

Министерство образования и науки Российской Федерации
Вологодский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Методическое пособие

Вологда
2014

Математические методы обработки экспериментальных данных:
методическое пособие / Б.А. Шкарин. – Вологда: ВоГУ, 2014. – 55 с.

В методическом пособии рассмотрены математические методы обработки экспериментальных данных, позволяющие осуществить объективную оценку результатов экспериментальных исследований в процессе испытаний объектов машиностроительного производства.

Методическое пособие рекомендуется студентам, обучающимся по направлениям «Автоматизация технологических процессов и производств», «Конструкторско-технологическая подготовка машиностроительных производств», «Технологические машины и оборудование» очной и заочной форм обучения по полным, сокращенным и ускоренным программам.

Пособие выполнено в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Составитель Б.А. Шкарин, канд. техн. наук, доцент

Рецензент Н.С. Григорьев, канд. техн. наук, доцент,
директор МРЦПК ВоГУ

ВВЕДЕНИЕ

Теоретические методы исследований объектов и систем, выполняемые с помощью математических моделей, позволяют описывать и объяснять взаимосвязи элементов изучаемой системы или объекта в относительно широких диапазонах изменения переменных величин. Однако при построении теоретических моделей неизбежно введение каких-либо ограничений, допущений, гипотез и т.п. Поэтому возникает задача оценки достоверности (адекватности) полученной модели реальному процессу или объекту. Для этого проводится экспериментальная проверка разработанных теоретических моделей.

Экспериментальные исследования являются основным источником объективной информации о характеристиках процессов, протекающих в реальных объектах. Но не следует и преувеличивать результаты экспериментальных исследований, которые справедливы в пределах условий проведенного эксперимента.

Поэтому теоретические и экспериментальные исследования дополняют друг друга и являются составными элементами процесса изучения поведения объектов.

В связи с этим результаты экспериментальных исследований нуждаются в определенной математической обработке. Существующие в настоящее время методы обработки экспериментальных данных хорошо формализованы и исследователю необходимо только правильно их использовать. Вопросы, решаемые при обработке результатов эксперимента, не являются сложными. Они заключаются в подборе эмпирических формул и оценке результатов экспериментальных исследований, истинных значений измеряемых величин и точности измерений, исследовании корреляционных зависимостей и некоторые другие.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Эксперимент — система операций и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте исследования.

Составной частью эксперимента является **опыт** — воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях при возможности регистрации и количественной оценки состояния или результатов функционирования исследуемого объекта.

Эксперимент проводится на промышленном оборудовании, лабораторной установке или физической модели. При этом механизм изучаемого процесса обычно известен лишь частично или совсем неизвестен. В таких случаях объект исследования можно условно представить в виде «черного ящика» — системы внутренних связей, не доступных исследователю. Известны лишь переменные величины, воздействующие на объект исследования, и величины, характеризующие его состояние или результа-

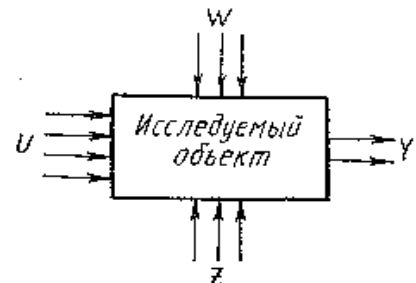


Рис. 1.1. Кибернетическая модель объекта исследования

ты функционирования (рис. 1.1). Первые называют входными величинами или факторами, а вторые — выходными или откликом.

Все факторы делятся на три группы:

- группа постоянных или случайно изменяющихся в ходе исследования факторов W , значения которых известны;
- группа управляемых факторов U , значения которых выбираются и целенаправленно изменяются в ходе исследования (две первых группы часто объединяют в одну группу контролируемых факторов X);
- группа неконтролируемых факторов Z , значения которых остаются по той или иной причине неизвестными в ходе исследования.

Изменение отклика Y под действием монотонно изменяющихся во времени неконтролируемых факторов называется **временным дрейфом** отклика, а зависимость математического ожидания отклика от контролируемых факторов — **функцией отклика**.

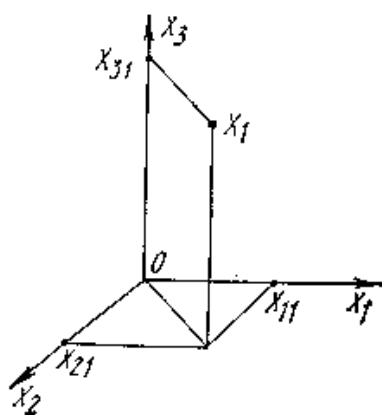


Рис. 1.2. Геометрическая модель трехмерного факторного пространства

Геометрическое представление функции отклика называется поверхностью отклика. Чтобы такое представление стало возможным, вводится понятие факторного пространства, у которого координатные оси соответствуют отдельным факторам. Пример трехмерного факторного пространства показан на рис. 1.2.

Любая точка факторного пространства характеризуется набором значений факторов, при которых производится измерение отклика. Фиксированное значение фактора называют также уровнем фактора. При количестве факторов, большем трех, геометрическое моделирование факторного пространства становится невозможным. Поэтому чаще всего множество уровней факторов, при которых производится измерение отклика, задается **матрицей условий эксперимента**. Эта матрица для k факторов и N измерений имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{k1} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{1N} & X_{2N} & X_{3N} & \dots & X_{kN} \end{pmatrix}$$

Значения отклика, полученные при данных измерениях, также представляются в матрице, которая имеет один столбец и называется **матрицей наблюдений**:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_N \end{pmatrix}$$

По характеру организации и методам обработки результатов эксперимента может быть *пассивным* или *активным*.

При реализации пассивного эксперимента исследователь наблюдает за объектом, не вмешиваясь в процесс его функционирования. Поскольку в данном случае уровни факторов случайным или закономерным образом изменяются во времени, то появляется возможность, измеряя их значения и значения отклика, исследовать зависимость между факторами и откликом.

Примером пассивного эксперимента является исследование точности обработки деталей на настроенном станке. Факторами в данном случае будут погрешности заготовок, их твердость, износ инструмента, жесткость станка, откликом — погрешность обработанных деталей.

При реализации активного эксперимента исследователь сам изменяет уровень факторов и поддерживает их на нужном уровне в течение данного этапа эксперимента.

К контролируемым факторам предъявляются следующие требования, которые должны учитываться при подготовке активного эксперимента.

- управляемость фактора — возможность поддерживать выбранный уровень фактора в течение необходимого для измерения отрезка времени;
- достаточно высокая точность, с которой поддерживается и измеряется уровень фактора;
- независимость фактора — возможность задать любой уровень данного фактора вне зависимости от уровней других факторов;
- совместимость факторов — безопасность функционирования объекта исследования и возможность измерения отклика в любой точке той части факторного пространства, которая является областью экспериментирования.

Кроме факторов, каждому уровню которых после измерения можно поставить в соответствие определенное число, могут быть и качественные факторы (например, рецепты связок шлифовальных кругов, материалы режущей части инструмента, химический состав обрабатываемого материала). В этом случае каждому уровню качественного фактора нужно поставить в соответствие число натурального ряда (код). Порядок уровней качественных факторов может быть произвольным, но после кодирования он фиксируется. Для упрощения расчетов при обработке результатов эксперимента рекомендуется проводить нормализацию факторов — преобразование их в безразмерные ве-

личины с (по возможности) целочисленными значениями. При симметричной нормализации расчетная формула имеет вид:

$$x_{ij} = (X_{ij} - \overline{X}_j) / \Delta X_j,$$

где x_{ij} — нормализованный i -й уровень j -го фактора; X_{ij} — натуральный i -й уровень, j -го фактора; ΔX_j — постоянный шаг изменения натурального значения j -го фактора; $\overline{X}_j$ — средний уровень j -го фактора:

$$\overline{X}_j = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r X_{ij};$$

r — число уровней фактора.

Чтобы нормализованные факторы приняли целочисленные значения, число их уровней должно быть нечетным. Например, при $r = 5$ коды факторов принимают значения $-2; -1; 0; 1; 2$.

При несимметричной нормализации:

$$x_{ij} = 1 + (X_{ij} - X_{j \min}) / \Delta X_j,$$

где $X_{j \min}$ — минимальный уровень j -го фактора.

В данном случае нормализованные факторы принимают значения $1, 2, 3, \dots, r$.

В качестве факторов могут приниматься не только физические или геометрические величины, но и некоторые функции от них (например, логарифмы или показательные функции).

При выборе отклика из нескольких, обычно функционально связанных показателей результата функционирования исследуемого объекта должно учитываться следующее:

- необходимо, чтобы отклик был однозначным в статистическом смысле, т.е. заданному набору уровней факторов должно соответствовать одно (с точностью до погрешности измерения) значение отклика;
- отклик должен быть эффективным в статистическом смысле. Это значит, что из нескольких функционально связанных откликов выбранный можно измерить с наибольшей точностью.
- желательно, чтобы отклик можно было оценить количественно. Если нет способа количественного измерения результата, то следует пользоваться ранжированием. При этом отклику присваиваются оценки — ранги по заранее выбранной шкале.

План эксперимента — совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов. План эксперимента обычно записывается в виде матрицы плана — прямоугольной таблицы, строки которой отвечают отдельным опытам, а столбцы — факторам.

Элементами матрицы плана обычно являются нормированные уровни факторов, т. е. (i, j) -й элемент равен нормированному уровню j -го фактора в i -м опыте.

Матрица плана может иметь совпадающие строки. Чтобы сократить запись, используется матрица спектра плана, составленная из всех строк матрицы плана, отличающихся уровнем хотя бы одного фактора, и матрица дублирования — квадратная диагональная матрица, элементы которой равны числам параллельных (дублирующих) опытов в соответствующих точках спектра плана.

План, содержащий все возможные комбинации всех факторов на определенном числе уровней равное число раз, называется **полным факторным планом**. Если план содержит только часть комбинаций полного факторного плана, то его называют **дробным факторным планом** или **дробной репликой полного факторного плана**.

2. ЧИСЛОВАЯ ОЦЕНКА ОТКЛИКА

Отклик оценивается **по результатам прямых или косвенных измерений**.

Способ оценки зависит от природы отклика (случайная или неслучайная величина) и точности измерений.

Основной задачей в данном случае является **получение обоснованных выводов о действительном значении отклика с учетом погрешностей измерения при ограниченном числе измерений**.

Совокупность всех возможных значений исследуемой случайной погрешности называется **генеральной совокупностью**.

Множество значений случайной погрешности, полученное в результате наблюдения над нею, называют **случайной выборкой или просто выборкой**.

Число объектов в генеральной совокупности и в выборке характеризует их объем. Генеральная совокупность может иметь бесконечный объем.

Основной задачей является получение научно **обоснованных выводов о числовых характеристиках генеральной совокупности случайных погрешностей по выборке**.

Выборочная оценка должна обладать следующими свойствами:

- несмещенностью;
- эффективностью;
- состоятельностью.

Оценку $\underline{A}$ параметра A называют **несмещенной, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру**. Требование несмещенности гарантирует отсутствие систематических ошибок при оценке параметров.

Так как $\underline{A}$ — случайная величина, значение которой изменяется от выборки к выборке, то меру ее рассеивания характеризуют дисперсией $D(\underline{A})$. Из двух оценок A следует отдать предпочтение той, которая обладает меньшим рассеиванием (т. е. меньшей дисперсией).

Несмещенную оценку $\underline{A}$, которая имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра A , вычисленных по выборкам одного и того же объема, называют **эффективной оценкой**.

Оценку $\underline{A}$ параметра A называют **состоятельной**, если при неограниченном увеличении объема выборки ее значение приближается сколь угодно близко к значению оцениваемого параметра.

На практике не всегда удастся удовлетворить одновременно требованиям несмещенности, эффективности и состоятельности оценки параметра. Иногда для простоты расчетов целесообразно использовать незначительно смещенную оценку.

Оценку неизвестного параметра генеральной совокупности одним числом называют **точечной оценкой**. Точечной оценкой **математического ожидания** $M(X)$ случайной величины X является среднее арифметическое значение $\bar{X}$, вычисленное по результатам m независимых наблюдений:

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i$$

Эта оценка является несмещенной, состоятельной и эффективной. Она имеет дисперсию σ^2/m , если дисперсия случайной величины X равна σ^2 .

Несмещенной **оценкой дисперсии** генеральной совокупности $D(X)$ является выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2.$$

Эта оценка является состоятельной, но не эффективной.

При малом числе наблюдений необходимо использовать интервальное оценивание, так как в этом случае точечная оценка недостаточно надежна. Необходимо по данным выборки построить числовой интервал, в котором с заранее выбранной вероятностью находится значение оцениваемого параметра.

Доверительным интервалом ($\underline{A_2}$ — $\underline{A_1}$) для параметра A называют такой интервал, для которого с заранее выбранной вероятностью $P=1 - \alpha$, близкой к единице, можно утверждать, что:

$$P(\bar{A}_1 < A < \bar{A}_2) = 1 - \alpha$$

Чем меньше для выбранной вероятности ($\underline{A_2}$ — $\underline{A_1}$), тем точнее оценка параметра A .

Доверительный интервал меняется от выборки к выборке.

Вероятность $P=1 - \alpha$ называется доверительной вероятностью, а число α — уровнем значимости. Выбор доверительной вероятности зависит от конкретной решаемой задачи.

Если случайная величина распределена нормально, а дисперсия этого распределения неизвестна, то **доверительный интервал для математического ожидания** $M(X)$ определяется неравенством:

$$\bar{X} - t(P, m) \cdot S / \sqrt{m} < M(X) < \bar{X} + t(P, m) \cdot S / \sqrt{m},$$

где $t(P, m)$ — критерий Стьюдента при доверительной вероятности P и числе степеней свободы $f = m - 1$.

Если случайная величина распределена нормально, **доверительный интервал для дисперсии** генеральной совокупности при доверительной вероятности $P=1 - \alpha$ определяется неравенством:

$$\frac{m-1}{\chi_1^2} S^2 < \sigma^2 < \frac{m-1}{\chi_2^2} S^2,$$

где χ^2 — критерий Пирсона.

Возможны следующие **подходы к оценке отклика**:

1. **Отклик является неслучайной величиной и ошибки измерения малы** по сравнению со значениями отклика. При i -м измерении получаем:

$$Y = y_i + \Delta_i,$$

где Y — истинное значение отклика; y_i — измеренное значение отклика; Δ_i — погрешность измерения.

Если $\Delta_i < (0,01 \dots 0,02) y_i$, то погрешностью измерения можно пренебречь и полученное после первого измерения значение y_i принять за истинное.

2. **Отклик является неслучайной величиной, но погрешностями измерений нельзя пренебречь.** Для уменьшения влияния погрешностей измерения на точность оценки производится многократное измерение отклика в одинаковых условиях (в одной и той же точке факторного пространства).

Точечной оценкой истинного значения отклика в данном случае будет среднее арифметическое значение результатов параллельных измерений:

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i,$$

где m — количество параллельных измерений.

Точность соответствия y истинному значению тем выше, чем больше m . При относительно небольшом числе измерений целесообразно применять интервальную оценку отклика:

$$\bar{y} - t(P, m) \cdot S / \sqrt{m} < Y < \bar{y} + t(P, m) \cdot S / \sqrt{m},$$

где $t(P, m)$ — критерий Стьюдента, S — оценка стандартного отклонения погрешностей измерения, P — доверительная вероятность.

Точечная оценка стандартного отклонения определяется из выражения:

$$S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2.$$

3. **Отклик является случайной величиной, а размах ошибки измерения пренебрежимо мал по сравнению с полем рассеяния значений отклика.**

В данном случае наиболее полной характеристикой отклика будет закон распределения его значений. Но в большинстве практических задач до-

статочными считаются числовые характеристики распределения случайной величины Y .

Минимально необходимыми являются:

- математическое ожидание $M(Y)$, определяющее положение центра группирования значений отклика;
- дисперсия $D(Y)$ или стандартное отклонение $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$, характеризующие рассеивание значений отклика.

В качестве точечной оценки математического ожидания $M(Y)$ принимается среднее арифметическое значение результатов параллельных измерений y .

При $m > 30$ удобнее группировать значения Y по интервалам одинаковой длины h . Все поле рассеяния делится на нечетное число (7... 15) интервалов длиной h и подсчитывается количество m_i значений отклика, попавших в каждый i -й интервал.

Принимается, что все значения отклика, попавшие в i -й интервал, равны координате его середины. Тогда:

$$\bar{y} = y_0 + \frac{h}{m} \sum_{i=1}^k \left(i - \frac{k+1}{2}\right) m_i,$$

где y_0 — координата середины среднего интервала; k — количество интервалов;

$$m = \sum_{i=1}^k m_i.$$

Точечной оценкой дисперсии является наблюдаемая дисперсия S^2 , значения которой при $10 < m < 30$ можно определить по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2$$

Если число параллельных измерений мало ($m < 15$), то оценку стандартного отклонения можно проводить по размаху:

$$R_m = y_{\max} - y_{\min}.$$

В данном случае:

$$S = R_m / d_m.$$

где d_m — среднее значение относительного размаха, т. е. отношения размаха к стандартному отклонению.

При $m > 30$ и группировании по интервалам одинаковой длины:

$$S^2 = \frac{h^2}{m-1} \sum_{i=1}^k \left(i - \frac{k+1}{2}\right)^2 m_i - \frac{mh^2}{m-1} \cdot (y_0 - \bar{y})^2,$$

Интервальная оценка математического ожидания находится с помощью выражения:

$$\bar{y} - t(P, m) \cdot S / \sqrt{m} < Y < \bar{y} + t(P, m) \cdot S / \sqrt{m},$$

где S определяется по формуле:

$$S = R_m / d_m.$$

Интервальная оценка стандартного отклонения:

а) при $m < 15$:

$$R_m / d_{m1} < \sigma < R_m / d_{m2},$$

где d_{m1} и d_{m2} — критерии, определяемые в зависимости от доверительной вероятности P и m ;

б) при $m > 15$:

$$S(1 - q) < \sigma < S(1 + q) \text{ или } \frac{m-1}{\chi_1^2} S^2 < \sigma^2 < \frac{m-1}{\chi_2^2} S^2,$$

где q — критерий, который определяется в зависимости от P и m ;

значение: $\chi^2 / (m-1)$ определяется из таблицы; S определяется по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2,$$

Или:

$$S^2 = \frac{h^2}{m-1} \sum_{i=1}^k \left(i - \frac{k+1}{2} \right)^2 m_i - \frac{mh^2}{m-1} \cdot (y_0 - \bar{y})^2,$$

4. Отклик является случайной величиной, а ошибки измерения существенны, т. е. не пренебрежимо малы по сравнению с размахом значений отклика.

Если исключена систематическая погрешность измерения, то оценка математического ожидания производится по следующим формулам:

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i,$$

$$\bar{y} - t(P, m) \cdot S / \sqrt{m} < Y < \bar{y} + t(P, m) \cdot S / \sqrt{m},$$

$$\bar{y} = y_0 + \frac{h}{m} \sum_{i=1}^k \left(i - \frac{k+1}{2} \right) m_i,$$

Поскольку погрешность измерения и отклик являются независимыми случайными величинами, то оценка стандартного отклонения отклика находится из выражения:

$$S^2(Y) = S_{\Sigma}^2 - S_H^2,$$

где S_{Σ} — оценка стандартного отклонения, полученная путем обработки результатов серии измерений; $S_{\text{и}}$ — оценка стандартного отклонения погрешности измерения (для определения $S_{\text{и}}$ проводится специальный эксперимент). Если $S_{\text{и}} > S_{\Sigma}$, то считаем $S(Y) = 0$.

5. **Отклик является случайной функцией $Y(t)$** , где аргумент t может быть непрерывной (например, время) или дискретной величиной (например, порядковый номер обрабатываемой детали).

В отличие от случайной выборки в данном случае порядок следования измерений является существенным для выявления причинных механизмов, обуславливающих свойства отклика.

Если t может принимать любые значения в заданном интервале, то $Y(t)$ называют **случайным процессом**.

Если t принимает только определенные дискретные значения, то $Y(t)$ называется **случайной последовательностью или временным рядом**.

Полученная экспериментально последовательность значений $Y(t)$ называется реализацией случайного процесса (или временного ряда).

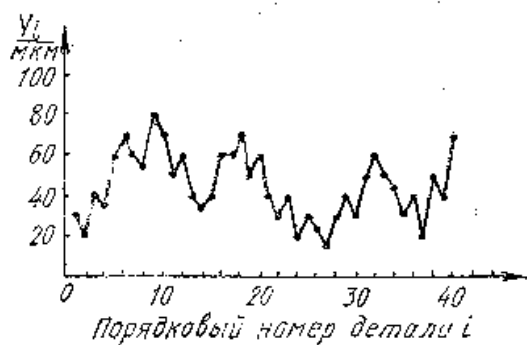


Рис. 2.1. Временной ряд отклонений размеров деталей, обработанных на токарно-револьверном автомате

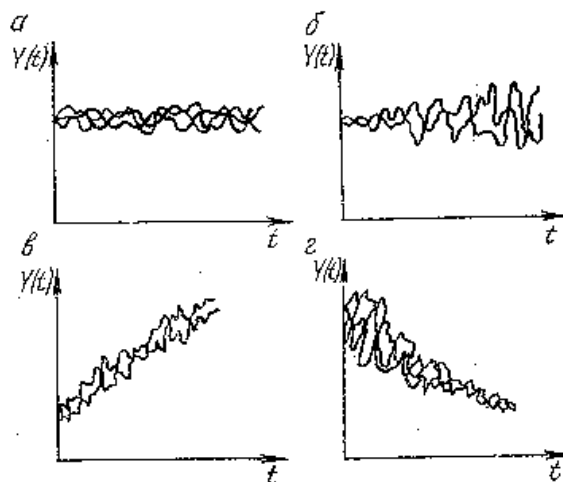


Рис. 2.2. Реализации случайных функций: а — стационарной; б, в, г — нестационарных

На рис. 2.1. приведен пример временного ряда, образованного отклонениями Y размеров деталей, обработанных на токарно-револьверном автомате.

Пример временного ряда (изменение размеров деталей, обработанных на автомате)

Наиболее важным свойством случайной функции, определяющим возможность применения тех или иных методов исследования, является **зависимость или независимость ее свойств от начала отсчета времени**.

В соответствии с этим различают **стационарные и нестационарные случайные функции**.

Для стационарной случайной функции первого типа все ее характеристики зависят только от взаимного расположения значений аргумента, а не от самих значений.

На рис. 2.2 показаны примеры реализаций стационарной и нестационарных случайных функций.

У нестационарных случайных функций при изменении аргумента изменяется рассеяние значений $Y(t)$ (рис.1.4 б), положение его центра группирования (рис.2.2 в) или обе характеристики (рис.2.2 г).

При наличии множества реализаций случайной функции совокупность ее значений при фиксированном значении аргумента образует множество случайных величин, числовыми характеристиками которых является математическое ожидание $M\{Y(t)\}$ и дисперсия $D[Y(t)]$.

Обе эти характеристики являются неслучайными функциями аргумента. Для стационарных случайных процессов и временных рядов:

$$M[Y(t)] = \text{const}; \quad D[Y(t)] = \text{const}.$$

Связь значений случайной функции при разных значениях аргумента характеризуется корреляционной функцией:

$$K(t_1, t_2) = M\{[Y(t_1) - M[Y(t_1)]] [Y(t_2) - M[Y(t_2)]]\}.$$

Для стационарных случайных процессов корреляционная функция зависит только от сдвига значений аргумента.

При анализе случайных функций обычно используется предположение об эргодичности изучаемых процессов. Процесс называют *эргодическим* по отношению к какой-либо его характеристике (математическое ожидание, дисперсия), если ее значение по множеству реализаций совпадает со значением по множеству значений аргумента.

Свойство эргодичности позволяет оценивать выборочные характеристики случайной функции по одной реализации. Для стационарных временных рядов оценкой $M[Y(t)]$ будет среднее арифметическое значение:

$$\bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i,$$

оценкой дисперсии $D[Y(t)]$:

$$S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2,$$

а оценкой корреляционной функции:

$$K(\tau) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})(Y_{i+\tau} - \bar{Y}),$$

$$\tau = 1, 2, \dots, n.$$

Для сравнения свойств временных рядов с разными масштабами измерения используют нормированную корреляционную функцию:

$$r(\tau) = K(\tau) / S^2.$$

Добавление к случайной функции $Y(t)$ неслучайной величины Y_0 или неслучайной функции $\varphi(t)$ не влияет на значение корреляционной функции.

Типичная корреляционная функция отклонений размеров деталей показана на рис. 2.3.

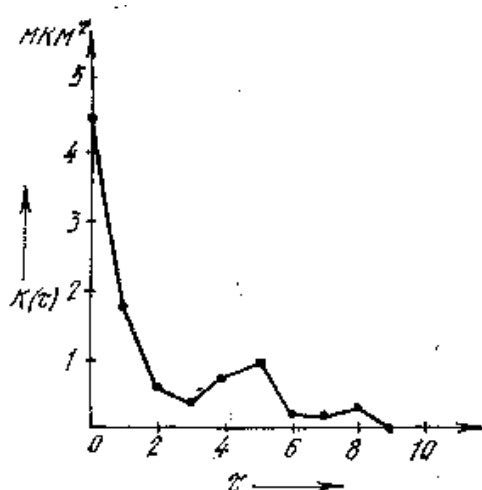


Рис. 2.3. Корреляционная функция отклонения размеров

Пример 1.

Требуется оценить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение стойкости резцов с пластинками твердого сплава марки Т15К6 при обработке деталей из стали 18ХГТ с глубиной резания $a=2$ мм, подачей $S=0,23$ мм/об и скоростью резания $v = 80$ м/мин. Испытывалась партия резцов из 791 шт.

Решение.

Результаты испытания и вычислений приведены в таблице 2.1. Диапазон рассеивания отклика разбит на 9 интервалов с шагом $\Delta T = 2$ мин. Во втором столбце таблицы приведена стойкость резцов T , соответствующая середине интервала.

Таблица 2.1

Распределение частот и результаты вычислений

i	T_i	m_i	$i - \frac{k+1}{2}$	$\left(i - \frac{k+1}{2}\right)m_i$	$\left(i - \frac{k+1}{2}\right)^2$	$\left(i - \frac{k+1}{2}\right)^2 m_i$
1	48	3	-4	-12	16	48
2	50	17	-3	-51	9	153
3	52	75	-2	-150	4	300
4	54	194	-1	-194	1	194
5	56	228	0	0	0	0
6	58	155	1	155	1	155
7	60	91	2	182	4	364
8	62	23	3	69	9	207
9	64	5	4	20	16	80
Итого:		791	0	19		1501

В данном случае середине среднего интервала соответствует отклик: $y_0 = T_0 = 56$ мин.

По формуле:

$$\bar{y} = y_0 + \frac{h}{m} \sum_{i=1}^k \left(i - \frac{k+1}{2}\right) m_i,$$

$$\bar{T} = 56 + \frac{2}{791} 19 = 56,05 \text{ мин};$$

по формуле:

$$S^2 = \frac{h^2}{m-1} \sum_{i=1}^k \left(i - \frac{k+1}{2} \right)^2 m_i - \frac{mh^2}{m-1} \cdot (y_0 - \bar{y})^2,$$

$$S^2 = 2,76 \text{ мин}$$

Пример 2.

В результате испытания партии из 30 сверл получены следующие характеристики их стойкости Т: среднее значение $T = 18,76$ мин, наблюдаемая дисперсия $S = 5,63$. Требуется найти доверительные интервалы для математического ожидания $M(T)$ и среднего квадратического отклонения σ с доверительной вероятностью $P = 0,95$.

Решение.

По заданной P при данном числе измерений из таблиц находим значение критерия Стьюдента $t = 2,045$ и значения критериев

$$q_k^m = 0,28; \chi_1^2 / (m-1) = 1,577; \chi_2^2 / (m-1) = 0,533.$$

По формуле:

$$\bar{y} - t(P, m) \cdot S / \sqrt{m} < Y < \bar{y} + t(P, m) \cdot S / \sqrt{m},$$

определяем ошибку в оценке математического ожидания:

$$\varepsilon = \pm 2,045 \sqrt{5,63 / 30} = \pm 0,855.$$

Тогда $M(T) = 18,76 \pm 0,885$ мин.

По формуле:

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q) \text{ или } \frac{m-1}{\chi_1^2} S^2 < \sigma^2 < \frac{m-1}{\chi_2^2} S^2,$$

доверительный интервал для σ согласно критерию q :

$$\sqrt{5,63}(1-0,28) < \sigma < \sqrt{5,63}(1+0,28) \text{ или } 1,71 < \sigma < 3,04.$$

3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

Статистическая гипотеза — предположение относительно статистических параметров генеральной совокупности или закона распределения случайных величин, проверяемое на основе выборочных данных.

Основная проверяемая гипотеза (нулевая гипотеза) обычно обозначается H_0 . Одновременно формулируется **альтернативная или конкурирующая гипотеза** H_1 .

Например, если проверяется равенство математического ожидания генеральной совокупности некоторому значению μ_0 , нулевая гипотеза $H_0 - M(Y) = \mu_0$, альтернативная гипотеза $H_1 - M(Y) \neq \mu_0$.

Критерием статистической гипотезы называют правило, позволяющее принять или отвергнуть гипотезу на основании выборки из генеральной совокупности.

Принимая или отклоняя гипотезу H_0 , можно допустить ошибки двух видов. **Ошибка первого рода** состоит в том, что гипотеза H_0 отвергается, в то время как в действительности она верна, **ошибка второго рода** — гипотеза H_0 принимается, в то время как верна гипотеза H_1 .

Вероятность ошибки первого рода обозначается α . Ее часто называют **уровнем значимости** критерия гипотезы.

Вероятность ошибки второго рода обозначается β .

Вероятность $1 - \beta$ принятия гипотезы H_1 , когда она верна, называется **мощностью критерия гипотезы** H_0 относительно альтернативной гипотезы H_1 .

Очевидно, что при проверке гипотезы H_0 относительно альтернативной гипотезы H_1 лучшим является тот критерий, который обеспечивает наибольшую мощность при том же самом уровне значимости α .

3.1. Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению

Пусть сформулирована нулевая гипотеза (H_0) $M(Y) = \mu_0$ и альтернативная (H_1) $M(Y) \neq \mu_0$.

Выборка наблюдений объемом m для проверки нулевой гипотезы осуществляется из генеральной совокупности значений случайной величины Y , распределенных по нормальному закону.

Оценкой математического ожидания по выборке будет среднее арифметическое $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i,$$

а оценкой дисперсии:

$$S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2.$$

Для проверки нулевой гипотезы вычисляется наблюдаемое значение критерия Стьюдента:

$$t_H = \frac{|\bar{y} - \mu_0|}{S\sqrt{m}}.$$

Критическое значение критерия t_k определяется для выбранной доверительной вероятности $P=1-\alpha$ и заданного объема выборки m из таблицы критических значений критерия Стьюдента.

При $t_H < t_k$ можно считать, что данные выборки не противоречат нулевой гипотезе.

Если $t_H > t_k$, то гипотеза отвергается.

3.2. Проверка гипотезы о равенстве средних значений

Пусть выборки наблюдений объемом m_1 и m_2 берутся из двух генеральных совокупностей с нормальным распределением, причем дисперсии генеральных совокупностей равны.

Необходимо проверить гипотезу H_0 о равенстве математических ожиданий $M(Y_1) = M(Y_2)$.

По данным выборок определяются оценки математических ожиданий и дисперсий: $\bar{y}_1, \bar{y}_2, S_1^2$ и S_2^2 .

Объединенная оценка дисперсии генеральных совокупностей:

$$S^2 = [S_1^2(m_1 - 1) + S_2^2(m_2 - 1)] / (m_1 + m_2 - 1).$$

Для проверки нулевой гипотезы вычисляется наблюдаемое значение критерия Стьюдента:

$$t_H = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{S} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}.$$

Критическое значение критерия определяется для данной доверительной вероятности P и $m=m_1+m_2$.

При $t_H < t_k$ гипотеза принимается; если $t_H > t_k$ она отвергается.

Пример.

В одинаковых условиях было обработано по 25 втулок развертками диаметром 6 и 10 мм. Результаты измерений показали, что средняя величина разбивки отверстий (разность диаметра развертки и диаметра отверстия) для разверток диаметром 6 мм составляет 10,9 мкм, а диаметром 10 мм— 9,8 мкм. Оценки дисперсий в обоих случаях соответственно 3,8 мкм² и 4,76 мкм². Необходимо установить, влияет ли диаметр развертки на разбивку отверстия.

Решение.

По формуле:

$$S^2 = [S_1^2(m_1 - 1) + S_2^2(m_2 - 1)] / (m_1 + m_2 - 1)$$

$$S^2 = \frac{3,8 \cdot 24 + 4,76 \cdot 24}{49} = 4,19;$$

По формуле:

$$t_H = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{S} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}.$$

$$t_H = \frac{10,9 - 9,8}{\sqrt{4,19}} \sqrt{\frac{25 \cdot 25}{25 + 25}} = 1,9.$$

По таблице критических значений критерия Стьюдента при $P = 0,95$ и $m = 50$ находим $t_k = 2,01$.

Поскольку $t_H < t_k$ ($1,9 < 2,01$), можно считать, что изменение диаметра развертки в пределах от 6 до 10 мм не оказывает существенного влияния на величину разбивки развернутого отверстия.

3.3. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий

При обработке экспериментальных данных часто требуется выяснить вопрос об однородности выборочных дисперсий, т.е. их равенстве дисперсии генеральной совокупности.

Пусть для двух независимых выборок из нормальной генеральной совокупности с объемами m_1 и m_2 вычислены оценки дисперсий согласно формул:

$$S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$\text{или } S = R_m / d_m.$$

Требуется проверить нулевую гипотезу (H_0) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ относительно альтернативной гипотезы (H_1) $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Проверка проводится при помощи **критерия Фишера F**.

Наблюдаемое значение критерия:

$$F_H = S_1^2 / S_2^2 \quad (S_1^2 > S_2^2)$$

сравнивается с критическим F_k , которое определяется из таблицы критических значений критерия Фишера F для выбранных доверительной вероятности и m_1 и m_2 . Если $F_H < F_k$, то выборочные данные не противоречат нулевой гипотезе.

При анализе выборочных данных могут выдвигаться гипотезы об однородности дисперсий в нескольких выборках.

В этом случае можно использовать **критерий Кохрена**.

Наблюдаемое значение критерия G_H определяется по формуле:

$$G_H = \frac{S_{i\max}^2}{\sum_{i=1}^n S_i^2},$$

где $S_{i\max}^2$ — максимальная оценка дисперсии среди n сравниваемых дисперсий (все n выборок имеют одинаковый объем m).

Критическое значение критерия определяется из таблицы критических значений критерия Кохрена в зависимости от принятых доверительной вероятности P , объема выборок m и их числа n .

Пример 1.

В одинаковых условиях было обработано по 25 втулок развертками диаметром 6 и 10 мм. Результаты измерений показали, что средняя величина разбивки отверстий (разность диаметра развертки и диаметра отверстия) для разверток диаметром 6 мм составляет 10,9 мкм, а диаметром 10 мм — 9,8 мкм. Оценки дисперсий в обоих случаях соответственно 3,8 мкм² и 4,76 мкм².

Необходимо проверить гипотезу о равенстве дисперсий.

Решение.

По формуле

$$F_H = S_1^2 / S_2^2 \quad (S_1^2 > S_2^2)$$

определяем наблюдаемое значение критерия Фишера: $F_H = 4,76/3,8 = 1,25$.

Из таблицы критических значений критерия Кохрена для $P = 0,95$, $m_1 = m_2 = 20$ находим $F_k = 2,16$, а для $m_1 = m_2 = 30$ — $F_k = 1,84$.

Искомое значение F_k для $m_1 = m_2 = 25$ находим линейной интерполяцией:

$$F_k = (1,84 + 2,16)/2 = 2.$$

Так как $F_H < F_k$ ($1,25 < 2$), нулевая гипотеза о равенстве дисперсий принимается.

Пример 2.

С четырех автоматов, настроенных на обработку одних и тех же деталей, взято по одной текущей выборке объемом $m = 10$.

Оценки дисперсий их размеров имели следующие значения: 106, 294; 216; 410 мкм².

Требуется определить, одинакова ли точность автоматов, т. е. можно ли принять гипотезу об однородности дисперсий.

Решение.

Согласно формуле:

$$G_H = \frac{S_{i\max}^2}{\sum_{i=1}^n S_i^2}, \quad G_H = \frac{410}{106 + 294 + 216 + 410} = 0,3996$$

По таблице критических значений критерия Кохрена для $P = 0,95$, $m=10$ и $n = 4$ находим $G_k = 0,502$.

Поскольку $G_n < G_k$. ($0,3996 < 0,502$), можно считать точность автоматов практически одинаковой.

3.4. Проверка случайности и независимости результатов измерений в выборке

До статистической обработки результатов измерения отклика необходимо убедиться в том, что они являются стохастически независимыми.

Альтернативной гипотезой может быть предположение о наличии монотонного или циклического смещения (дрейфа) значения отклика, вызванного неконтролируемым фактором.

Подобный случай может иметь место при анализе размеров деталей, обрабатываемых на настроенном станке, когда вследствие изнашивания инструмента или нагрева станка центр группирования размеров постепенно смещается при неизменной стандартной погрешности.

Наиболее мощным критерием проверки нулевой гипотезы будет критерий последовательных разностей τ .

Наблюдаемое значение критерия:

$$\tau_H = c^2 / S^2,$$

$$c^2 = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} (Y_{i+1} - Y_i)^2,$$

где m — объем выборки; i — порядковый номер измерения отклика в выборке; S^2 — оценка дисперсии, вычисляемая по формулам:

$$S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2,$$

$$S = R_m / d_m,$$

$$S^2 = \frac{h^2}{m-1} \sum_{i=1}^k \frac{m_i^2}{m} - \frac{k+1}{2} \frac{h^2}{m} - \frac{mh^2}{m-1} (\bar{y}_0 - \bar{y})^2.$$

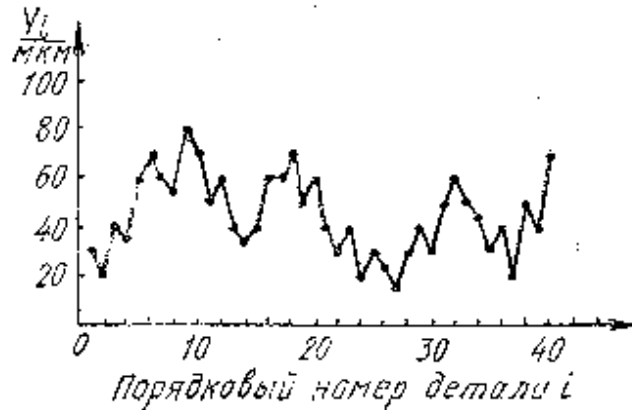
Критическое значение τ_k определяется из таблицы значений критерия τ_k в зависимости от принятой доверительной вероятности P и объема выборки m .

Если $\tau_n < \tau_k$, то гипотеза о независимости и случайности измерений в выборке отвергается.

Пример.

По результатам измерения деталей, обработанных на токарно-револьверном автомате, необходимо проверить наличие или отсутствие дрейфа размеров.

Объем выборки $m = 40$.



Решение.

$$\bar{y} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} Y_i = 45 \text{ мкм}, \quad S^2 = \frac{1}{40-1} \sum_{i=1}^{40} (Y_i - \bar{y})^2 = 267,95 \text{ мкм}^2,$$

$$s^2 = \frac{1}{2(40-1)} \sum_{i=1}^{39} (Y_{i+1} - Y_i)^2 = 114,74 \text{ мкм}^2, \quad \tau_H = 114,74 / 267,95 = 0,428.$$

Из таблицы значений критерия τ_k для $t = 40$ и $P = 0,95$ получаем $\tau_k = 0,742$.

Так как $\tau_H < \tau_k$ ($0,428 < 0,742$), гипотезу, об отсутствии дрейфа следует отклонить.

Следовательно, размер обрабатываемых деталей зависит от неучтенного фактора, вызвавшего циклическое смещение центра группирования размеров.

4. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Дисперсионный анализ предназначен для выявления степени влияния контролируемых факторов на отклик. В зависимости от количества факторов, включенных в анализ, различают однофакторный, двухфакторный и многофакторный дисперсионный анализ. Проведение дисперсионного анализа возможно, если результаты измерений являются независимыми случайными величинами, подчиняющимися нормальному закону распределения с одинаковыми дисперсиями.

4.1. Однофакторный дисперсионный анализ

При *однофакторном дисперсионном анализе* выявляется степень влияния одного фактора X на математическое ожидание отклика $M(Y)$.

Фактор может быть количественным (скорость резания, размер заготовки и т.д.) или качественным (модель станка, марка инструментального материала и т.д.).

В процессе эксперимента фактор поддерживают на n уровнях. На каждом уровне фактора проводится m дублирующих опытов. Значение m может быть одинаковым или разным для каждого из уровней.

Результаты всех измерений удобно представлять в виде таблицы, которую называют матрицей наблюдений (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Матрица наблюдений

Номер уровня фак- тора	Уровень фактора	Наблюдения	Число дублирующих опытов
1	X_1	$Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1j}, \dots, Y_{1m1}$	m_1
2	X_2	$Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2j}, \dots, Y_{2m2}$	m_2
...			...
i	X_i	$Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{ij}, \dots, Y_{imi}$	m_i
...	...		...
n	X_n	$Y_{n1}, Y_{n2}, \dots, Y_{nj}, \dots, Y_{nmn}$	m_n

Вначале для каждой серии дублирующих опытов вычисляют оценки $M(Y_i)$, равные $\bar{y}_i$, и дисперсии воспроизводимости S_{Bi}^2 :

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}; \quad S_{Bi}^2 = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{j=1}^{m_i} (Y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

Затем проверяют однородность ряда дисперсий $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_n$ для каждой пары при помощи критерия Фишера, если m_i различны, или при помощи критерия Кохрена, если $m_i = \text{const}$.

После подтверждения гипотезы об однородности дисперсий можно приступить к анализу.

При этом полагают, что результат любого измерения Y_{ij} - можно представить моделью:

$$Y_{ij} = \mu + \gamma_i + \varepsilon_{ij},$$

где μ — общая средняя; γ_i — отклонение, вызванное изменением контролируемого фактора; ε_{ij} — отклонение, вызванное неконтролируемыми факторами.

Задача дисперсионного анализа состоит в оценке существенности влияния изменения уровня фактора.

Влияние неконтролируемых факторов, т. е. вклад ε_{ij} , можно оценить средней дисперсией воспроизводимости:

$$S_B^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_i} S_{Bi}^2.$$

Общее рассеивание значений отклика, вызванное как контролируемым, так и неконтролируемыми факторами, оценивается полной (или общей) дисперсией:

$$S_0^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (y_{ij} - \bar{m})^2,$$

где

$$N = \sum_{i=1}^n m_i; \quad \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i.$$

Рассеивание значений отклика, вызванное контролируемым фактором, оценивается дисперсией:

$$S^2(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{y}_i - \mu)^2$$

Для выявления степени влияния фактора X и сопоставления ее с разбросом, вызванным случайными, неконтролируемыми причинами, проверяют однородность дисперсий $S(X)$ и S_B рассмотренными ранее методами.

Если отношение F_n окажется меньше критического F_k , найденного для заданной доверительной вероятности P и числа степеней свободы $f_x = n - 1$ и $f = N - n$, то влияние фактора X незначительно, и все полученные результаты измерений принадлежат одной генеральной совокупности, распределенной нормально с параметрами σ_2 и $M(Y)$, точечные оценки которых равны соответственно S_0 и μ .

Чтобы определить F_k по таблице критических значений критерия Фишера следует принять $m_1 = f_x + 1$ и $m_2 = f + 1$.

При $F_n > F_k$ влияние фактора существенно.

Считается, что в данном случае есть n нормально распределенных совокупностей, каждая из которых имеет одну и ту же дисперсию σ_2 и соответствующее математическое ожидание μ_i .

Точечной оценкой σ_2 в данном случае является S_B , а математического ожидания - $\bar{y}_i$.

Оценку дисперсии средних значений, вызванную влиянием исследуемого фактора X , производят по формуле:

$$S_\mu^2 = \frac{n-1}{N} [S^2(X) - S_B^2].$$

Пример.

Требуется оценить качество пяти марок СОЖ, используемых для бесцентрового шлифования. Критерием качества выбрана шероховатость деталей, шлифованных при одинаковых режимах.

Решение.

Марки СОЖ ранжированы цифрами натурального ряда 1...5. Результаты опытов приведены в матрице наблюдений:

Матрица наблюдений

Номер уровня фактора (марки СОЖ)	Уровень фактора	Значения R_a в опытах					
		1	2	3	4	5	6
1	X_1	0,72	0,6	0,65	0,32	0,8	0,52
2	X_2	0,15	0,62	0,22	0,4	0,25	0,3
3	X_3	0,45	0,3	0,5	0,58	0,48	0,32
4	X_4	1,2	0,92	0,72	0,8	1	0,8
5	X_5	0,58	0,9	0,7	1	0,48	0,6

По формуле:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}; \quad S_{Bi}^2 = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{j=1}^{m_i} (Y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

получены: $\bar{y}_i = 0,6; 0,32; 0,44; 0,91; 0,71$; $S_i = 0,028; 0,028; 0,012; 0,031; 0,04$.

Однородность дисперсий проверяем при помощи критерия Кохрена:

$$G_H = \frac{S_{i\max}^2}{\sum_{i=1}^n S_i^2},$$

$$G_H = \frac{0,04}{\sum_{i=1}^5 S_i^2} = 0,29.$$

Согласно таблице критических значений критерия Кохрена, при $m = 6$, $n = 5$ и $P = 0,95$ $G_k = 0,507$.

Поскольку $G_H < G_k$, то разницу между дисперсиями можно считать незначимой и принять нулевую гипотезу. По формуле:

$$S_B^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_i} S_{Bi}^2.$$

$$S_B^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 S_i^2 = 0,0278.$$

а согласно формуле

$$N = \sum_{i=1}^n m_i; \quad \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i.$$

и формуле

$$S^2(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{y}_i - \mu)^2.$$

$$\mu = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \bar{y}_i = 0,596; \quad S^2(X) = \frac{5}{6-1} \sum_{i=1}^5 (\bar{y}_i - \mu)^2 = 0,212.$$

Наблюдаемое значение критерия Фишера $F_n = 0,212/0,0278 == 7,63$.
Число степеней свободы $f_x = 5-1=4$; $f_b == 30 - 5 = 25$.

По таблице критических значений Фишера при $P=0,95$, $m1 = 5$ и $m2=26$ находим $F_k \sim 2,74$.

Поскольку $F_n > F_k$ ($7,63 > 2,74$), то изменение шероховатости детали при изменении марки СОЖ следует считать значимым.

Согласно формуле:

$$S_\mu^2 = \frac{n-1}{N} [S^2(X) - S_B^2]$$

$$S_\mu^2 = 4(0,212 - 0,0278) / 30 = 0,0246.$$

Для более глубокого анализа рекомендуется оценить значимость различия влияния СОЖ марок 1 и 3, которые обеспечивают минимальную высоту микронеровностей. Это делается при помощи критерия Стьюдента.

4.2. Двухфакторный дисперсионный анализ

В данном случае при оценке степени влияния двух одновременно действующих факторов X_1 и X_2 предполагается, что каждый фактор изменяется независимо от другого.

В процессе эксперимента первый фактор поддерживается на n уровнях, а второй — на r уровнях.

Для каждого сочетания i -го уровня фактора X_1 и j -го уровня фактора X_2 проводится m_{ij} дублирующих опытов.

В частном случае $m_{ij}=1$ или $m_{ij} = m$.

Результаты опытов:

Таблица 4.3

Матрица наблюдений

$X_1 \backslash X_2$	X_{21}	X_{22}	...	X_{2j}	...	X_{2r}
X_{11}	$\bar{Y}_{11}$	$\bar{Y}_{12}$	...	$\bar{Y}_{1j}$	...	$\bar{Y}_{1r}$
X_{12}	$\bar{Y}_{21}$	$\bar{Y}_{22}$	...	$\bar{Y}_{2j}$	...	$\bar{Y}_{2r}$
...	...	...	...	...	...	...
X_{1i}	$\bar{Y}_{i1}$	$\bar{Y}_{i2}$	...	$\bar{Y}_{ij}$	...	$\bar{Y}_{ir}$
...	...	...	...	...	...	...
X_{1n}	$\bar{Y}_{n1}$	$\bar{Y}_{n2}$	...	$\bar{Y}_{nj}$	...	$\bar{Y}_{nr}$

где в (i, j)-й ячейке записывается матрица наблюдений:

$$\overline{Y}_{ij} = \begin{pmatrix} Y_{ij1} \\ Y_{ij2} \\ \dots \\ Y_{ijm} \end{pmatrix}.$$

Результаты любого наблюдения можно представить моделью:

$$Y_{ijv} = \mu + \gamma_{iv} + g_{jv} + v_{ij} + \varepsilon_{ijv},$$

где μ – общая средняя; γ_{iv} – отклонение, вызванное влиянием первого фактора на i-м уровне в v-м дублирующем опыте; g_{jv} – отклонение, вызванное влиянием второго фактора на j-м уровне; v_{ij} – отклонение за счет взаимодействия факторов; ε_{ijv} – отклонение, вызванное влиянием неконтролируемых факторов.

На первом этапе для каждой ячейки вычисляются:

$$\overline{y}_{ij} = \frac{1}{m_{ij}} \sum_{v=1}^{m_{ij}} Y_{ijv}; \quad S_{ij}^2 = \frac{1}{m_{ij} - 1} \sum_{v=1}^{m_{ij}} (Y_{ijv} - \overline{y}_{ij})^2.$$

Затем проверяется однородность полученного ряда дисперсий. После подтверждения нулевой гипотезы приступают к вычислениям средних по строкам и столбцам матрицы наблюдений (табл. 4.4):

Таблица 4.4

$\begin{matrix} \diagdown \\ X_1 \end{matrix}$	X_2	X_{21}	X_{22}	$\dots$	X_{2j}	$\dots$	X_{2r}	Средние по стро- кам
X_{11}	$\overline{y_{11}}$	$\overline{y_{12}}$	$\dots$	$\overline{y_{1j}}$	$\dots$	$\overline{y_{1r}}$	$\overline{y_1}$	
X_{12}	$\overline{y_{21}}$	$\overline{y_{22}}$	$\dots$	$\overline{y_{2j}}$	$\dots$	$\overline{y_{2r}}$	$\overline{y_2}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
X_{1i}	$\overline{y_{i1}}$	$\overline{y_{i2}}$	$\dots$	$\overline{y_{ij}}$	$\dots$	$\overline{y_{ir}}$	$\overline{y_i}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
X_{1n}	$\overline{y_{n1}}$	$\overline{y_{n2}}$	$\dots$	$\overline{y_{nj}}$	$\dots$	$\overline{y_{nr}}$	$\overline{y_n}$	
Средние по столб- цам	$\overline{y_1}'$	$\overline{y_2}'$	$\dots$	$\overline{y_j}'$	$\dots$	$\overline{y_r}'$	μ	

$$\overline{y}_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r y_{ij}; \quad \overline{y}_j' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overline{y}_{ij}; \quad \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overline{y}_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \overline{y}_j'$$

Средняя дисперсия воспроизводимости:

$$S_B^2 = \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r S_{ij}^2;$$

дисперсия изменчивости отклика под влиянием фактора X_1 :

$$S^2(X_1) = \frac{mr}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \mu)^2;$$

дисперсия изменчивости под влиянием фактора X_2 :

$$S^2(X_2) = \frac{mr}{r-1} \sum_{j=1}^r (\bar{y}_j - \mu)^2;$$

дисперсия за счет взаимодействия факторов X_1 и X_2 :

$$S^2(X_1, X_2) = \frac{m}{(n-1)(r-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i - \bar{y}_j + \mu)^2.$$

Последними двумя формулами можно пользоваться, если количество дублирующих опытов постоянно и равно m .

Значимость влияния факторов X_1 и X_2 , а также их взаимодействия проверяется при помощи критерия Фишера.

Наблюдаемые значения критерия определяются по формулам:

$$F_H(X_1) = S^2(X_1)/S_B^2; \quad F_H(X_2) = S^2(X_2)/S_B^2; \quad F_H(X_1, X_2) = S^2(X_1, X_2)/S_B^2,$$

а критические — по таблице критических значений критерия Фишера согласно заданному значению доверительной вероятности P , числу степеней свободы $f(X_1)=n-1$; $f(X_2)=r-1$; $f(X_1, X_2) = (n-1)(r-1)$; $f_B = nr(m-1)$.

В данном случае $m_2=f_B+1$; $m_1=f(X_1)+1$; $m_1=f(X_2)+1$; $m_1=f(X_1, X_2)+1$.

Если $m=1$, т. е. при каждом сочетании уровней факторов проводится только один опыт, то анализ можно проводить, если эффект взаимодействия факторов X_1 и X_2 незначим. Тогда дисперсия воспроизводимости вычисляется по формуле:

$$S^2(X_1, X_2) = \frac{m}{(n-1)(r-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i - \bar{y}_j + \mu)^2.$$

5. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

5.1. Парная корреляция

Основная задача корреляционного анализа — **выявление значимости связи между значениями различных случайных величин.**

Величины, значения которых не зависят от того, какие значения получили некоторые другие величины, называются **независимыми от них.**

Зависимость между величинами (в том числе и случайными), при которых каждому значению одной величины (аргумента) отвечает одно или несколько вполне определенных значений другой, называют соответственно **однозначной или многозначной функциональной зависимостью.**

Зависимость между величинами, при которой каждому значению одной величины отвечает с соответствующей вероятностью множество возможных значений другой, называют **вероятностной (стохастической, статистической).**

В общем случае вероятностной связи при изменении значения одной величины изменяется условный закон распределения другой.

Если при наличии вероятностной зависимости между двумя величинами **с изменением значения одной величины изменяется только математическое ожидание второй** (и наоборот), **а дисперсия, области возможных значений и тип закона распределения остаются неизменными, то для таких величин характерна корреляционная зависимость.**

Примерами корреляционной связи являются зависимости:

- между пределами прочности и текучести стали определенной марки;
- между погрешностью размера и погрешностью формы поверхности детали, обработанной определенным методом;
- между температурой испытания и ударной вязкостью стали;
- между усилием прижима ролика и шероховатостью накатанной детали.

В первых двух примерах имеет место корреляционная связь между двумя откликами, а в третьем и четвертом — между фактором, который является случайной величиной (в связи с погрешностью измерения), и откликом.

Пусть X и Y — случайные переменные, имеющие нормальное распределение.

Силу линейной статистической связи между ними можно оценить **коэффициентом корреляции:**

$$\rho = M \left[\frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}} \right] \left[\frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \right],$$

который принимает значения в интервале $(-1, +1)$ и не зависит от выбора начала отсчета и единиц величин X и Y . Чем больше отличается от нуля коэффициент корреляции, тем сильнее зависимость между величинами X и Y .

Коэффициент корреляции независимых величин равен нулю. Однако обратное утверждение не всегда является верным, потому что на коэффициент корреляции оказывает влияние также отклонение от линейности связи.

Характеристикой **нелинейной корреляционной связи является корреляционное отношение:**

$$\eta_r^2 = \left\{ M \left[M(Y|X=x) - M(Y) \right]^2 \right\} / M[Y - M(Y)]^2,$$

где $M(Y|X=x)$ — условное математическое ожидание случайной переменной Y , рассматриваемое как функция x .

Оценкой коэффициента корреляции является значение коэффициента r . Для его вычисления необходимо знать оценки математических ожиданий $M(X)$ и $M(Y)$, а также дисперсий $D(X)$ и $D(Y)$.

Если выполнено m наблюдений:

$$r = \left[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \right] / [(m-1)S(X)S(Y)].$$

При относительно небольшом m удобно пользоваться следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) &= \sum_{i=1}^m X_i Y_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \sum_{i=1}^m Y_i; \\ (m-1)S^2(X) &= \sum_{i=1}^m X_i^2 - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m X_i \right)^2; \\ (m-1)S^2(Y) &= \sum_{i=1}^m Y_i^2 - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m Y_i \right)^2. \end{aligned} \right\}$$

На практике при небольших значениях m для вычисления выборочного коэффициента корреляции r используют **поле корреляции и корреляционную таблицу**.

Для построения поля корреляции **каждую пару случайных чисел X_i, Y_i**

изображают графически в виде точки с координатами (X_i, Y_i) . По осям координат откладываются интервалы изменения переменных и наносится координатная сетка. Каждую пару переменных из данной выборки изображают точкой в соответствующей клетке. Такое изображение называют полем корреляции.

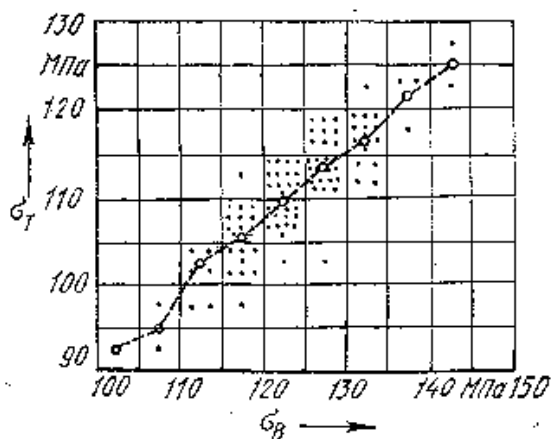


Рис. 5.1. Путь корреляции

На рисунке 5.1 показано поле корреляции для 108 совместных измерений предела прочности σ_b и предела текучести σ_T стали 30ХГСА. Поле корреляции позволяет построить корреляционную таблицу 5.1.

Таблица 5.1

Корреляционная таблица

$\sigma_T \backslash \sigma_b$	925 (0)	975 (1)	1025 (2)	1075 (3)	1125 (4)	1175 (5)	1225 (6)	1275 (7)	Итого
1025 (2)	1								1
1075 (3)	1	1							2
1125 (4)		2	4	2					8
1175 (5)		1	7	11	2				20
1225 (6)			1	13	13				27
1275 (7)			1	2	15	9			27
1325 (8)					4	10	1		15
1375 (9)						1	3		4
1425 (10)							1	1	2
Итого	2	5	13	28	33	20	5	1	106

В ячейки, образованные пересечением строк и столбцов, заносятся частоты m_{xy} попадания пар значений (X, Y) в соответствующие интервалы поля корреляции.

В первом столбце и первой строке корреляционной таблицы указывают середины интервалов изменения случайных величин, а в последних — суммы частот m_{xy} по строкам и столбцам (m_x и m_y соответственно).

Формулы для расчета составляющих оценки коэффициента корреляции можно преобразовать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) &= \sum_{i=1}^m x_i y_i m_{xy} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m_1} x_i m_x \sum_{i=1}^{m_2} y_i m_y; \\ mS^2(X) &= \sum_{i=1}^{m_1} x_i^2 m_x - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m_1} x_i m_x \right)^2; \\ mS^2(Y) &= \sum_{i=1}^{m_2} y_i^2 m_y - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m_2} y_i m_y \right)^2, \end{aligned} \right\}$$

где x_i и y_i — середины соответствующих интервалов изменения величин; m_1 — число столбцов, а m_2 — число строк корреляционной таблицы;

$$e m_{XY} = e m_X = e m_Y.$$

Если диапазоны изменения X и Y разделены на равные интервалы (Δx и Δy), то вместо натуральных значений можно использовать целочисленные коды. Для этого нужно выполнить линейное преобразование x и y по формулам:

$$x_{ki} = \frac{x_i - x_{\min}}{\Delta x}; y_{ki} = \frac{y_i - y_{\min}}{\Delta y}.$$

Тогда коды x_i примут значения $x_{ik} = 0, 1, 2, \dots, i$, а коды y_i будут сдвинуты на целое число $\Delta = y_{\min} / \Delta y - x_{\min} / \Delta x$.

Проверка значимости коэффициента корреляции производится при помощи критерия Стьюдента. Наблюдаемое значение критерия:

$$t_H = r \sqrt{(m-2)/(1-r^2)}.$$

Критическое значение критерия определяется из таблицы по принятому значению доверительной вероятности P и числу степеней свободы $f = m-2$. Поэтому при выборе t_k следует принимать $m=f+1$. Если $|t_H| < t_k$, то принимается нулевая гипотеза $\rho = 0$. В противном случае она отклоняется.

Выборочное корреляционное отношение вычисляется по формуле:

$$\eta^2 = S^2(Y|x) / S^2(Y),$$

где $S^2(Y|x)$ — условная дисперсия:

$$S^2(Y|x) = \frac{1}{m} \sum [\bar{y}(x) - \bar{y}]^2 m_x;$$

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{m_x} \sum y_i m_{xy}.$$

Корреляционное отношение η_T^2 связано с ρ^2 следующим образом:

$$0 \leq \rho^2 \leq \eta_T^2 \leq 1.$$

В случае линейной зависимости между переменными $\rho^2 = \eta_T^2$. Разность $\eta_T^2 - \rho^2$ может служить показателем нелинейной связи.

Пример.

На основании данных корреляционной таблицы (табл. 4.1) необходимо определить выборочный коэффициент корреляции r между σ_T и σ_B .

Решение.

Кодом для σ_B выбираем x , а для σ_T — y . Тогда $\Delta=2$ (коды записаны в корреляционной таблице под действительными значениями в скобках).

На основании формул:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) &= \sum_{i=1}^m x_i y_i m_{XY} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m_1} x_i m_X \sum_{i=1}^{m_2} y_i m_Y; \\ mS^2(X) &= \sum_{i=1}^{m_1} x_i^2 m_X - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m_1} x_i m_X \right)^2; \\ mS^2(Y) &= \sum_{i=1}^{m_2} y_i^2 m_Y - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m_2} y_i m_Y \right)^2, \end{aligned} \right]$$

получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{106} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) &= 2569 - \frac{1}{106} 667 \cdot 384 = 152,698; \\ mS^2(X) &= 4429 - \frac{1}{106} 667^2 = 231,934; S(x) = 1,479; \\ mS^2(Y) &= 1566 - \frac{1}{106} 384^2 = 174,906; S(y) = 1,285. \end{aligned} \right]$$

По формуле:

$$r = \left[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \right] / [(m-1)S(X)S(Y)].$$

$$r = 152,698 / (105 - 1,479 \cdot 1,285) = 0,763.$$

5.2. Многомерный корреляционный анализ

Если имеется многомерная нормально распределенная совокупность с n признаками $X_1, X_2, \dots, X_n$, то взаимозависимость между ними описывается корреляционной матрицей, под которой понимают матрицу, составленную из парных коэффициентов корреляции:

$$Q_n = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{Ж1} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1k} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2k} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{j1} & r_{j2} & r_{j3} & \dots & r_{jk} & \dots & r_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & r_{nk} & \dots & 1 \end{array} \end{array}$$

где r_{jk} — парные коэффициенты корреляции.

Оценку парного коэффициента корреляции находят по формулам:

$$r = \left[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \right] / [(m-1)S(X)S(Y)].$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) &= \sum_{i=1}^m X_i Y_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \sum_{i=1}^m Y_i; \\ (m-1)S^2(X) &= \sum_{i=1}^m X_i^2 - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m X_i \right)^2; \\ (m-1)S^2(Y) &= \sum_{i=1}^m Y_i^2 - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m Y_i \right)^2. \end{aligned}$$

в которые вместо x_i подставляют x_{ij} , а вместо y_i — x_{hi} .

В случае многомерной корреляции нельзя ограничиться одной корреляционной матрицей, так как зависимости между признаками сложны.

Для более детального анализа используются частные коэффициенты корреляций различных порядков, позволяющие оценивать связь между двумя признаками при фиксированном значении остальных.

Если исходная совокупность состоит из n признаков, то частный коэффициент корреляции 1-го порядка отражает зависимость между двумя из них при фиксированных значениях l признаков из $(n-2)$ оставшихся.

Если имеется, например, система из трех признаков X_1 , X_2 и X_3 , то можно определять частные коэффициенты корреляции только первого порядка, так как в данном случае нельзя фиксировать больше одного признака. Если фиксировать значение X_3 , то:

$$\rho_{12,3} = (\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}) / \sqrt{(1-\rho_{13}^2)(1-\rho_{23}^2)},$$

где $\rho_{12,3}$ — частный коэффициент корреляции между признаками X_1 и X_2 при фиксированном значении X_3 ; ρ_{12} , ρ_{13} , ρ_{23} — парные коэффициенты корреляции.

Аналогично определяются $\rho_{13,2}$ и $\rho_{23,1}$.

Расчет частных коэффициентов позволяет оценить взаимное влияние признаков.

Если, например, корреляция между X_1 и X_2 основана только на общем влиянии X_3 , то $\rho_{12,3} = 0$.

Если имеются четыре признака, то можно зафиксировать значения одного или двух признаков. В последнем случае:

$$\rho_{12,34} = \frac{(\rho_{12,4} - \rho_{13,4}\rho_{23,4})}{\sqrt{(1-\rho_{13,4}^2)(1-\rho_{23,4}^2)}} = \frac{(\rho_{12,3} - \rho_{14,3}\rho_{24,3})}{\sqrt{(1-\rho_{14,3}^2)(1-\rho_{24,3}^2)}}.$$

Частные коэффициенты корреляции вычисляются на основании оценок парных коэффициентов корреляции. Так же, как и для парных, проверяется значимость частных коэффициентов корреляции, но при этом число степеней свободы при исключении каждого признака уменьшается на единицу.

Если фиксируется значение одного признака, то в формуле

$$t_H = r\sqrt{(m-2)/(1-r^2)}$$

вместо $(m-2)$ следует подставить $(m-3)$, а если фиксируется значение двух признаков — $(m-4)$.

Для оценки линейной связи одного из признаков со всеми остальными используется **множественный, или совокупный, коэффициент корреляции**.

Для случая трех признаков коэффициент множественной корреляции оценивается по формуле:

$$R_{123} = \sqrt{(r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23})/(1-r_{23}^2)};$$

при этом X_2 и X_3 , зависимость признака X_1 , от которых оценивает R_{123} , считаются независимыми.

Для случая четырех признаков:

$$R_{1234}^2 = 1 - (1-r_{12}^2)(1-r_{13,2}^2)(1-r_{14,23}^2)$$

Значимость коэффициента множественной корреляции определяется при помощи критерия Фишера. Наблюдаемое значение критерия:

$$F_H = \frac{R^2}{1-R^2} \frac{m-l-2}{l},$$

где m — число наблюдений; $l=n-1$; n — число признаков.

Критическое значение критерия Фишера определяется из таблицы согласно принятым доверительной вероятности P и числу степеней свободы $f_1=m-l-2$; $f_2=l$. Принимается $m_1 = f_1 + 1$; $m_2=f_2+1$.

Пример.

При изучении бесцентрового шлифования роликов методом на проход контролировались следующие показатели качества: погрешность формы X_1 , погрешность размера X_3 и параметр шероховатости X_2 . Всего было прошлифовано 50 образцов. При этом получена следующая матрица парных коэффициентов корреляции:

$$q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0,85 & 0,62 \\ & 1 & 0,53 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Необходимо установить характер взаимовлияния признаков.

Решение.

По формуле

$$\rho_{12,3} = (\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23})/\sqrt{(1-\rho_{13}^2)(1-\rho_{23}^2)},$$

$$r_{12,3} = (0,85 - 0,62 \cdot 0,53) / \sqrt{(1 - 0,62^2)(1 - 0,53^2)} = 0,784;$$

$$r_{23,1} = (0,53 - 0,85 \cdot 0,62) / \sqrt{(1 - 0,85^2)(1 - 0,62^2)} = 0,007;$$

$$r_{31,2} = (0,62 - 0,85 \cdot 0,53) / \sqrt{(1 - 0,85^2)(1 - 0,53^2)} = 0,379.$$

По формуле

$$t_H = r \sqrt{(m-2)/(1-r^2)}.$$

проверяется значимость частных коэффициентов корреляции:

$$t_{H1} = 0,784 \sqrt{47/(1-0,784^2)} = 8,658;$$

$$t_{H2} = 0,007 \sqrt{47/(1-0,007^2)} = 0,048;$$

$$t_{H3} = 0,379 \sqrt{47/(1-0,379^2)} = 2,808.$$

Согласно таблице, при $P=Q$, 95 $t_k=2$.

Поскольку $t_{H1} > t_k$ и $t_{H3} > t_k$, то нулевая гипотеза о незначимости связи между X_1 и X_2 , а также X_1 и X_3 отвергается.

Но $t_{H2} < t_k$, поэтому величины X_2 и X_3 являются независимыми.

Следовательно, условия шлифования, обуславливающие изменение погрешностей формы, влияют одновременно и на уровень значения параметра шероховатости и погрешности размера. Причем эти условия сильнее влияют на шероховатость, чем на погрешность размера, так как $r_{12,3} > r_{31,2}$.

5.3. Корреляционные уравнения

Получение корреляционных уравнений — заключительный этап исследования связей между случайными величинами.

Корреляционные уравнения позволяют вычислить вероятные значения одной случайной величины в зависимости от значений других случайных величин.

Вероятным значением случайной величины Y называется ее значение, вычисленное с помощью корреляционного уравнения и близкое к условному математическому ожиданию:

$$M(Y|X_i=x_i)$$

Корреляционное уравнение удобнее всего записывать в виде **разложения по ортогональным многочленам Чебышева**, что позволяет последовательно уточнять математическую модель с вычислением ошибки аппроксимации корреляционного уравнения полиномом данной степени.

Вначале корреляционная модель предполагается линейной:

$$(Y - \bar{Y})S(Y) = r\varepsilon,$$

где $\varepsilon = (X - \bar{X})/[\Delta X \cdot S(X)]$;

r — оценка коэффициента корреляции между Y и X ;
 $S(X)$, $S(Y)$ — оценки стандартного отклонения случайных величин X и Y ;
 $\bar{X}$, $\bar{Y}$ — оценки математического ожидания величин;
 ΔX — шаг разбиения интервала изменения случайной величины X :

$$x_{Ki} = \frac{x_i - x_{\min}}{\Delta x};$$

Значения $S(X)$ и $S(Y)$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) &= \sum_{i=1}^m x_i y_i m_{XY} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m_1} x_i m_X \sum_{i=1}^{m_2} y_i m_Y \\ mS^2(X) &= \sum_{i=1}^{m_1} x_i^2 m_X - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m_1} x_i m_X \right)^2 \\ mS^2(Y) &= \sum_{i=1}^{m_2} y_i^2 m_Y - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m_2} y_i m_Y \right)^2 \end{aligned}$$

r — по формуле

$$\begin{aligned} r &= \left[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \right] / [(m-1)S(X)S(Y)] \\ \bar{X} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k x_i m_i; \quad \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^l y_j m_j; \end{aligned}$$

где k и l — соответственно количество строк и столбцов корреляционной таблицы; m_i и m_j — суммы частот m_{XY} соответственно по i -й строке и j -му столбцу; m — общее число наблюдений; x_i и y_i — середины интервалов значений случайных величин.

Оценка ошибки определения Y с помощью корреляционного уравнения осуществляется по остаточной дисперсии:

$$S_0^2 = S^2(Y) \cdot (1 - r^2).$$

Проверка линейности связи между Y и X производится при помощи критерия линейности:

$$K_1 = \eta^2 - r^2,$$

который вычисляется с ошибкой:

$$S(K_1) = \sqrt{K_1 / m}.$$

Значение η^2 вычисляется по формулам:

$$\eta^2 = S^2(Y|x) / S^2(Y);$$

$$S^2(Y|x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k (\bar{y} - \bar{y}_i)^2 m_i.$$

Если K_1 незначимо отличается от $S(K_1)$, то можно остановиться на линейной модели:

$$(Y - \bar{Y})S(Y) = r\varepsilon.$$

Если K_1 значимо отличается от нуля, то корреляционное уравнение предполагается в виде полинома второй степени:

$$(Y - \bar{Y})S(Y) = r\varepsilon + \frac{b_1}{a_1}(\varepsilon^2 + r_{30}\varepsilon - 1),$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= r_{40} - r_{30}^2 - 1; \quad b_1 = r_{21} - r_{30}r; \\ r_{30} &= \frac{\mu_{30}}{S^3(X)}; \quad r_{40} = \frac{\mu_{40}}{S^4(X)}; \quad r_{21} = \frac{\mu_{21}}{S^3(X) \cdot S(Y)}; \\ \mu_{30} &= M_{30} - 3\mu_{20}M_{10} - M_{10}^3; \quad \mu_{20} = M_{20} - M_{10}^2 = S^2(X); \\ \mu_{40} &= M_{40} - 2\mu_{21}M_{10} - 6\mu_{20}M_{10}^2 - M_{10}^4; \\ \mu_{21} &= M_{21} - 2\mu_{11}M_{10} - M_{20}M_{01}; \\ \mu_{11} &= M_{12} - M_{10}M_{01}; \quad M_{10} = \bar{X}; \quad M_{01} = \bar{Y}; \\ M_{20} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k x_i^2 m_i; \quad M_{30} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k x_i^3 m_i; \\ M_{40} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k x_i^4 m_i; \quad M_{02} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^l y_j^2 m_j; \\ M_{11} &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k x_i y_j m_{XY}; \quad M_{21} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k x_i^2 y_j m_{XY}. \end{aligned}$$

Погрешность определения Y с помощью корреляционного уравнения второго порядка оценивается остаточной дисперсией:

$$S_0^2 = S^2(Y) \cdot (1 - r^2 - b_1^2 / a_1).$$

Проверка квадратичности связи между Y и X производится при помощи критерия квадратичности:

$$K_2 = K_1 - b_1^2 / a_1,$$

который вычисляется с ошибкой:

$$S(K_2) = \sqrt{K_2 / m}.$$

Если K_2 значимо отличается от нуля, то корреляционное уравнение можно представить в виде полинома второй степени.

6. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Основная задача регрессионного анализа — установление вида и параметров зависимости математического ожидания отклика $M(Y)$ от уровней одного или нескольких факторов X , когда результаты эксперимента представлены в виде независимой выборки пар $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_n, Y_n$.

Искомая функция называется моделью регрессионного анализа или регрессионной моделью Y на X , а ее параметры — коэффициентами регрессии.

Не существует стандартных, формализованных методов, позволяющих только на основании результатов эксперимента установить теоретическую регрессию — истинную функциональную зависимость, отражающую действительную связь между откликом и контролируемыми факторами, не искаженную влиянием погрешностей измерения и неконтролируемых факторов. Если нет теоретических соображений о виде регрессионной модели, то ее обычно представляют в виде:

$$Y = \sum_{j=0}^d \beta_j f_j(\bar{X}) + e,$$

где $\bar{X} = |X_1, X_2, \dots, X_n|$ — вектор значений факторов; β_j — неизвестные коэффициенты регрессии; $f_j(\bar{X})$ — базисные функции; e — аддитивная погрешность.

Система базисных функций $f_j(\bar{X})$ должна быть выбрана до проведения эксперимента. Наиболее часто в качестве базисных функций используются:

- полиномы;
- системы ортогональных полиномов того или иного класса;
- тригонометрические функции.

Если $\bar{X} = |X_1, X_2, X_3|$, то в виде полинома регрессионная модель имеет вид:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{13} X_1 X_3 + \beta_{23} X_2 X_3 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 + \beta_{33} X_3^2.$$

Однофакторную регрессионную модель $\bar{X} = |X_1|$ при помощи системы ортогональных полиномов Чебышева можно записать следующим образом (если число равноотстоящих уровней фактора равно 11):

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 (X^2 - 10) + \beta_3 (X^3 - 17,8X) + \beta_4 (X^4 - 25X^2 + 72).$$

Тригонометрические регрессионные однофакторные модели обычно имеют вид:

$$Y = \beta_0 + \sum_{j=1}^k [\alpha_j \cos(j\omega X) + \gamma_j \sin(j\omega X)]$$

По известным измеренным значениям X всегда можно рассчитать и значения любой базисной функции $f_j(X)$.

Аппарат классического регрессионного анализа можно применять, если выполняются следующие условия:

- ошибка измерения фактора X , который может быть как неслучайной величиной, принимающей заданные значения, так и случайной контролируемой величиной, пренебрежимо мала;
- погрешность e подчиняется нормальному распределению с математическим ожиданием, равным нулю, и с постоянной дисперсией, не зависящей от уровней фактора;
- значения погрешности e в различных наблюдениях не коррелированы, т.е. $r(e_i, e_j) = 0, i \neq j$.

Неизвестные коэффициенты регрессии определяются методом наименьших квадратов — путем минимизации суммы квадратов отклонений измеренных значений отклика от получаемых с помощью регрессионной модели, т. е. путем минимизации функции:

$$S = \sum_{g=1}^n \left[Y_g - \sum_{j=0}^d b_j f_j(\overline{X}_g) \right] f_j(\overline{X}_g) = 0,$$

где b_j — оценка коэффициента регрессии β_j ; n — число наблюдений (опытов). Рассматривая b_j как переменные величины, приравнявая нулю частные производные:

$$\frac{dS}{db_j} = -2 \sum_{a=1}^n \mathbf{e}_{\frac{1}{2} + \frac{a}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{a}{2}} - \sum_{i=0}^d b_j f_i(\overline{X_g}) \frac{\partial f_j}{\partial b_i}(\overline{X_g}) = 0$$

После преобразования получается система линейных уравнений относительно искомых оценок b_i :

[illegible]

где суммирование производится по всем n опытам; $f_i = f_i(X_g)$; $Y = Y_g$.

Решение системы, обычно называемой системой нормальных уравнений, можно проводить любым известным способом.

Полученные методом наименьших квадратов оценки коэффициентов регрессии b_j являются несмещенными и эффективными. Для оценки доверительного интервала и значимости этих оценок необходимо определить дисперсию воспроизводимости и дисперсию оценок b_j .

Дисперсию воспроизводимости определяют обычно постановкой дублирующих опытов. Ее оценка вычисляется по формулам:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}; \quad S_{Bi}^2 = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{j=1}^{m_i} (Y_{ij} - \bar{y}_i)^2.$$

$$S_B^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{Bi}^2.$$

Дисперсия оценок j -го коэффициента регрессии:

$$S^2(b_j) = S_B^2 C_{jj},$$

где S_B^2 — оценка дисперсии воспроизводимости; C_{ij} — элемент матрицы Φ^{-1} , обратной информационной.

Информационная матрица Φ составляется из коэффициентов системы нормальных уравнений:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sum f_0^2 & \sum f_0 f_1 & \dots & \sum f_0 f_d \\ \sum f_0 f_1 & \sum f_1^2 & \dots & \sum f_1 f_d \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum f_0 f_d & \sum f_1 f_d & \dots & \sum f_d^2 \end{pmatrix}.$$

Коэффициент корреляции между коэффициентами регрессии b_j и b_h определяется по формуле:

$$r(b_j, b_h) = \frac{S_B}{S(b_j) \cdot S(b_h)} C_{jh}$$

Проверка значимости полученных коэффициентов регрессии сводится к последовательной проверке гипотез:

$$H_0 - \beta_j = 0, H_1 - \beta_j \neq 0, j = 0, 1, 2, \dots, d.$$

Для этого вычисляются наблюдаемые значения критерия Стьюдента:

$$t_{Hj} = |b_j| / S(b_j).$$

Эти значения критерия Стьюдента сравниваются с табличным t_k в соответствии с числом степеней свободы $f=m-1$, если опыты по определению остаточной дисперсии дублировались в одной из точек факторного пространства m раз, или $f=n(m-1)$, если в каждой из n точек факторного пространства дублирование проводилось одинаковое число раз.

Если при выбранной доверительной вероятности P $t_{Hj} > t_k$, то нулевая гипотеза отвергается, и коэффициент b_j считается статистически значимым.

Так как коэффициенты регрессии бывают связаны между собой, то после отбрасывания незначимого коэффициента b_q необходимо провести коррекцию оценок остальных коэффициентов и их дисперсий в соответствии с формулами:

$$b_j^* = b_j - \frac{C_{jq}}{C_{qq}} b_q; C_{jk}^* = C_{jk} - \frac{C_{jq} C_{qk}}{C_{qq}}; S^2(b_j^*) = S_B^2 C_{jj}^*.$$

Поскольку информационная матрица для ортогональных базисных функций:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sum f_0^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum f_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sum f_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sum f_d^2 \end{pmatrix}$$

будет ортогональной, то коэффициент корреляции $r(b_j, b_h)=0$ и оценки коэффициентов регрессии являются статистически независимыми.

Если в качестве базисных функций выбрать нормализованные полиномиальные переменные, то они будут ортогональны на множестве точек двух-уровневого факторного плана.

В данном случае x_j может принимать значения либо -1, либо +1.

Полный факторный план для трех факторов приведен в таблице 5.1.

Таблица 6.1

Полный факторный план 2^3

Номер опыта μ	x_1	x_2	x_3
1	+1	+1	+1
2	-1	+1	+1
3	+1	-1	+1
4	-1	-1	+1
5	+1	+1	-1
6	-1	+1	-1
7	+1	-1	-1
8	-1	-1	-1

Реализация этого плана позволяет оценить параметры регрессионной модели вида:

$$Y = b_0 + \sum_{j=1}^3 b_j x_j + \sum_{j=1}^3 b_{jh} x_j x_h, h \neq j.$$

В данном случае:

$$\sum_{j=1}^3 f_j^2 = N.$$

где N — общее число опытов, и

$$b_j = (\sum Y f_j) / \sum f_j^2.$$

Произведение $x_j \cdot x_h$ можно также рассматривать как фактор, и тогда b_{jh} определяется по формуле:

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N (Y f_j)_u,$$

где $f_j = x_j \cdot x_h$.

Если модель

$$Y = b_0 + \sum_{j=1}^3 b_j x_j + \sum_{j=1}^3 b_{jh} x_j x_h, \quad h \neq j$$

линейна, т. е. $b_{jh}=0$, то число опытов плана, указанного в таблице, на 4 больше, чем число определяемых параметров.

Свойство плана, задающееся разностью между числом точек спектра плана и числом оцениваемых параметров, называется **насыщенностью плана**.

План, в котором число точек спектра плана совпадает с числом оцениваемых параметров, называется **насыщенным планом**.

Если применять насыщенные планы, то для регрессионного анализа (оценка адекватности модели, дисперсии и доверительного интервала коэффициентов регрессии), необходимо проведение дублирующих опытов.

Пример.

Определить вид и коэффициенты регрессионной модели, отражающей зависимость радиальной силы $F_y(H)$ от поперечной подачи s (мм/дв. ход) при плоском электрохимическом алмазном шлифовании.

В результате реализации эксперимента получены следующие данные:

$s \cdot 10^2$	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5
F_y	50	60	67	75	85	86	93	95	100	98	104	103	106	107	108

При каждом значении s проводился один опыт.

Пять дублирующих опытов для оценки дисперсии воспроизводимости проводились при $s = 0,05$ мм/дв. ход.

Получено, что $S_b^2 = 0,032$.

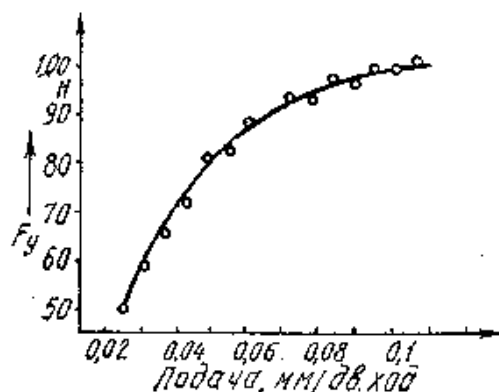
Решение.

По виду кривой, представленной на рисунке, предполагаем, что регрессионная модель имеет вид:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2,$$

где $Y = F_y \cdot 10^{-1}$; $X = s \cdot 10^2$.

Базисные функции в данном случае имеют вид: $f_0=1$; $f_1=X$; $f_2=X^2$.



Тогда система нормальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_0 n + b_1 \sum X_i + b_2 \sum X_i^2 &= \sum Y_i; \\ b_0 \sum X_i + b_1 \sum X_i^2 + b_2 \sum X_i^3 &= \sum (XY)_i; \\ b_0 \sum X_i^2 + b_1 \sum X_i^3 + b_2 \sum X_i^4 &= \sum (YX^2)_i. \end{aligned} \right\}$$

После вычисления сумм получим:

$$\left. \begin{aligned} 15b_0 + 90b_1 + 610b_2 &= 133,7; \\ 90b_0 + 610b_1 + 4500b_2 &= 856,35; \\ 610b_0 + 4500b_1 + 35144,5b_2 &= 6051,925. \end{aligned} \right\}$$

Решение системы дает: $b_0=0,0175$; $b_1=2,4029$; $b_2=-0,1358$. Информационная матрица в данном случае имеет вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 15 & 90 & 610 \\ 90 & 610 & 4500 \\ 610 & 4500 & 35144,5 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица определялась по формуле:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\det \Phi} \begin{pmatrix} D_{00} & D_{10} & D_{20} \\ D_{01} & D_{11} & D_{21} \\ D_{02} & D_{12} & D_{22} \end{pmatrix},$$

где D_{jk} — алгебраическое дополнение элемента матрицы в j -ой строке и k -ом столбце.

В результате вычислений получено:

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 4,389 & 1,544 & 0,122 \\ 1,544 & 0,573 & 0,047 \\ 0,122 & 0,047 & 0,0039 \end{pmatrix}.$$

Согласно формуле:

$$S^2(b_j) = S_B^2 C_{jj},$$

$$S^2(b_0) = 0,032 \cdot 4,389 = 0,14; S(b_0) = 0,375;$$

$$S^2(b_1) = 0,032 \cdot 0,573 = 0,018; S(b_1) = 0,135;$$

$$S^2(b_2) = 0,032 \cdot 0,0039 = 0,000125; S(b_2) = 0,0112;$$

Значения r_{jh} :

$$r_{02} = \frac{0,032 \cdot 0,122}{0,375 \cdot 0,0112} = 0,93;$$

$$r_{01} = \frac{0,032 \cdot 1,544}{0,375 \cdot 0,135} = 0,976;$$

$$r_{12} = \frac{0,032 \cdot 0,047}{0,375 \cdot 0,135} = 0,995;$$

вычисленные по формуле:

$$r(b_j, b_h) = \frac{S_B}{S(b_j) \cdot S(b_h)} C_{jh}$$

показывают, что коэффициенты регрессии тесно связаны.

Согласно: $t_{Hj} = |b_j| / S(b_j)$.

$$t_{H0} = 0,0175 / 0,375 = 0,047; t_{H1} = 2,4029 / 0,375 = 17,8;$$

$$t_{H2} = 0,1358 / 0,0112 = 12,13.$$

Для $P=0,95$ и $m = 5$ $t_K = 2,776$.

Поскольку $t_{H0} < t_K$, то коэффициент регрессии b_0 незначим, и можно считать, что $\beta_0 = 0$.

Остальные коэффициенты являются значимыми.

По формулам:

$$b_j^* = b_j - \frac{C_{jq}}{C_{qq}} b_q; C_{jk}^* = C_{jk} - \frac{C_{jq} C_{qk}}{C_{qq}}; S^2(b_j^*) = S_B^2 C_{jj}^*;$$

получаем скорректированные значения коэффициентов регрессии:

$$\beta_1^* = 2,4029 - \frac{1,544}{4,389} 0,0175 = 2,379; \beta_2^* = -0,1358 - \frac{0,122}{4,389} 0,0175 = -0,1363;$$

$$C_{11}^* = C_{11} - \frac{C_{10}^2}{C_{00}} = 0,573 - \frac{1,544^2}{4,389} = 0,0298; C_{22}^* = 0,0039 - \frac{0,122^2}{4,389} = 0,0005;$$

$$S^2(b_1^*) = 0,032 \cdot 0,0298 = 0,00095; S(b_1^*) = 0,031;$$

$$S^2(b_2^*) = 0,032 \cdot 0,0005 = 1,6 \cdot 10^{-5}; S(b_2^*) = 0,004.$$

Согласно

$$b_j^* - t_K S(b_j^*) < \beta_j < b_j^* + t_K S(b_j^*).$$

$$2,311 < \beta_1 < 2,483; -0,1474 < \beta_2 < -0,1252.$$

Остаточная дисперсия, определяемая по формуле:

$$S_0^2 = \frac{1}{n - (d + 1)} \sum_{g=1}^n (Y_g - \bar{Y}_g)^2,$$

составляет $S_0^2 = 0,043$.

Наблюдаемое значение критерия Фишера $F_n = 0,043/0,032 = 1,344$.

Табличное значение критерия определяется при $P=0,95$; $f_1=5-2=3$; $f_2=5-1=4$.

В данном случае $m_1 = 4$ и $m_2 = 5$.

Поскольку значения m_1 и m_2 в таблице являются промежуточными ($10 < m_1 < 15$; $4 < m_2 < 6$), то критическое значение $F_k = 6,67$ было определено интерполяцией.

Поскольку $F_n < F_k$, то полученная модель: $F = 2379s - 1363s^2$ адекватно описывает зависимость радиальной составляющей силы от поперечной подачи.

7. ПОНЯТИЯ О ПРЕДПЛАНИРОВАНИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Предпланирование эксперимента — это решение ряда вопросов, позволяющих перейти от замысла к плану эксперимента.

Главным вопросом является четкая постановка задачи эксперимента, которая должна быть формализована. Для этого переходят от реального объекта исследования к его схеме, которая называется моделью «черного ящика», когда на основе известного механизма функционирования объекта исследования можно теоретически получить функцию отклика, а экспериментальному определению подлежат только ее параметры.

На первом этапе формализации необходимо **выявить все факторы**, определяющие характер функционирования объекта и всех откликов.

На втором этапе формулируется **цель исследования**. Это может быть либо построение математической модели исследуемого объекта, либо его оптимизация.

Математическая модель — символическое выражение, с требуемой точностью отражающее те количественные связи, которые характеризуют исследуемый объект. При построении экспериментальной математической модели нужно избегать как чрезмерного упрощения реальных объектов, так и излишней их детализации. В зависимости от количества учитываемых факторов различают два класса моделей — однофакторные и многофакторные.

В зависимости от статистической природы факторов и отклика каждая из этих моделей может быть детерминированной, регрессионной или корреляционной.

Детерминированная модель может применяться для описания объекта, если факторы и отклик по своей природе являются неслучайными величинами, погрешностями измерения которых можно пренебречь. В данном случае каждому набору значений факторов соответствует одно или четко определенное множество значений отклика.

Для **регрессионной модели** данному набору уровней факторов однозначно соответствует определенный набор параметров закона распределения случайных значений отклика. Отклик является случайной по своей природе величиной, т. е. случайными погрешностями измерения нельзя пренебречь.

Факторы являются неслучайными величинами, уровни которых можно во время измерения отклика зафиксировать с достаточной точностью.

Корреляционная модель отражает связь между случайными по своей природе величинами.

Если вид оператора f модели и значения ее параметров p_j не изменяются во времени, то **модель называют статической**. Модели, не обладающие данным свойством, **называются динамическими**. Построить экспериментальную динамическую модель значительно труднее, чем статическую.

Оптимизация — это процесс поиска такого сочетания уровней факторов (точки ограниченного факторного пространства), при которых отклик, называемый в данном случае параметром оптимизации, принимает экстремальное (максимальное или минимальное в зависимости от смысла задачи) значение.

Чаще всего объект является **многооткликовым**. Например, откликами процесса обработки на токарном автомате являются: производительность, себестоимость продукции (экономические параметры), точность размеров и формы, шероховатость поверхностей обработанных деталей (параметры качества).

В некоторых случаях в качестве параметра оптимизации можно выбрать один из откликов, в то время как остальные служат ограничениями. Тогда оптимизация процесса обработки на токарном автомате будет заключаться, например, в поиске такого сочетания режимов обработки, конструктивных параметров режущих инструментов и параметров точности заготовок, при которых себестоимость обработки будет минимальной. Ограничениями при этом служат заданные значения параметров качества обработанных деталей и минимально допустимая производительность станка.

Во многих случаях задачей оптимизации структуры объекта исследования может быть одновременное улучшение нескольких критериев его качества, причем каждому из критериев может соответствовать своя оптимальная точка факторного пространства. В таких случаях делаются попытки уменьшить число параметров оптимизации путем установления между ними корреляционной связи или априорного ранжирования по значимости. Если эти попытки не дают успеха, то рекомендуется переформулировать задачу или свести ее к последовательности задач, в каждой из которых улучшается один из критериев качества.

На следующем этапе предпланирования эксперимента определяется **область экспериментирования**, т.е. область факторного пространства, где могут размещаться точки, отвечающие условиям проведения опытов. Каждый фактор имеет свою область определения, которая задается либо принципиальными ограничениями, либо по технико-экономическим соображениям, либо исходя из конкретных условий (отсутствие подходящей аппаратуры, установок, инструмента или невозможность значительных отклонений от принятой технологии).

После выбора области определения необходимо найти **локальную область для проведения эксперимента** — размах варьирования каждым факто-

ром. Эта задача плохо поддается формализации и решается в каждом конкретном случае исходя из смысла общей задачи исследования.

Основной принцип, положенный в основу теории планирования эксперимента — получение максимума информации при минимальных затратах времени и средств на эксперимент.

Для получения исчерпывающей информации о свойствах функции отклика необходимо проведение опытов во всех точках области экспериментирования. Эту разновидность эксперимента называют **экспериментом с полным перебором всех входных состояний**. Такой эксперимент в принципе нереализуем, так как число входных состояний бесконечно велико.

В теории планирования эксперимента отказываются от эксперимента, близкого к эксперименту с полным перебором входных состояний.

При отсутствии априорной информации о свойствах функции отклика нет смысла сразу строить сложную математическую модель объекта, так как это потребует значительных затрат времени и средств, в то время как может оказаться, что в сложной модели нет необходимости.

Поэтому теория планирования эксперимента рекомендует, как правило, **начинать с простейшей модели**, соответствующей имеющейся априорной информации, что требует проведения сравнительно небольшого числа опытов. Если проверка показывает, что полученная простейшая модель пригодна, то эксперимент заканчивается. Если же модель непригодна, реализуется следующий этап (цикл) эксперимента, позволяющий получить более сложную модель, которую также проверяют на адекватность. Если и в этом случае проверка указывает на неадекватность, то цикл эксперимента повторяют с целью получения еще более сложной модели.

Указанная логика экспериментирования составляет часть общей концепции последовательного эксперимента, согласно которой при проведении эксперимента **необходимо использовать последовательную, шаговую стратегию**. Согласно этой стратегии после каждого шага производится анализ результатов, на основании которого принимается решение о дальнейших опытах.

Проверка адекватности построенной модели и другие проверки производятся **с помощью статистических критериев**, за счет чего формализуется процедура принятия решений после каждого этапа исследования, облегчается работа экспериментатора и уменьшается риск принятия необоснованных «волевых» решений при подгонке результатов эксперимента под теоретическую концепцию исследователя.

При проверке адекватности проводится сопоставление систематической погрешности аппроксимизации с погрешностями, связанными с влиянием неконтролируемых факторов и случайными ошибками измерений.

При планировании эксперимента используется принцип рандомизации плана, позволяющей свести эффект некоторого неслучайного фактора, который не поддается учету и контролю, к случайной ошибке. Этот фактор можно рассматривать как случайную величину и учитывать или нейтрализовать его влияние статистически.

Рандомизация плана предполагает случайный порядок реализации опытов (строк матрицы плана), что позволяет устранить в математической модели смещения, вызванные действием неконтролируемых неслучайных факторов.

При других статистических исследованиях рандомизация предусматривает случайный выбор анализируемых элементов из общей совокупности, подлежащей изучению. Тем самым обеспечивается представительность полученной выборки, т. е. гарантируется возможность с помощью измерения свойств конечного набора элементов высказать обоснованное суждение о всей совокупности в целом.

Центральным в теории планирования эксперимента является **принцип оптимальности плана**. В соответствии с ним план эксперимента должен обладать некоторыми оптимальными свойствами с точки зрения определенного, заранее выбранного критерия или группы критериев.

Критерии оптимальности планов эксперимента, целью которого является построение математической модели объекта, можно разбить на три группы:

- первая группа - критерии, связанные с точностью оценок коэффициентов регрессии;
- вторая группа — критерии, связанные с ошибкой в оценке самой модели;
- третья группа — критерии, связанные с трудоемкостью обработки результатов эксперимента.

К первой группе относятся критерии А, D и E.

План называется А-оптимальным, если сумма дисперсий оценок коэффициентов регрессии будет минимальной.

План называется D-оптимальным, если определитель его информационной матрицы будет минимальным, т. е. при этом минимизируется обобщенная оценка коэффициентов регрессии.

План называется E-оптимальным, если он минимизирует максимальное значение дисперсии оценок коэффициентов регрессии.

Связь между данными критериями для двухмерной задачи иллюстрирует рисунок 7.1, на котором изображен эллипсоид рассеяния оценок коэффициентов регрессии.

Согласно критерию А, минимизируется сумма квадратов сторон описанного прямоугольника, т. е. диагональ прямоугольника, согласно критерию D — площадь эллипса рассеяния, а согласно критерию E, — его большая ось.

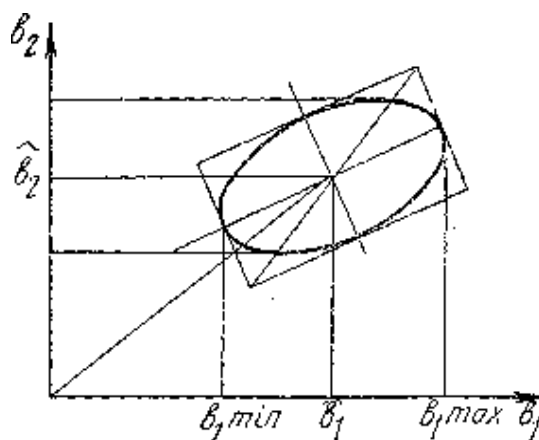


Рис. 7.1. Рассеяние оценок коэффициентов регрессии

Ко второй группе относятся критерии G и Q. План называется G-оптимальным, если он минимизирует максимальную дисперсию предсказанных моделью значений отклика. План называется Q-оптимальным, если он соответствует минимуму средней дисперсии значений отклика по отношению к предсказанным моделью.

К третьей группе относится критерий ортогональности плана, который требует такого выбора точек факторного пространства для измерений отклика, для которых процедура вычисления оценок параметров модели данного вида была самой простой. В таком случае значения каждого параметра модели вычисляются независимо от значений других параметров.

К планам могут предъявляться и другие требования:

- композиционности;
- равномерности;
- ротатабельности.

Композиционность — это свойство плана, позволяющее разделить эксперимент на несколько этапов и постепенно переходить от простых моделей к более сложным, используя результаты предыдущих наблюдений. Например, сначала составляется и реализуется план для оценки коэффициентов регрессии полинома первого порядка. В случае необходимости на втором этапе к имеющемуся плану добавляется несколько измерений в определенных точках факторного пространства, так что все вместе они дают возможность оценить коэффициенты регрессии модели второго порядка и т. д.

Униформность — критерий, требующий, чтобы дисперсия предсказания отклика в некоторой области вокруг центра эксперимента была практически постоянной.

План называется **ротатабельным**, если дисперсия предсказания отклика может быть представлена как функция расстояния до центра плана. Выполнение этого условия делает любое направление от центра плана равнозначным в смысле точности оценки отклика.

8. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ОЦЕНКЕ ОТКЛИКА

Целью планирования в данном случае является **определение минимально необходимого числа параллельных опытов** m для оценки отклика с заданной точностью.

Если отклик является случайной величиной, а его оценка — среднее арифметическое значение $\bar{y}$, то:

$$|Y - \bar{y}| \leq t(P, m) \frac{S}{\sqrt{m}}.$$

Задавшись доверительным интервалом или допустимой ошибкой оценки Δ_0 , количество опытов должно быть:

$$m \leq t^2(P, m) \frac{S^2}{\Delta_0^2}.$$

Если априори известна оценка погрешности измерения отклика S^2 , то m следует выбирать из табл. 8.1 в зависимости от доверительной вероятности P и отношения Δ_0/S или, пользуясь таблицей критических значений критерия Стьюдента, подбирать такое значение m , чтобы для данной P соблюдалось неравенство $m(\Delta_0/S)^2 > t(P, m)$.

Таблица 8.1

Количество параллельных опытов, необходимых при оценке Y

Δ_0/S	Число опытов при доверительной вероятности			
	0,9	0,95	0,98	0,99
1	5	7	9	11
0,75	7	10	12	16
0,5	13	18	25	31
0,4	19	27	37	46

Если значение S заранее неизвестно, то проводится последовательный эксперимент. Сначала производится серия параллельных опытов, позволяющих в первом приближении оценить S^2 . Затем вычисляется m_2 . При этом критерий Стьюдента определяется в предположении, что $m = m_1$. При $m_2 > m_1$ после проведения $(m_2 - m_1)$ опытов уточняется значение S и вычисляется m_3 . Если $m_3 < m_2$ или m_3 незначительно больше m_2 , то испытание заканчивается.

Таблица 8.2

Количество параллельных опытов, необходимых при оценке $\sigma(Y)$

$\Delta(\sigma)/\sigma$	Число опытов при доверительной вероятности			
	0,9	0,95	0,98	0,99
1,5	4	5	6	7
1,25	5	6	8	9
1	6	8	10	12
0,75	10	14	18	22
0,5	28	40	50	60

Когда отклик является случайной величиной, процедура планирования эксперимента для оценки его математического ожидания является такой же, как в случае неслучайного отклика.

Предположим, что задана также требуемая точность оценки стандартного отклонения $\sigma(Y)$. Параметр точности $\Delta(\sigma)$ в данном случае равен половине доверительного интервала для $\sigma(Y)$. Тогда требуемое количество параллельных опытов можно определить по таблице 8.2 в зависимости от доверительной вероятности P и отношения $\Delta(\sigma)/\sigma$.

Можно также, выполняя процедуру последовательного планирования, пользоваться формулой:

$$m \leq t^2(P, m) \frac{S^2}{2\Delta^2(\sigma)}.$$

Если необходимо определить коэффициент корреляции с заданной точностью $\Delta(r)$, то минимально необходимый объем выборки определяется по формуле:

$$m \leq \left[\frac{U(P_1)}{\Delta(r)} \right]^2 + 3,$$

где P_1 — доверительная вероятность: $P_1 = 1 - (1 - P)/2$;

P — заданная доверительная вероятность; $U(P_1)$ — квантиль нормированного нормального распределения.

Когда отклик является случайной функцией, целью планирования будет определение необходимой длины t реализации, по которой находятся $M[Y(t)]$ и $K(\tau)$. Любую реализацию можно представить в виде ряда Фурье:

$$Y(t) = Y_0 + \sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i).$$

Если задана допустимая относительная погрешность оценки $M[Y(t)]$ — $d_{\max} = D_{\max} / a_{\max}$ ($D_{\max}$ — допустимая абсолютная погрешность оценки, $a_{\max}$ — максимальный размах гармоники), то:

$$t(M) \geq \frac{2}{\delta_{\max} (\omega_{\min} + \omega_{\max})},$$

где $\omega_{\min}$ и $\omega_{\max}$ — минимальная и максимальная частоты разложения, определяемые на основании анализа задачи или по нижней и верхней границам частот, пропускаемых измерительным устройством.

Если задана допустимая относительная погрешность оценки корреляционной функции

$$\delta(K) = \Delta(K) / a_{\max},$$

($\Delta(K)$ — допустимая абсолютная погрешность оценки), то:

$$t(K) \geq \frac{4}{\delta(K) (\omega_{\min} + \omega_{\max})},$$

где $t(K)$ — необходимая длина реализации для оценки $K(\tau)$ с заданной точностью.

При анализе характеристик случайных процессов с применением ЭВМ непрерывную реализацию преобразовывают в дискретную с определенным шагом по времени и по амплитуде, т. е. квантуют. Если задана относительная допустимая погрешность аппроксимации $\delta_{\max}$, то шаг квантования по времени:

$$t_H \leq \delta_{\max} / \omega_{\max}.$$

Пример.

Определить количество параллельных опытов, необходимых для оценки с точностью до 5 мкм среднего квадратического отклонения размера шлифованных валиков, если после первой серии опытов получены следующие результаты; 19,95; 19,97; 19,94; 19,95; 19,96 мм.

Решение.

Размах в данной выборке $R = 30$ мкм. Тогда первая оценка σ :

$$S = R / d_m = 30 / 2,326 = 12,9 \text{ мкм.}$$

Подставляя это значение S в формулу:

$$m \geq t^2(P, m) \frac{S^2}{2D^2(s)}$$

при $P = 0,95$ и $m = 5$, получим $m > 2,776^2 \cdot 12,9^2 / (2 \cdot 5^2) = 25,6$.

Выбирая новое значение t при $m = 25$ и повторяя вычисления, получим: $m > 2,064^2 \cdot 12,9^2 / (2 \cdot 5^2) = 14$.

При $m=14$ получим $m > 2,16^2 \cdot 12,9^2 / (2 \cdot 5^2) = 15,5$.

Окончательно: $m=16$.

После реализации 11 дополнительных опытов получена новая оценка σ : $S=10,4$ мкм. При $P = 0,95$ $7,7 < \sigma < 16,1$, т. е. доверительный интервал равен 8,4 мкм, а его половина $\Delta(\sigma) = 4,2 < 5$.

Библиографический список

1. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. Справочное руководство. – М.: Наука, 1971. – 192 с.
2. Рыжов Э.В., Горленко О.А. Математические методы в технологических исследованиях. – Киев: Наук. думка, 1990. – 184 с.
3. Раннев, Г.Г. Методы и средства измерений : учебник для вузов / Г.Г. Раннев, А.П. Тарасенко. – 3-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 336 с.
4. ГОСТ 16504–81. Испытания и контроль качества продукции. Основные термины и определения.
5. Клюев, В.В. Неразрушающий контроль и диагностика : справоч-ник / под ред. В.В. Клюева. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Машино-строение, 2005. – 656 с.
6. Контрольно-измерительные приборы и инструменты: учебное пособие / С.А. Зайцев, Д.Д. Грибанов, А.Н. Толстов, Р.В. Меркулов. – М. : Издательский центр «Академия», 2006. – 464 с.

Содержание

1.	МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА	3
2.	ЧИСЛОВАЯ ОЦЕНКА ОТКЛИКА.....	7
3.	СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ.....	16
3.1.	Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению	16
3.2.	Проверка гипотезы о равенстве средних значений	17
3.3.	Проверка гипотезы о равенстве дисперсий.....	18
3.4.	Проверка случайности и независимости результатов измерений в выборке.....	20
4.	ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ	21
4.1.	Однофакторный дисперсионный анализ	21
4.2.	Двухфакторный дисперсионный анализ	25
5.	КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ	28
5.1.	Парная корреляция	28
5.2.	Многомерный корреляционный анализ	32
5.3.	Корреляционные уравнения.....	35
6.	РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ.....	38
7.	ПОНЯТИЯ О ПРЕДПЛАНИРОВАНИИ ЭКСПЕРИМЕНТА.....	46
8.	ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ОЦЕНКЕ ОТКЛИКА	50

Подписано в печать 23.06.2014.	Усл. печ. л. 3,4	Тираж	экз.
Печать офсетная.	Бумага писчая.	Заказ № ____.	
Отпечатано: РИО ВоГУ, г. Вологда, ул. Ленина, 15			