $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{8} = \frac{z}{1}$

8. Для поверхности $z = 3xy$ написать уравнение касательной плоскости, перпендикулярной прямой $\frac{x-2}{9} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+1}{-1}$

9. К поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ провести касательную плоскость, перпендикулярную плоскостям $x + 2y - 3z + 1 = 0$, $2x - y - z + 3 = 0$

10. К поверхности $z = x^2 - y^2$ провести касательную плоскость, перпендикулярной прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$

11. К поверхности $2x^2 = z - 4y^2$ составить уравнение нормали, перпендикулярной плоскости $8x - 32y - 2z + 3 = 0$

12. К поверхности $z = 3xy$ провести касательную плоскость, перпендикулярной прямой $\frac{x-2}{9} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$

13. К поверхности $z = 4 - x^2 - y^2$ составить уравнение нормали, перпендикулярной плоскости $2x + 2y + z + 5 = 0$

14. К поверхности $z = xy$ составить уравнение касательной плоскости, перпендикулярной прямой $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}$

15. К поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 = 22$ составить уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $x - y + 2z = 0$

16. К поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 628$ составить уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $3x - 12y + 2z = 0$

17. К поверхности $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ составить уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $12x - 3y + 2z = 0$

Найти производную и дифференциал от функций:

18. $x^2 + 2y^2 + z^3 - 3xyz - 3y + 3 = 0$. $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

19. $\ln z = x + y + z - 1$. $dz = ?$

20. $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$. $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

21. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$. $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

22. $z^3 + 3x^2z = 2xy$. $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

23. $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$. $dz = ?$

24. $z \ln(x + z) - \frac{xy}{z} = 0$. $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

25. $x \sin y + y \sin x + z \sin x = 0$. $dz = ?$

26. $xe^y + ye^x + ze^x = 0$. $dz = ?$

27. $x + y + 4 \sin x \sin y - 3z = 0$. $dz = ?$

28. $x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 4 \ln y - z = 0$. $dz = ?$

29. $(5 - 2x + y)e^{x^2} - y + z = 0$. $dz = ?$

30. $x = t(\cos t - 2 \sin t)$, $y = t(\sin t + 2 \cos t)$. Найти $y'_x = ?$ при $t = \frac{\pi}{4}$.

Задание 2.5. Определить графически количество действительных корней уравнения $f(x) = 0$, отделить эти корни и применяя способ Ньютона, найти приближенные значения корней с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

1. $x^3 - 4x - 5 = 0$

2. $x^3 + 2x - 1 = 0$

3. $x^3 - 5x + 1 = 0$

4. $x^3 + 3x - 2 = 0$

5. $x^3 - x^2 + 5 = 0$

6. $x^3 - 2x + 3 = 0$

7. $x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$

8. $x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$

9. $e^{-x} - 3x + 4 = 0$

10. $\cos x - 2x + 0.5 = 0$

11. $e^{-x} - x + 1 = 0$

12. $x^3 - 2x + 7 = 0$

13. $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

14. $\ln x = \arctg x$

15. $x^2 + 4 \sin x = 0$

16. $e^x - x - 2 = 0$

17. $x^3 - 4x - 8 = 0$

18. $\sin 2x - x = 0$

19. $x^3 + 3x - 5 = 0$

20. $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$

21. $x = 10 \lg x$

22. $x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$

23. $x^3 - 1.2x + 0.7 = 0$

24. $x^2 = -\ln x$

25. $2x^3 - 4x^2 + 1 = 0$

26. $x^2 = -\ln x$

27. $2x^3 - 4x^2 + 1 = 0$

28. $x + \sin x - 1 = 0$

29. $x^2 = \cos x$

30. $\sin x - x^2 = 0$

Библиографический список

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – Москва : Наука, 1978. – 320 с.
2. Бугров, Я.С. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – Москва : Наука, 1988. – 222 с.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник для втузов. Т. 1 / Н.С. Пискунов. – Москва : Интеграл-Пресс, 1998. – 544 с.
4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Москва : Высш. шк., 1986. – Ч. 1. – 415 с.

Подписано в печать 5.03.2015.	Усл. печ. л. 2,5	Тираж 20 экз.
Печать офсетная.	Бумага писчая.	Заказ № ____.

Отпечатано: РИО ВоГУ, г. Вологда, ул. С. Орлова, 6