

Министерство образования и науки Российской Федерации
Вологодский государственный технический университет

Кафедра информационных систем и технологий

Методы оптимизации: примеры и задания

Методическое пособие

Факультет электроэнергетический

Направления 230100.68, 230100.62 – информатика и вычислительная техника,
230200.62 – информационные системы

Вологда
2011

УДК 519.8

ББК 22.1

Методы оптимизации: примеры и задания: методическое пособие. – Вологда: ВоГТУ, 2011. - 59 с.

Рассматриваются основные понятия, методы и алгоритмы решения задач по восьми разделам дисциплины методов оптимизации. По каждому разделу приведены примеры и варианты заданий для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 230100.62, 230100.68 - информатика и вычислительная техника и 230200.62 - информационные системы.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГТУ

Составитель Наимов А.Н., д-р физ.-мат. наук, профессор

Рецензент Назимов А.Б., канд. физ.-мат. наук, доцент

§1. Методы решения задач линейного программирования

Задачей линейного программирования называют задачу нахождения наибольшего или наименьшего значения линейной функции, зависящей от нескольких переменных, при ограничениях, заданных в виде линейных равенств и неравенств. Задача линейного программирования может быть задана в трех формах: общей, стандартной, канонической.

Задача линейного программирования в общей форме имеет следующий вид:

$$f(x) = c^T x \rightarrow \max (\min),$$
$$A_1 x \leq b^{(1)}, \quad A_2 x = b^{(2)}, \quad x_1 \geq 0, \dots, x_p \geq 0,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ - неизвестный вектор-столбец, $c^T = (c_1, \dots, c_n)$ - вектор-строка коэффициентов линейной функции $f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$, A_1 и A_2 - матрицы размерностей $m_1 \times n$ и $m_2 \times n$ соответственно, $b^{(1)}, b^{(2)}$ - векторы-столбцы, p - фиксированное натуральное число, не превосходящее n . Функцию $f(x)$ называют целевой функцией, ограничения $A_1 x \leq b^{(1)}$, $A_2 x = b^{(2)}$ называют прямыми ограничениями, $x_1 \geq 0, \dots, x_p \geq 0$ - непрямыми ограничениями.

В случае, когда матрица A_2 и вектор $b^{(2)}$ нулевые, $A_1 = A$ - матрица размерности $m \times n$, $b^{(1)} = b$ - m -мерный вектор и $p = n$, получаем задачу линейного программирования в стандартной форме:

$$f(x) = c^T x \rightarrow \max (\min),$$
$$Ax \leq b, \quad x \geq \theta,$$

где θ - нулевой вектор.

Если $A_1, b^{(1)}$ равны нулю, $A_2 = A, b^{(2)} = b$ и $p = n$, то получаем задачу линейного программирования в канонической форме:

$$f(x) = c^T x \rightarrow \max (\min),$$
$$Ax = b, \quad x \geq \theta.$$

Задачу линейного программирования из общей формы можно привести к стандартной, заменяя равенство $A_2 x = b^{(2)}$ двумя неравенствами $A_2 x \leq b^{(2)}$, $-A_2 x \leq -b^{(2)}$, а неизвестные $x_1, \dots, x_n$ заменяя новыми неизвестными

$$x_1 = \tilde{x}_1, \dots, x_p = \tilde{x}_p, x_{p+1} = \tilde{x}_{p+1} - \tilde{x}_{p+2}, \dots, x_n = \tilde{x}_{\tilde{n}-1} - \tilde{x}_{\tilde{n}},$$

где $\tilde{n} = p + 2(n - p)$, и добавляя не прямые ограничения $\tilde{x}_1 \geq 0, \dots, \tilde{x}_{\tilde{n}} \geq 0$.

Тогда относительно неизвестного вектора $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{\tilde{n}})^T$ получим задачу линейного программирования в стандартной форме.

Задачу линейного программирования из стандартной формы можно привести к канонической, заменяя неравенство $Ax \leq b$ равенством $Ax + y = b$, где y - дополнительный неизвестный, m -мерный вектор с неотрицательными координатами. Тогда относительно неизвестного вектора $z = (x, y)^T$ получим задачу линейного программирования в канонической форме. Таким образом, все три формы равносильны.

Вектор x , удовлетворяющий прямым и непрямым ограничениям, называют допустимым планом. А допустимый план x^* , на котором достигается максимум или минимум целевой функции, называют оптимальным планом. Решить задачу линейного программирования, значит найти оптимальный план.

Рассмотрим два метода решения задач линейного программирования:

- 1) графический метод решения двумерной задачи линейного программирования в стандартной форме;
- 2) симплекс-метод решения задачи линейного программирования любой размерности в канонической форме.

Графический метод. Пусть задана двумерная задача линейного программирования в стандартной форме:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max, \min,$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \leq b_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

где $x = (x_1, x_2)^T$ - неизвестный вектор, коэффициенты $c_1, c_2, a_{k1}, a_{k2}, k = \overline{1, m}$ и числа $b_1, \dots, b_m$ известны. В этом случае множество допустимых планов D представляет собой многоугольник (ограниченный или неограниченный) на первой четверти координатной плоскости OX_1X_2 . Многоугольник D ограничен координатными осями и прямыми линиями

$$l_k : a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 = b_k, \quad k = \overline{1, m}.$$

Графический метод состоит из следующих шагов:

1. Построим многоугольник D - область допустимых планов, проведя прямые линии $l_k : a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 = b_k, \quad k = \overline{1, m}$.

2. Находим градиент целевой функции $\nabla f = (c_1, c_2)^T$.

3. Построим семейство параллельных прямых линий, перпендикулярных вектору-градиенту $\nabla f = (c_1, c_2)^T$.

4. Из семейства параллельных прямых линий выделим линию, которая по направлению вектора $\nabla f = (c_1, c_2)^T$ первой касается многоугольника D . Точка касания есть точка минимума. А если нет такой линии, то точка минимума не существует.

5. Аналогично выделяется прямая линия, последней касающейся D , и определяется точка максимума. Если такой линии нет, то точка максимума не существует.

6. По точкам минимума и максимума, если они существуют, находим $f_{\min}, f_{\max}$ - минимум и максимум целевой функции.

Пример 1.1. Рассмотрим задачу

$$f = x_1 + 10x_2 \rightarrow \max, \min,$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2, \quad 3x_1 + 10x_2 \leq 30, \quad 0,5x_1 + 5x_2 \geq 2,5, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Решение. 1. На координатной плоскости OX_1X_2 проведем прямые линии $l_1: x_1 + 2x_2 = 2$, $l_2: 3x_1 + 10x_2 = 30$, $l_3: 0,5x_1 + 5x_2 = 2,5$ и по ним построим многоугольник D - область допустимых планов (рис. 1).

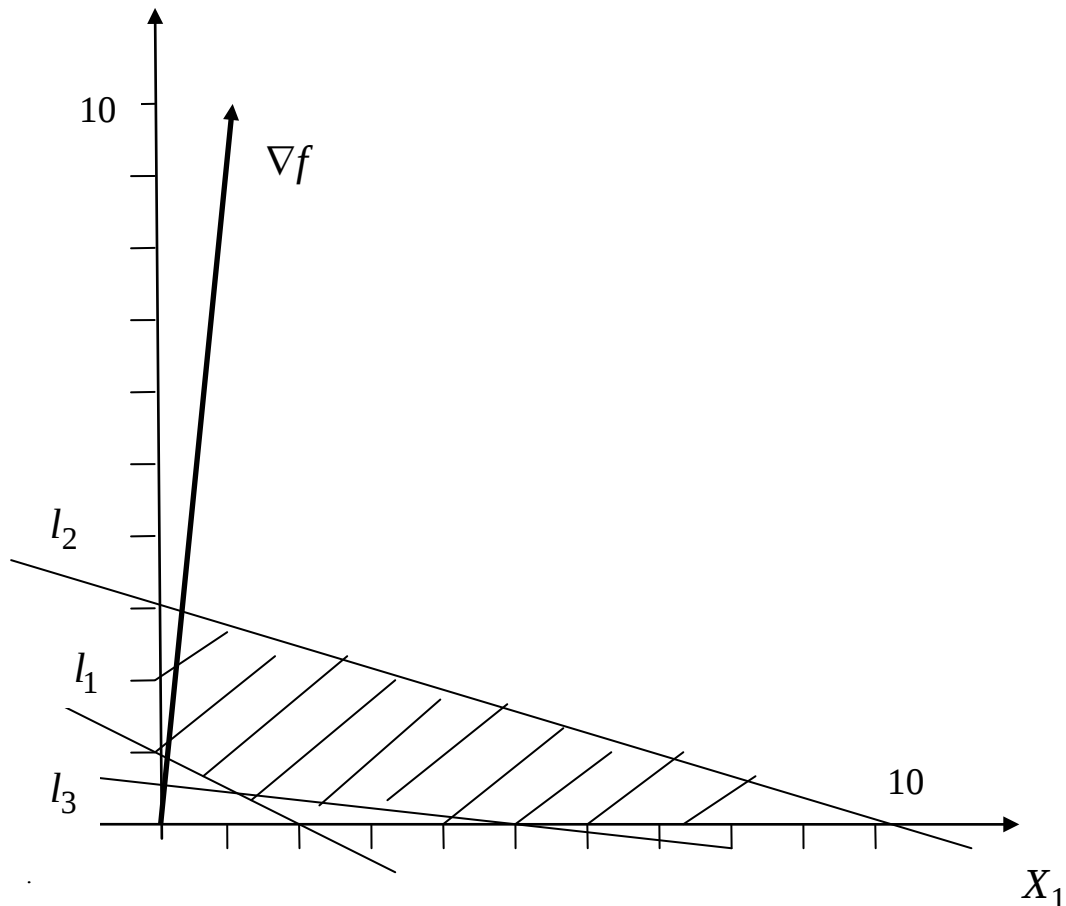


Рис. 1

D есть многоугольник $M_1M_2M_3M_4M_5$, где $M_1(0; 3)$, $M_2(10; 0)$, $M_3(5; 0)$, $M_4(1,25; 0,375)$, $M_5(0; 1)$.

2. Находим градиент целевой функции (рис. 1): $\nabla f = (1; 10)^T$.

3. Построим семейство параллельных прямых линий, перпендикулярных вектору $\nabla f = (1; 10)^T$.

4. По направлению $\nabla f = (1; 10)^T$ первое касание с многоугольником происходит в точке $M_4(1,25; 0,375)$ (рис. 1). Следовательно, $x_{\min} = (1,25; 0,375)^T$ - точка минимума.

5. Аналогично находим точку максимума: $x_{\max} = (0; 3)^T$.

6. Находим минимум и максимум целевой функции:

$$f_{\min} = f(1,25; 0,375) = 5, \quad f_{\max} = f(0; 3) = 30.$$

Симплекс-метод. Пусть задана задача линейного программирования в канонической форме

$$f = c^T x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad x \geq \theta,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ - неизвестный n -мерный вектор, A - матрица размерности $m \times n$. Не теряя общности, можно считать, что ранг матрицы A равен m и $m < n$.

Допустимый план $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ называют базисным, если его координаты можно разбить на две части: x_B - множество базисных координат и x_N - множество небазисных координат так, что небазисные координаты равны нулю, а столбцы матрицы A , соответствующие базисным координатам, линейно независимы. Базисный план называют невырожденным, если все базисные координаты положительны; иначе, называют вырожденным.

Согласно общей теории задач линейного программирования оптимальный план достаточно находить среди базисных планов. Для нахождения оптимального базисного плана, согласно симплекс-методу, поступают следующим образом:

1. Находят первый базисный план. Для этого систему $Ax = b$ решают методом Гаусса-Жордана, оставляя какие-то m неизвестных в одном из уравнений и исключая из остальных. Данный метод отличается от обычного метода Гаусса тем, что

а) необходимо, чтобы правые части уравнений системы оставались неотрицательными;

б) неизвестное x_k можно оставить в i -ом уравнении и исключить из j -го уравнения, если после этого правая часть j -го уравнения остается неотрицательной, т.е. выполняются условия $a_{ik} > 0$, $b_j - (a_{jk} / a_{ik})b_i \geq 0$.

Пусть для определенности $x^{(1)} = (b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0)^T$ - первый базисный план. Тогда система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + \dots + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases}$$

2. Проверим, возможно ли текущий базисный план заменить другим

$$x^{(2)} = (b_1^{(2)}, \dots, b_{i-1}^{(2)}, 0, b_{i+1}^{(2)}, \dots, b_m^{(2)}, 0, \dots, 0, b_k^{(2)}, 0, \dots, 0)^T$$

исключая какую-то координату x_i из базиса и включая какую-то координату

x_k в базис так, чтобы $f(x^{(1)}) > f(x^{(2)})$. Для этого номер k выбирают из

условия $\Delta_k = \min \{ \Delta_j : \Delta_j < 0, m+1 \leq j \leq n \}$,

где $\Delta_j = c_1 a_{1j} + \dots + c_m a_{mj}$, а номер i из условия

$$\frac{b_{ik}}{a_{ik}} = \min \left\{ \frac{b_{lk}}{a_{lk}} : a_{lk} > 0, 1 \leq l \leq m \right\}.$$

3. Если вышеуказанные номера k и i существуют, то методом Гаусса-Жордана в последней системе неизвестное x_k оставляем в i -ом уравнении и исключаем из остальных уравнений.

5. Шаги 3, 4 повторяем до тех пор, пока возможно. После конечного числа шагов получим оптимальный базисный план.

Пример 1.2. Задачу примера 1.1. приведем к стандартной форме и решим симплекс-методом:

$$f = x_1 + 10x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \quad 3x_1 + 10x_2 + x_4 = 30,$$

$$0,5x_1 + 5x_2 - x_5 = 2,5, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Решение. 1. Для того чтобы найти первый базисный план, x_1 исключим из второго и третьего уравнений, x_2 - из первого и второго:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = 2, \\ 4x_2 + 3x_3 + x_4 & = 24, \\ 4x_2 + 0,5x_3 - x_5 & = 1,5, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 - 1,25x_3 + 0,5x_5 & = 1,25, \\ 2,5x_3 + x_4 + x_5 & = 22,5, \\ x_2 + 0,125x_3 - 0,25x_5 & = 0,375. \end{cases}$$

Таким образом, $x^{(1)} = (1,25; 0,375; 0; 22,5; 0)^T$ - первый базисный план,

$$f(x^{(1)}) = 1 \cdot 1,25 + 10 \cdot 0,375 = 5.$$

2. Систему уравнений запишем в виде

$$\begin{cases} x_1 - 1,25x_3 + 0,5x_5 = 1,25, \\ x_2 + 0,125x_3 - 0,25x_5 = 0,375, \\ x_4 + 2,5x_3 + x_5 = 22,5. \end{cases}.$$

3. Определим номера k и i :

$$\Delta_3 = 1 \cdot (-1,25) + 10 \cdot 0,125 + 0 \cdot 2,5 = 0,$$

$$\Delta_5 = 1 \cdot 0,5 + 10 \cdot (-0,25) + 0 \cdot 1 = -2 < 0,$$

$$\min \left\{ \frac{1,25}{0,5}, \frac{22,5}{1} \right\} = \frac{1,25}{0,5}, \quad \text{следовательно, } k = 5 \text{ и } i = 1.$$

4. Неизвестное x_5 оставляем в первом уравнении и исключаем из других:

$$\begin{cases} x_5 & + 2x_1 - 2,5x_3 = 2,5, \\ & x_2 + 0,5x_1 - 0,5x_3 = 1, \\ & x_4 - 2x_1 + 5x_3 = 20, \end{cases}.$$

$x^{(2)} = (0; 1; 0; 20; 2,5)^T$ - второй базисный план,

$$f(x^{(2)}) = 1 \cdot 0 + 10 \cdot 1 = 10 > f(x^{(1)}) = 5.$$

5. Повторяем предыдущие шаги до тех пор, пока возможно:

$$\Delta_1 = 0 \cdot 2 + 10 \cdot 0,5 + 0 \cdot (-2) = 5,$$

$$\Delta_3 = 0 \cdot (-2,5) + 10 \cdot (-0,5) + 0 \cdot 5 = -5 < 0, \quad k = 3, \quad i = 4.$$

$$\begin{cases} x_5 & + x_1 + 0,5x_4 = 12,5, \\ & x_2 + 0,3x_1 + 0,1x_4 = 3, \\ & x_3 - 0,4x_1 + 0,2x_4 = 4, \end{cases}.$$

$x^{(3)} = (0; 3; 4; 0; 12,5)^T$ - третий базисный план,

$$f(x^{(3)}) = 1 \cdot 0 + 10 \cdot 3 = 30 > f(x^{(2)}) = 10,$$

$$\Delta_1 = 0 \cdot 1 + 10 \cdot 0,3 + 0 \cdot (-0,4) = 3,$$

$$\Delta_4 = 0 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 = 1.$$

Таким образом, оптимальным базисным планом является

$$x_{\max} = (0; 3; 4; 0; 12,5)^T, \quad f(x_{\max}) = 30.$$

Двойственная задача. Для задачи линейного программирования в стандартной форме

$$f = c^T x \rightarrow \max, \quad Ax \leq b, \quad x \geq \theta,$$

следующую задачу называют двойственной

$$g = b^T y \rightarrow \min, \quad A^T y \geq c, \quad y \geq \theta.$$

Если множества допустимых планов пары двойственных задач непустые, то существуют оптимальные базисные планы этих задач. При этом одну из задач можно решить графическим методом или симплекс-методом, а решение второй задачи можно находить из так называемых условий дополняющей нежесткости:

$$(Ax - b)y^T = \theta, \quad (A^T y - c)x^T = \theta.$$

Пример 1.3. Для задачи примера 1.1 составим двойственную задачу и найдем ее решение:

$$\begin{array}{ll} f = x_1 + 10x_2 \rightarrow \max & g = -2y_1 + 30y_2 - 2,5y_3 \rightarrow \min \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, & -y_1 + 3y_2 - 0,5y_3 \geq 1, \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 30, & -2y_1 + 10y_2 - 5y_3 \geq 10, \\ 0,5x_1 + 5x_2 \geq 2,5, & y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0. \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. & \end{array}$$

Решением первой задачи является вектор $x_{\max} = (0; 3)^T$. По нему найдем решение второй задачи, воспользовавшись условиями дополняющей нежесткости:

$$\begin{array}{ll} (1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 2)y_1 = 0, & (-y_1 + 3y_2 - 0,5y_3 - 1) \cdot 0 = 0, \\ (3 \cdot 0 + 10 \cdot 3 - 30)y_2 = 0, & (-2y_1 + 10y_2 - 5y_3 - 10) \cdot 3 = 0. \\ (0,5 \cdot 0 + 5 \cdot 3 - 2,5)y_3 = 0, & \end{array}$$

Отсюда $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0, y_{\min} = (0; 1; 0)^T$ - решение второй задачи и

$$g(y_{\min}) = f(x_{\max}) = 30.$$

Задание № 1

Задачу линейного программирования решить графическим методом и симплекс-методом (на максимум). Для задачи на максимум составить двойственную задачу и найти ее решение.

Варианты

- 1) $f = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \min,$
 $4x_1 + x_2 \geq 4, \quad 12x_1 + 6x_2 \leq 72, \quad 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
- 2) $f = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max, \min,$
 $3x_1 + 2x_2 \geq 6, \quad 9x_1 + 8x_2 \leq 72, \quad x_1 + 4x_2 \geq 4, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
- 3) $f = 4x_1 - 5x_2 \rightarrow \max, \min,$
 $6x_1 + 2x_2 \geq 12, \quad 18x_1 + 10x_2 \leq 180, \quad 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
- 4) $f = 5x_1 - 4x_2 \rightarrow \max, \min,$
 $5x_1 + x_2 \geq 5, \quad 15x_1 + 4x_2 \leq 60, \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
- 5) $f = 2x_1 + 7x_2 \rightarrow \max, \min,$
 $4x_1 + x_2 \geq 4, \quad 12x_1 + 10x_2 \leq 120, \quad x_1 + 5x_2 \geq 5, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
- 6) $f = -7x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \min,$
 $6x_1 + 3x_2 \geq 18, \quad 18x_1 + 10x_2 \leq 180, \quad 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
- 7) $f = -4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, \min,$
 $3x_1 + 2x_2 \geq 6, \quad 9x_1 + 10x_2 \leq 90, \quad x_1 + 5x_2 \geq 5, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
- 8) $f = -5x_1 - 7x_2 \rightarrow \max, \min,$
 $5x_1 + x_2 \geq 5, \quad 15x_1 + 6x_2 \leq 90, \quad 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
- 9) $f = -2x_1 + 7x_2 \rightarrow \max, \min,$
 $5x_1 + 3x_2 \geq 15, \quad 15x_1 + 12x_2 \leq 180, \quad 2x_1 + 6x_2 \geq 12, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
- 10) $f = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6, \quad 6x_1 + 10x_2 \leq 60, \quad x_1 + 5x_2 \geq 5, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

11) $f = -4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$5x_1 + x_2 \geq 5, \quad 15x_1 + 8x_2 \leq 120, \quad x_1 + 4x_2 \geq 4, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

12) $f = -2x_1 - 5x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 10, \quad 15x_1 + 12x_2 \leq 180, \quad 3x_1 + 6x_2 \geq 18, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

13) $f = -3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$4x_1 + x_2 \geq 4, \quad 3x_1 + x_2 \leq 12, \quad 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

14) $f = x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$2x_1 + x_2 \geq 6, \quad 18x_1 + 8x_2 \leq 144, \quad 5x_1 + 4x_2 \geq 20, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

15) $f = -x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 10, \quad 8x_1 + 15x_2 \leq 120, \quad x_1 + 4x_2 \geq 4, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

16) $f = 6x_1 - x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$4x_1 + x_2 \geq 4, \quad 6x_1 + 5x_2 \leq 60, \quad 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

17) $f = -3x_1 - 4x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$5x_1 + 3x_2 \geq 15, \quad 15x_1 + 14x_2 \leq 210, \quad 2x_1 + 7x_2 \geq 14, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

18) $f = -6x_1 + x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$7x_1 + 2x_2 \geq 14, \quad 21x_1 + 10x_2 \leq 210, \quad 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

19) $f = -x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12, \quad 4x_1 + 3x_2 \leq 36, \quad x_1 + 6x_2 \geq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

20) $f = 4x_1 - x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$4x_1 + 2x_2 \geq 8, \quad 6x_1 + 7x_2 \leq 84, \quad x_1 + 7x_2 \geq 7, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

21) $f = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$5x_1 + x_2 \geq 5, \quad 15x_1 + 12x_2 \leq 180, \quad x_1 + 3x_2 \geq 4, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

22) $f = -2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$2x_1 + x_2 \geq 6, \quad 9x_1 + 7x_2 \leq 126, \quad 4x_1 + 7x_2 \geq 28, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

23) $f = -2x_1 - x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$7x_1 + x_2 \geq 7, \quad 2x_1 + 7x_2 \leq 42, \quad 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

24) $f = x_1 - 4x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$6x_1 + x_2 \geq 6, \quad 9x_1 + 4x_2 \leq 72, \quad x_1 + 4x_2 \geq 4, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

25) $f = x_1 + 10x_2 \rightarrow \max, \min,$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2, \quad 10x_1 + 3x_2 \leq 30, \quad 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

§2. Матричные игры

Матричная игра задается платежной матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$.

Матрица A интерпретируется следующим образом. Имеются два игрока – два лица (две стороны), интересы которых прямо противоположны, первый игрок располагает m стратегиями – вариантами для достижения своей цели, состоящей в получении максимального выигрыша, а второй игрок располагает n стратегиями для достижения своей цели, состоящей в минимизации проигрыша. При этом если первый игрок применяет i -ю стратегию, а второй игрок j -ю стратегию, то первый игрок выигрывает сумму a_{ij} , а второй эту же сумму проигрывает.

В общем, применяя лишь одну стратегию (чистую стратегию), игроки не могут достигать своей цели. Поэтому вводится понятие смешанной стратегии для каждого игрока. Смешанной стратегией первого игрока называют любой вектор $p = (p_1, \dots, p_m)^T$, где $p_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $p_1 + \dots + p_m = 1$, а смешанной стратегией второго игрока называют любой вектор $q = (q_1, \dots, q_n)^T$, где $q_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, $q_1 + \dots + q_n = 1$. Смешанную стратегию, где одна из координат равна 1 и остальные нули, называют чистой.

Если первый игрок применяет смешанную стратегию p , а второй - q , то сумму

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j$$

называют ценой игры, т.е. эту сумму выигрывает первый игрок, а второй проигрывает.

В случае, когда первый игрок применяет стратегию p , ему гарантирован выигрыш $\min_q H(p, q)$, независимо от того, какую смешанную стратегию применяет второй игрок. Поэтому ему следует выбирать смешанную стратегию так, чтобы гарантированный выигрыш сделать наибольшим:

$$\max_p \min_q H(p, q) = \min_q H(p^*, q).$$

Такую смешанную стратегию p^* называют оптимальной смешанной стратегией первого игрока. Аналогичным образом определяется оптимальная смешанная стратегия q^* второго игрока:

$$\min_q \max_p H(p, q) = \max_p H(p, q^*),$$

т.е. при смешанной стратегии q^* наибольший проигрыш минимален.

Согласно теореме Неймана при оптимальных смешанных стратегиях игроков p^* и q^* выполняются равенства

$$\max_p \min_q H(p, q) = H(p^*, q^*) = \min_q \max_p H(p, q).$$

Решить матричную игру, значит найти p^* и q^* . В последующем, не теряя общности, можно считать, что все элементы матрицы A положительны.

Матричную игру можно решить, составляя и решая следующую пару двойственных задач линейного программирования:

$$\begin{aligned} f &= x_1 + \dots + x_n \rightarrow \max, & Ax &\leq e, & x &\geq \theta, \\ g &= y_1 + \dots + y_m \rightarrow \min, & A^T y &\geq e, & y &\geq \theta, \end{aligned}$$

где $e = (1, 1, \dots, 1)^T$. Если x^* и y^* решения этих задач, то оптимальные смешанные стратегии игроков определяются формулами

$$p^* = \frac{1}{g(y^*)} y^*, \quad q^* = \frac{1}{f(x^*)} x^*.$$

Пример 2.1. Рассмотрим матричную игру с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Составим пару двойственных задач:

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1,$$

$$6x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 1,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

$$g = y_1 + y_2 \rightarrow \min$$

$$3y_1 + 6y_2 \geq 1,$$

$$4y_1 + 7y_2 \geq 1,$$

$$5y_1 + 2y_2 \geq 1,$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0,$$

Вторую задачу можно решить графическим методом, затем решение первой задачи можно находить, воспользовавшись условиями дополняющей нежесткости:

$$x^* = (1/8; 0; 1/8)^T, \quad f(x^*) = 1/4, \quad y^* = (1/6; 1/12)^T, \quad g(y^*) = 1/4.$$

Находим оптимальные смешанные стратегии игроков:

$$p^* = (1/2; 0; 1/2)^T, \quad q^* = (2/3; 1/3)^T.$$

Задание № 2

Решить матричную игру с заданной платежной матрицей A .

Варианты

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

4)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

5)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

6)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

7)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

8)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

9)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

10)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

11)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

12)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

13)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

14)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

15)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

16)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

17)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

18)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

19)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

20)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

21)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

22)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

23)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

24)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

25)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

§3. Транспортная задача

Транспортная задача задается матрицей транспортных издержек $C = \{c_{ij}\}_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$, где c_{ij} - транспортные издержки по перевозке единицы продукции из пункта поставщика A_i в пункт потребителя B_j . Кроме того, должны быть заданы объем запасов продукции a_i , имеющийся у каждого поставщика A_i , и потребность b_j каждого потребителя B_j ; причем, общий объем запасов продукции $a_1 + \dots + a_m$ должно быть не меньше общего объема потребностей $b_1 + \dots + b_n$. Можно считать, что выполнено условие сбалансированности – общий объем запасов продукции $a_1 + \dots + a_m$ равен общему объему потребностей $b_1 + \dots + b_n$. Если не так, то можно ввести дополнительный фиктивный пункт потребителя B_{n+1} с объемом потребности b_{n+1} , равным разности величины дисбаланса $(a_1 + \dots + a_m) - (b_1 + \dots + b_n)$, и нулевыми транспортными издержками $c_{i,n+1} = 0, i = \overline{1,m}$.

Матрицу $X = \{x_{ij}\}_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ с неотрицательными элементами x_{ij} называют допустимым планом транспортной задачи, если выполнены следующие условия:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Первое условие – условие полного вывоза продукции, а второе – полное удовлетворение спроса. Для допустимого плана X сумма всех транспортных издержек равна

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

Допустимый план называют оптимальным, если на нем достигается наименьшее значение суммы транспортных издержек. Решить транспортную задачу, значит найти оптимальный допустимый план. Другими словами, необходимо составить такой план перевозок продукции, при котором суммарные транспортные издержки минимальны.

Транспортная задача является разновидностью задачи линейного программирования, где целевой функцией является функция суммарных транспортных издержек:

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

а ограничения имеют вид

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n},$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

В данном случае число неизвестных равно mn . Решение транспортной задачи симплекс-методом приводит к громоздким вычислениям из-за большого числа неизвестных, и при этом процесс решения задачи сложно интерпретировать с точки зрения составления и изменения плана перевозок продукции. Поэтому для транспортной задачи разработаны свои методы решения.

Рассмотрим один из общеизвестных методов решения транспортной задачи. Рассматриваемый метод основывается на том, что оптимальный план

транспортной задачи достаточно находить среди опорных планов. Опорным планом называют допустимый план X , у которого ненулевых элементов не более чем $m + n - 1$. В случае, когда ненулевых элементов меньше, чем $m + n - 1$, опорный план называют вырожденным.

Оптимальный опорный план находят в три шага. На первом шаге составляют первый опорный план методом северо-западного угла. На втором шаге проверяют оптимальность текущего опорного плана методом потенциалов. На третьем шаге, если текущий опорный план не оптимальный, переходят к следующему опорному плану методом составления цикла, затем повторяют второй шаг. Реализацию перечисленных шагов рассмотрим на следующем примере.

Пример 3.1. Решим транспортную задачу с матрицей транспортных издержек

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и объемами запасов и потребностей

$$a_1 = 11, a_2 = 11, a_3 = 8, \quad b_1 = 5, b_2 = 9, b_3 = 9, b_4 = 7.$$

Условие сбалансированности $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ соблюдено.

Составим первый опорный план методом северо-западного угла: сперва удовлетворим потребность пункта B_1 , затем пунктов B_2 , B_3 , B_4 , поочередно опустошая пункты поставщиков A_1 , A_2 , A_3 (табл. 1).

Таблица 1

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	5	6			11
A_2		3	8		11
A_3			1	7	8
Потребности	5	9	9	7	

Всего клеток - $mn = 3 \cdot 4 = 12$, из них заполненных - $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 7$.

Имеем первый опорный план:

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

На этом плане сумма транспортных издержек равна $F(X^{(1)}) = 150$. Выясним, является ли план $X^{(1)}$ оптимальным. Для этого находим потенциалы $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4$ из условия, что в каждой заполненной клетке (i, j) должно выполняться равенство $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая $u_1 = 0$ или $v_1 = 0$. Затем для каждой пустой клетки (i, j) находим оценку $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$. Если все оценки неотрицательны, то опорный план оптимальный. Иначе, переходим к другому опорному плану. Для плана $X^{(1)}$ имеем:

$$u_1 = 0, u_2 = -4, u_3 = -8, v_1 = 7, v_2 = 8, v_3 = 9, v_4 = 10,$$

$$\Delta_{13} = -4, \Delta_{14} = -7, \Delta_{21} = -1, \Delta_{24} = 3, \Delta_{31} = 7, \Delta_{32} = 3.$$

Среди оценок есть отрицательная, следовательно, план $X^{(1)}$ не оптимальный.

Для перехода к другому опорному плану выберем пустую клетку с наименьшей отрицательной оценкой, и построим цикл – замкнутый маршрут, одна из вершин которого есть выбранная клетка, остальные вершины – заполненные клетки, и дуги которого направлены вертикально или горизонтально (табл. 2).

Таблица 2

5	6 -		+
	3 +	8 -	
		1 +	7 -

Вершины, начиная с пустой клетки, поочередно метим знаками «+» и «-». Из чисел, расположенных в клетках с меткой «-», вычитаем наименьшее из них и это же число прибавим к числам, расположенным в клетках с меткой «+». В результате получаем второй опорный план (табл. 3).

Таблица 3

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	5			6	11
A_2		9	2		11
A_3			7	1	8
Потребности	5	9	9	7	

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(X^{(2)}) = 108.$$

Проверим оптимальность плана $X^{(2)}$:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = -1, \quad v_1 = 7, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = 2, \quad v_4 = 3,$$

$$\Delta_{12} = 7, \quad \Delta_{13} = 3, \quad \Delta_{21} = -8, \quad \Delta_{24} = 3, \quad \Delta_{31} = 0, \quad \Delta_{32} = 3.$$

Так как $\Delta_{21} = -8 < 0$, план $X^{(2)}$ не оптимальный.

Построим цикл и переходим к другому опорному плану:

Таблица 4

5			6
-			+
	9	2	
+		-	
		7	1
		+	-

Получаем третий опорный план:

Таблица 5

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	4			7	11

A_2	1	9	1		11
A_3			8		8
Потребности	5	9	9	7	

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(X^{(3)}) = 100.$$

Проверим оптимальность плана $X^{(3)}$:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -5, \quad u_3 = -9, \quad v_1 = 7, \quad v_2 = 9, \quad v_3 = 10, \quad v_4 = 3,$$

$$\Delta_{12} = -1, \quad \Delta_{13} = -5, \quad \Delta_{24} = 11, \quad \Delta_{31} = 8, \quad \Delta_{32} = 3, \quad \Delta_{34} = 8.$$

План $X^{(3)}$ не оптимальный. Переходим к четвертому опорному плану:

Таблица 6

4			7
-		+	
1	9	1	
+		-	
		8	

$$X^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(X^{(4)}) = 95.$$

План $X^{(4)}$ также не оптимальный, так как в этом случае имеем:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -5, \quad u_3 = -4, \quad v_1 = 7, \quad v_2 = 9, \quad v_3 = 5, \quad v_4 = 3,$$

$$\Delta_{12} = -1, \quad \Delta_{23} = 5, \quad \Delta_{24} = 11, \quad \Delta_{31} = 3, \quad \Delta_{32} = -2 < 0, \quad \Delta_{34} = 1.$$

Переходим к пятому опорному плану:

$$X^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(X^{(5)}) = 89,$$

$$u_1 = 0, \ u_2 = -3, \ u_3 = -4, \ v_1 = 5, \ v_2 = 7, \ v_3 = 5, \ v_4 = 3,$$

$$\Delta_{11} = 2, \ \Delta_{12} = 1, \ \Delta_{23} = 3, \ \Delta_{24} = 9, \ \Delta_{31} = 5, \ \Delta_{34} = 3.$$

Таким образом, оптимальным опорным планом является

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

На нем достигается минимум суммы транспортных издержек:

$$F_{\min} = F(X^*) = 89.$$

Задание № 3

Решить транспортную задачу с заданной матрицей транспортных издержек $C = \{c_{ij}\}_{i=\overline{1,3}, j=\overline{1,5}}$ и объемами запасов $a_i, i = \overline{1,3}$ и потребностей $b_j, j = \overline{1,5}$.

Варианты

1)

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 100, \\ a_2 &= 200, \\ a_3 &= 300, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} b_1 &= 100, & b_2 &= 50, & b_3 &= 100, \\ b_4 &= 200, & b_5 &= 150. \end{aligned}$$

2)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 100, \\ a_3 &= 200, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} b_1 &= 100, & b_2 &= 50, & b_3 &= 100, \\ b_4 &= 100, & b_5 &= 150. \end{aligned}$$

3)

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 100, \\ a_3 &= 300, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} b_1 &= 50, & b_2 &= 100, & b_3 &= 100, \\ b_4 &= 200, & b_5 &= 150. \end{aligned}$$

4)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 100, \\ a_2 &= 200, \\ a_3 &= 200, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} b_1 &= 70, & b_2 &= 80, & b_3 &= 100, \\ b_4 &= 150, & b_5 &= 100. \end{aligned}$$

5)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 150, \\ a_2 &= 50, \\ a_3 &= 300, \end{aligned}$$
$$b_1 = 90, \quad b_2 = 60, \quad b_3 = 150,$$
$$b_4 = 100, \quad b_5 = 100.$$

6)

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 200, \\ a_3 &= 100, \end{aligned}$$
$$b_1 = 40, \quad b_2 = 110, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 100, \quad b_5 = 150.$$

7)

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 100, \\ a_3 &= 300, \end{aligned}$$
$$b_1 = 50, \quad b_2 = 100, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 200, \quad b_5 = 150.$$

8)

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 100, \\ a_3 &= 200, \end{aligned}$$
$$b_1 = 70, \quad b_2 = 80, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 100, \quad b_5 = 150.$$

9)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 100, \\ a_2 &= 200, \\ a_3 &= 300, \end{aligned}$$
$$b_1 = 100, \quad b_2 = 50, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 200, \quad b_5 = 150.$$

10)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 100, \\ a_3 &= 200, \end{aligned}$$
$$b_1 = 100, \quad b_2 = 50, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 100, \quad b_5 = 150.$$

11)

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 100, \\ a_3 &= 300, \end{aligned}$$
$$b_1 = 50, \quad b_2 = 100, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 200, \quad b_5 = 150.$$

12)

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 100, \\ a_2 &= 200, \\ a_3 &= 200, \end{aligned}$$
$$b_1 = 70, \quad b_2 = 80, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 150, \quad b_5 = 100.$$

13)

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 150, \\ a_2 &= 150, \\ a_3 &= 300, \end{aligned}$$
$$b_1 = 90, \quad b_2 = 60, \quad b_3 = 150,$$
$$b_4 = 100, \quad b_5 = 200.$$

14)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 200, \\ a_3 &= 100, \end{aligned}$$
$$b_1 = 40, \quad b_2 = 110, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 100, \quad b_5 = 150.$$

15)

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 100, \\ a_3 &= 300, \end{aligned}$$
$$b_1 = 50, \quad b_2 = 100, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 200, \quad b_5 = 150.$$

16)

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 100, \\ a_3 &= 200, \end{aligned}$$
$$b_1 = 70, \quad b_2 = 80, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 100, \quad b_5 = 150.$$

17)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 100, \\ a_2 &= 200, \\ a_3 &= 300, \end{aligned}$$
$$b_1 = 100, \quad b_2 = 50, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 200, \quad b_5 = 150.$$

18)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 100, \\ a_3 &= 200, \end{aligned}$$
$$b_1 = 100, \quad b_2 = 50, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 100, \quad b_5 = 150.$$

19)

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 100, \\ a_3 &= 300, \end{aligned}$$
$$b_1 = 50, \quad b_2 = 100, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 200, \quad b_5 = 150.$$

20)

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 100, \\ a_2 &= 200, \\ a_3 &= 200, \end{aligned}$$
$$b_1 = 70, \quad b_2 = 80, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 150, \quad b_5 = 100.$$

21)

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 150, \\ a_2 &= 150, \\ a_3 &= 300, \end{aligned}$$
$$b_1 = 90, \quad b_2 = 60, \quad b_3 = 150,$$
$$b_4 = 100, \quad b_5 = 200.$$

22)

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 200, \\ a_3 &= 100, \end{aligned}$$
$$b_1 = 40, \quad b_2 = 110, \quad b_3 = 100,$$
$$b_4 = 100, \quad b_5 = 150.$$

23)

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 100, \\ a_3 &= 300, \end{aligned}$$
$$b_1 = 50, \quad b_2 = 100, \quad b_3 = 100, \\ b_4 = 200, \quad b_5 = 150.$$

24)

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 200, \\ a_2 &= 100, \\ a_3 &= 200, \end{aligned}$$
$$b_1 = 70, \quad b_2 = 80, \quad b_3 = 100, \\ b_4 = 100, \quad b_5 = 150.$$

25)

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 100, \\ a_2 &= 200, \\ a_3 &= 300, \end{aligned}$$
$$b_1 = 100, \quad b_2 = 50, \quad b_3 = 100, \\ b_4 = 200, \quad b_5 = 150.$$

§4. Метод выпуклого программирования

Метод выпуклого программирования применяется для нахождения минимума выпуклой функции при ограничениях, заданных системой неравенств:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g_k(x) \leq 0, \quad k = \overline{1, m},$$

где функции $f(x)$, $g_k(x)$, $k = \overline{1, m}$ определены на выпуклом множестве D , непрерывны и выпуклы. Данную задачу называют задачей выпуклого программирования.

Множество D называют выпуклым, если для любых $x, y \in D$, $\lambda \in [0, 1]$ имеет место $\lambda x + (1 - \lambda)y \in D$. Функцию f , определенную на выпуклом множестве D , называют выпуклой, если при любых $x, y \in D$, $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Для решения задачи выпуклого программирования составляют функцию Лагранжа

$$L(x, u) = f(x) + u_1 g_1(x) + \dots + u_m g_m(x),$$

где $u = (u_1, \dots, u_m)$ называют вектором множителей Лагранжа. Пару (x^*, u^*) называют седловой точкой функции Лагранжа, если для любого вектора $x \in D$ и любого неотрицательного вектора множителей Лагранжа u выполняются неравенства

$$L(x^*, u) \leq L(x^*, u^*) \leq L(x, u^*).$$

Следующее условие называют условием Слейтера: существует $x^{(0)} \in D$ такой, что $g_k(x^{(0)}) < 0$ при всех $k = \overline{1, m}$.

Основу метода выпуклого программирования составляет следующая теорема.

Теорема Куна-Таккера. Пусть выполнено условие Слейтера. Тогда вектор $x^* \in D$ будет решением задачи выпуклого программирования только в том случае, когда существует неотрицательный вектор u^* , образующий вместе с x^* седловую точку (x^*, u^*) функции Лагранжа.

Седловую точку (x^*, u^*) можно находить среди критических точек функции Лагранжа, если функция Лагранжа дифференцируема:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x, u) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \frac{\partial L}{\partial u_k}(x, u) = 0, \quad k = \overline{1, m}.$$

Пример 4.1. Найдём методом выпуклого программирования расстояние от точки $A(3; 3)$ до выпуклого шестиугольника с вершинами в точках

$$A_1(-3; 2), \quad A_2(1; 2), \quad A_3(4; -2), \quad A_4(2; -8), \quad A_5(-2; -7), \quad A_6(-6; -2).$$

Составим задачу выпуклого программирования. Целевой функцией является функция расстояния от точки $A(3; 3)$ до точек шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ есть множество, ограниченное прямыми линиями

$$\begin{aligned} x_2 &= 2, & 4x_1 + 3x_2 &= 10, & 3x_1 - x_2 &= 14, \\ -x_1 - 4x_2 &= 30, & -5x_1 - 4x_2 &= 38, & -4x_1 + 3x_2 &= 18. \end{aligned}$$

Расстояние от точки $A(3; 3)$ до любой точки $x = (x_1, x_2)$ определяется формулой $\sqrt{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2}$. Легко проверить, что множество точек шестиугольника (вместе с внутренностью) и функция $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$ выпуклые. Таким образом, получаем следующую задачу выпуклого программирования:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min, \\ x_2 - 2 &\leq 0, \quad 4x_1 + 3x_2 - 10 \leq 0, \quad 3x_1 - x_2 - 14 \leq 0, \\ -x_1 - 4x_2 - 30 &\leq 0, \quad -5x_1 - 4x_2 - 38 \leq 0, \quad -4x_1 + 3x_2 - 18 \leq 0. \end{aligned}$$

Условие Слейтера выполняется, так как внутренность шестиугольника непустая.

Составим функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L(x, u) &= (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + \\ &+ u_1(x_2 - 2) + u_2(4x_1 + 3x_2 - 10) + u_3(3x_1 - x_2 - 14) + \\ &+ u_4(-x_1 - 4x_2 - 30) + u_5(-5x_1 - 4x_2 - 38) + u_6(-4x_1 + 3x_2 - 18). \end{aligned}$$

Находим частные производные функции Лагранжа и приравниваем нулю:

$$\begin{aligned} 2(x_1 - 3) + 4u_2 + 3u_3 - u_4 - 5u_5 - 4u_6 &= 0, \\ 2(x_2 - 3) + u_1 + 3u_2 - u_3 - 4u_4 - 4u_5 + 3u_6 &= 0, \\ x_2 - 2 = 0, \quad 4x_1 + 3x_2 - 10 = 0, \quad 3x_1 - x_2 - 14 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 - 30 = 0, \quad -5x_1 - 4x_2 - 38 = 0, \quad -4x_1 + 3x_2 - 18 = 0. \end{aligned}$$

Положим $u_1 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = 0$. Тогда имеем:

$$x_1 + 2u_2 = 3, \quad 2x_2 + 3u_2 = 6, \quad 4x_1 + 3x_2 = 10.$$

Отсюда

$$x^* = (31/25; 42/25), \quad u^* = (0; 22/25; 0; 0; 0; 0).$$

Легко проверить, что пара (x^*, u^*) является седловой точкой функции Лагранжа. Следовательно, $x^* = (31/25; 42/25)$ - точка минимума и

$$f_{\min} = f(x^*) = \frac{121}{25}.$$

Задание № 4

Найти расстояние от заданной точки A до четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ с вершинами в заданных точках A_1, A_2, A_3, A_4 , составляя и решая задачу выпуклого программирования.

Варианты

- 1) $A(-1; 2), A_1(0; 4), A_2(1; -1), A_3(3; 3), A_4(4; 5)$.
- 2) $A(-2; 2), A_1(1; 4), A_2(0; -1), A_3(3; -3), A_4(4; 3)$.
- 3) $A(-3; -2), A_1(1; 4), A_2(1; -2), A_3(3; 2), A_4(4; 4)$.
- 4) $A(-1; 0), A_1(1; 4), A_2(2; -1), A_3(3; -3), A_4(5; 2)$.
- 5) $A(1; 2), A_1(0; 4), A_2(-1; -1), A_3(-3; 3), A_4(-4; 5)$.
- 6) $A(2; 2), A_1(-1; 4), A_2(0; -1), A_3(-3; -3), A_4(-4; 3)$.
- 7) $A(3; -2), A_1(-1; 4), A_2(-1; -2), A_3(-3; 2), A_4(-4; 4)$.
- 8) $A(1; 0), A_1(-1; 4), A_2(-2; -1), A_3(-3; -3), A_4(-5; 2)$.
- 9) $A(2; -1), A_1(4; 0), A_2(-1; 1), A_3(3; 3), A_4(5; 4)$.
- 10) $A(2; -2), A_1(4; 1), A_2(-1; 0), A_3(-3; 3), A_4(3; 4)$.
- 11) $A(-2; -3), A_1(4; 1), A_2(-2; 1), A_3(2; 3), A_4(4; 4)$.
- 12) $A(0; -1), A_1(4; 1), A_2(-1; 2), A_3(-3; 3), A_4(2; 5)$.
- 13) $A(2; 1), A_1(4; 0), A_2(-1; -1), A_3(3; -3), A_4(5; -4)$.
- 14) $A(2; 2), A_1(4; -1), A_2(-1; 0), A_3(-3; -3), A_4(3; -4)$.
- 15) $A(-2; 3), A_1(4; -3), A_2(-2; -1), A_3(2; -3), A_4(4; -4)$.
- 16) $A(1; 1), A_1(4; -1), A_2(-1; -2), A_3(-3; -3), A_4(2; -5)$.
- 17) $A(1; 2), A_1(2; 4), A_2(3; 6), A_3(4; 2), A_4(3; -1)$.
- 18) $A(3; -2), A_1(-1; 4), A_2(1; -1), A_3(3; 3), A_4(4; 5)$.
- 19) $A(-2; -3), A_1(0; 4), A_2(2; -1), A_3(3; 2), A_4(4; 5)$.
- 20) $A(2; 1), A_1(-1; 4), A_2(-2; 6), A_3(-3; 5), A_4(-2; -5)$.

- 21) $A(-3; -4), A_1(0; 4), A_2(1; -1), A_3(3; 3), A_4(4; 5)$.
22) $A(4; 3), A_1(1; -1), A_2(2; -4), A_3(3; 3), A_4(2; 5)$.
23) $A(-1; -2), A_1(1; 4), A_2(2; -1), A_3(3; 2), A_4(4; 5)$.
24) $A(2; -1), A_1(-1; 4), A_2(-1; -1), A_3(-3; 3), A_4(-1; 5)$.
25) $A(-3; 2), A_1(0; 4), A_2(1; -1), A_3(3; 3), A_4(4; 5)$.

§5. Метод динамического программирования

Методом динамического программирования называют метод решения оптимизационных задач, где исходная задача сводится к последовательности более простых оптимизационных задач. Процесс решения получаемой последовательности задач во многих случаях интерпретируется как программируемый динамический процесс (процесс, меняющийся во времени), приводящий к желаемой цели. К таким оптимизационным задачам можно применять метод динамического программирования.

Метод динамического программирования рассмотрим применительно к следующей задаче:

$$f = f_1(x_0, x_1) + f_2(x_1, x_2) + \dots + f_m(x_{m-1}, x_m) \rightarrow \min,$$

$$x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, \dots, x_m \in D_m,$$

где элемент x_0 , множества $D_1, D_2, \dots, D_m$, функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ задаются, а элементы $x_1, x_2, \dots, x_m$ неизвестны. Данную задачу можно свести к следующей последовательности оптимизационных задач:

$$G_{m-1}(x_{m-1}) = \min_{x_m \in D_m} f_m(x_{m-1}, x_m),$$

$$G_{m-2}(x_{m-2}) = \min_{x_{m-1} \in D_{m-1}} [G_{m-1}(x_{m-1}) + f_{m-1}(x_{m-2}, x_{m-1})],$$

.....

$$G_0(x_0) = \min_{x_1 \in D_1} [G_1(x_1) + f_1(x_0, x_1)].$$

Процесс построения функций $G_{m-1}, G_{m-2}, \dots, G_0$ называют обратным ходом. По функциям $G_0, \dots, G_{m-1}$ выполняют прямой ход, состоящий в последовательном нахождении элементов

$$x_1^0 : G_0(x_0) = G_1(x_1^0) + f_1(x_0, x_1^0),$$

$$x_2^0 : G_1(x_1^0) = G_2(x_2^0) + f_2(x_1^0, x_2^0),$$

.....

$$x_{m-1}^0 : G_{m-1}(x_{m-2}^0) = G_{m-1}(x_{m-1}^0) + f_{m-1}(x_{m-2}^0, x_{m-1}^0),$$

$$x_m^0 : G_{m-1}(x_{m-1}^0) = f_m(x_{m-1}^0, x_m^0).$$

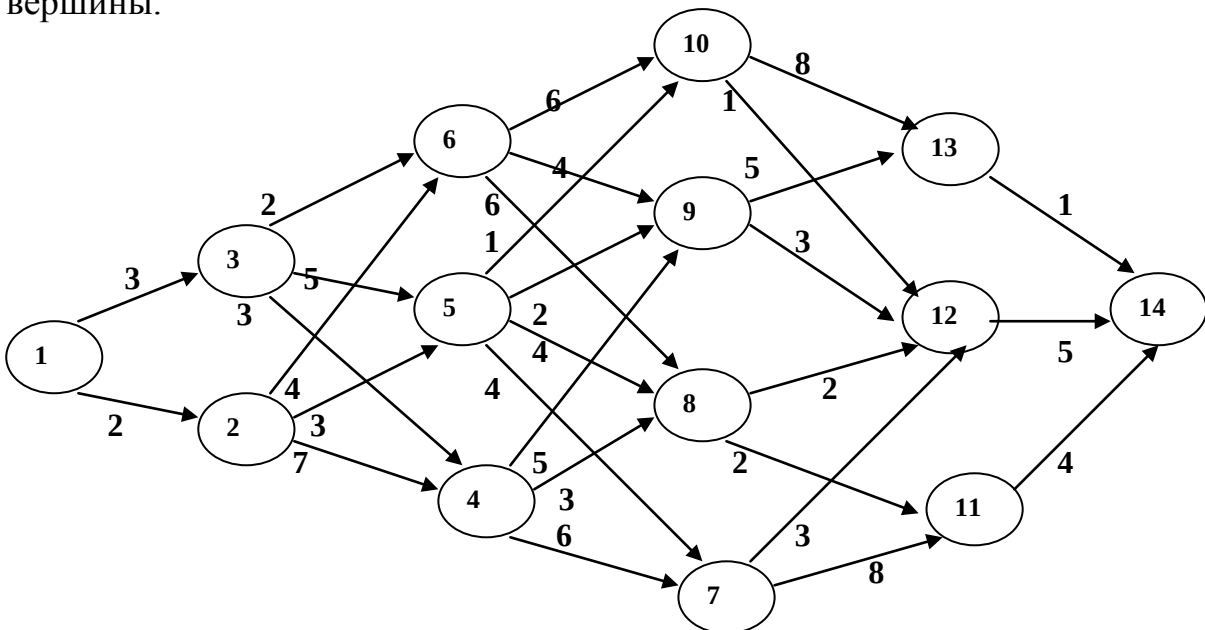
Тогда набор элементов $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ будет решением исходной оптимизационной задачи.

Метод динамического программирования также применим для решения оптимизационных задач вида

$$f = f_1(x_1) + f_2(x_1, x_2) + f_3(x_1, x_2, x_3) + \dots + f_m(x_1, \dots, x_m) \rightarrow \min,$$

$$x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, \dots, x_m \in D_m.$$

Пример 5.1. В заданном ациклическом ориентированном графе с весами найти маршрут минимальной длины, соединяющий начальную и конечную вершины.



Вершины графа разобьем на следующие слои: $D_0 = \{1\}$, $D_1 = \{2, 3\}$, $D_2 = \{4, 5, 6\}$, $D_3 = \{7, 8, 9, 10\}$, $D_4 = \{11, 12, 13\}$, $D_5 = \{14\}$. Любой маршрут, соединяющий начальную вершину с конечной, можно представить как набор элементов $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где x_i - вершина i -го слоя графа, куда осуществляется переход от вершины x_{i-1} $(i-1)$ -го слоя. Длину участка перехода от x_{i-1} в x_i обозначим через $f_i(x_{i-1}, x_i)$. Тогда длина маршрута равна $f_1(x_0, x_1) + f_2(x_1, x_2) + f_3(x_2, x_3) + f_4(x_3, x_4) + f_5(x_4, x_5)$. Таким образом, получаем следующую оптимизационную задачу

$$f = f_1(x_0, x_1) + f_2(x_1, x_2) + f_3(x_2, x_3) + f_4(x_3, x_4) + f_5(x_4, x_5) \rightarrow \min,$$

$$x_0 = 1, \quad x_i \in D_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

где $D_0 = \{1\}$, $D_1 = \{2, 3\}$, $D_2 = \{4, 5, 6\}$, $D_3 = \{7, 8, 9, 10\}$, $D_4 = \{11, 12, 13\}$, $D_5 = \{14\}$, функции f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 по условию задачи определены следующими таблицами:

x_0	x_1	f_1	x_1	x_2	f_2	x_2	x_3	f_3	x_3	x_4	f_4	x_4	x_5	f_5
1	2	2	2	4	7	4	7	6	7	11	8	11	14	4
1	3	3	2	5	3	4	8	3	7	12	3	12	14	5
			2	6	4	4	9	5	7	13	∞	13	14	1
			3	4	1	4	10	∞	8	11	2			
			3	5	5	5	7	4	8	12	2			
			3	6	2	5	8	4	8	13	4			
						5	9	2	9	11	1			
						5	10	1	9	12	3			
						6	7	∞	9	13	5			
						6	8	6	10	11	∞			
						6	9	4	10	12	1			
						6	10	6	10	13	8			

В соответствии с методом динамического программирования выполним обратный и прямой ход.

Обратный ход. Находим функции G_4, G_3, G_2, G_1, G_0 :

$$G_4(11) = f_5(11, 14) = 4,$$

$$G_4(12) = f_5(12, 14) = 5,$$

$$G_4(13) = f_5(13, 14) = 1,$$

x_4	G_4
11	4
12	5
13	1

$$G_3(7) = \min\{ G_4(11) + f_4(7, 11), G_4(12) + f_4(7, 12), G_4(13) + f_4(7, 13) \} = \\ = \min\{ 4 + 8, 5 + 3, 1 + \infty \} = 5 + 3 = G_4(12) + f_4(7, 12) = 8,$$

$$G_3(7) = G_4(12) + f_4(7, 12) = 8,$$

$$G_3(8) = G_4(13) + f_4(8, 13) = 5,$$

$$G_3(9) = G_4(11) + f_4(9, 11) = 5,$$

$$G_3(10) = G_4(12) + f_4(10, 12) = 6,$$

x_3	G_3
7	8
8	5
9	5
10	6

$$G_2(4) = G_3(8) + f_3(4, 8) = 8,$$

$$G_2(5) = G_3(10) + f_3(5, 10) = 7,$$

$$G_2(6) = G_3(9) + f_3(6, 9) = 9,$$

x_2	G_2
4	8
5	7
6	9

$$G_1(2) = G_2(5) + f_2(2, 5) = 10,$$

$$G_1(3) = G_2(4) + f_2(3, 4) = 9,$$

x_1	G_1
2	10
3	9

$$G_0(1) = G_1(2) + f_1(1, 2) = 12,$$

x_0	G_0
1	12

Прямой ход. По функциям G_0, G_1, G_2, G_3, G_4 находим оптимальный маршрут:

	$G_0(1) = G_1(x_1^0) + f_1(1, x_1^0),$	$x_1^0 = 2,$	
	$G_1(2) = G_2(x_2^0) + f_2(2, x_2^0),$	$x_2^0 = 5,$	
Следова-	$G_2(5) = G_3(x_3^0) + f_3(5, x_3^0),$	$x_3^0 = 10,$	тельно,
	$G_3(10) = G_4(x_4^0) + f_4(10, x_4^0),$	$x_4^0 = 12,$	
	$G_4(12) = f_5(12, x_5^0),$	$x_5^0 = 14.$	

1 – 2 – 5 – 10 – 12 – 14 - оптимальный маршрут с длиной, равной

$$f_{\min} = f_1(1, 2) + f_2(2, 5) + f_3(5, 10) + f_4(10, 12) + f_5(12, 14) = 12.$$

Задание № 5

В заданном ациклическом ориентированном графе с весами $G = (V, E)$, где $V = \{1, \dots, n\}$ - множество вершин графа и E - множество дуг (k_i, k_j, w_{ij}) с весами w_{ij} , найти маршрут минимальной длины, соединяющий начальную и конечную вершины.

Варианты

1)

$$n = 12, \quad E = \{(1,2,3), (1,3,2), (1,4,1), (2,5,5), (3,5,5), (3,6,4), (4,6,3), \\ (5,7,3), (5,8,4), (5,9,6), (6,7,2), (6,8,5), (6,9,4), (7,10,2), \\ (7,11,2), (8,10,1), (8,11,4), (9,11,3), (10,12,4), (11,12,3)\}$$

2)

$$n = 11, \quad E = \{(1,2,4), (1,3,3), (2,4,3), (2,5,4), (3,4,2), (3,5,6), (4,6,3), \\ (4,7,2), (4,8,3), (5,6,1), (5,7,4), (5,8,1), (6,9,2), (6,10,3), \\ (7,9,1), (7,10,1), (8,9,4), (8,10,5), (9,11,5), (10,11,7)\}$$

3)

$$n = 12, \quad E = \{(1,2,2), (1,3,3), (2,4,5), (2,5,7), (3,5,4), (3,6,2), (4,9,1), \\ (4,7,4), (4,8,2), (5,7,3), (5,8,2), (6,7,1), (6,8,3), (6,9,2), \\ (7,10,2), (8,10,3), (8,11,9), (9,10,5), (9,11,4), (10,12,9), (11,12,8)\}$$

4)

$$n = 12, \quad E = \{(1,2,3), (1,3,4), (2,4,1), (2,5,4), (3,4,3), (3,5,2), (4,6,6), \\ (4,7,4), (4,8,6), (5,6,8), (5,7,5), (5,8,4), (6,9,5), (6,10,3), \\ (7,9,2), (7,10,2), (7,11,5), (8,10,7), (8,11,3), (9,12,3), (10,12,4), (11,12,2)\}$$

5)

$$n = 13, \quad E = \{(1,2,4), (1,3,3), (1,4,5), (2,5,4), (2,6,1), (2,7,3), (3,5,4), (3,6,2), \\ (3,7,1), (4,6,2), (4,7,2), (5,8,2), (5,9,4), (6,8,5), (6,9,2), (7,8,3), (7,9,4), \\ (8,11,4), (8,10,2), (9,11,1), (9,10,3), (9,12,6), (10,13,6), (11,13,7), (12,13,5)\}$$

6)

$$n = 12, \quad E = \{(1,2,3), (1,3,4), (2,4,3), (2,5,2), (2,6,1), (3,4,1), (3,5,2), \\ (3,6,4), (4,7,2), (4,8,7), (4,9,2), (5,7,6), (5,8,1), (5,9,1), (6,8,2), (6,9,1), \\ (7,10,4), (7,11,3), (8,10,3), (8,11,4), (9,10,2), (9,11,7), (10,12,3), (11,12,5)\}$$

7)

$$n = 11, \quad E = \{(1,2,8), (1,3,7), (2,4,6), (2,5,4), (2,6,8), (3,4,5), (3,5,3), \\ (3,6,9), (4,7,4), (5,7,1), (5,8,7), (6,7,2), (6,8,3), (7,9,3), \\ (7,10,2), (8,9,3), (8,10,2), (9,11,5), (10,11,4)\}$$

8)

$$n = 12, \quad E = \{(1,2,5), (1,3,7), (1,4,6), (2,5,4), (2,6,4), (3,5,6), (3,6,5), \\ (4,5,7), (4,6,6), (5,7,2), (5,8,6), (5,9,3), (6,7,4), (6,8,3), \\ (6,9,4), (7,10,4), (8,10,2), (8,11,4), (9,10,3), (9,11,2), (10,12,4), (11,12,6)\}$$

9)

$$n = 12, \quad E = \{(1,2,5), (1,3,4), (2,4,2), (2,5,1), (3,4,1), (3,5,3), (4,6,7), (4,7,1), \\ (4,8,2), (5,6,3), (5,7,4), (5,8,3), (6,9,5), (7,9,4), (7,10,2), (7,11,5), (8,9,3), \\ (8,11,6), (9,12,5), (10,12,6), (11,12,7)\}$$

10)

$n = 12$, $E = \{(1,2,3), (1,3,4), (2,4,5), (2,5,2), (2,6,1), (3,4,4), (3,5,3), (3,6,2),$
 $(4,7,3), (4,8,5), (5,7,4), (5,8,7), (5,9,4), (6,7,4), (6,8,2), (6,9,3), (7,10,5),$
 $(7,11,7), (8,10,4), (8,11,3), (9,10,3), (9,11,4), (10,12,9), (11,12,7)\}$

11)

$n = 12$, $E = \{(1,2,5), (1,3,3), (2,4,4), (2,5,2), (2,6,2), (3,4,3), (3,5,1), (3,6,3),$
 $(4,7,4), (4,8,3), (5,7,4), (5,8,2), (5,9,4), (6,8,3), (6,9,6), (7,10,7), (7,11,5),$
 $(8,10,5), (8,11,6), (9,10,8), (9,11,7), (10,12,4), (11,12,3)\}$

12)

$n = 11$, $E = \{(1,2,7), (1,3,5), (2,4,5), (2,5,5), (3,4,4), (3,5,4), (4,6,3), (4,7,4),$
 $(4,8,2), (5,6,3), (5,7,3), (5,8,7), (6,9,2), (6,10,2), (7,9,4),$
 $(8,9,3), (8,10,1), (9,11,6), (10,11,7)\}$

13)

$n = 12$, $E = \{(1,2,5), (1,3,2), (2,4,5), (2,6,5), (3,4,1), (3,5,7), (3,6,4),$
 $(4,7,3), (4,8,2), (5,7,6), (5,8,7), (5,9,10), (6,8,4), (6,9,3), (7,10,6), (7,11,3),$
 $(8,10,4), (8,11,1), (9,10,5), (9,11,6), (10,12,3), (11,12,2)\}$

14)

$n = 12$, $E = \{(1,2,3), (1,3,5), (2,4,2), (2,5,1), (3,4,7), (3,5,3), (3,6,4), (4,7,4),$
 $(4,8,5), (5,7,6), (5,8,2), (6,7,10), (6,8,7), (7,9,4), (7,10,5), (7,11,7), (8,9,6),$
 $(8,10,3), (8,11,1), (9,12,5), (10,12,4), (11,12,3)\}$

15)

$n = 12$, $E = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,4,4), (2,5,2), (2,6,3), (3,4,5), (3,5,4), (3,6,1),$
 $(4,7,6), (4,8,5), (5,7,7), (5,8,6), (5,9,10), (6,8,2), (6,9,3), (7,10,4), (8,10,2),$
 $(8,11,5), (9,11,4), (10,12,1), (11,12,3)\}$

16)

$n = 12$, $E = \{(1,2,2), (1,3,3), (2,4,6), (2,5,4), (3,4,8), (3,5,5), (3,6,7),$
 $(4,7,3), (4,8,2), (5,7,5), (5,8,6), (6,7,1), (6,8,3), (7,9,5), (7,10,6),$
 $(7,11,3), (8,9,4), (8,10,2), (8,11,4), (9,12,6), (10,12,3), (11,12,5)\}$

17)

$n = 13$, $E = \{(1,2,6), (1,3,5), (2,4,3), (2,5,1), (2,6,2), (3,5,2), (3,6,1), (3,7,4),$
 $(4,8,3), (5,8,7), (5,9,8), (5,10,2), (6,8,8), (6,9,2), (6,10,1), (7,10,3), (8,11,7),$
 $(8,12,5), (9,11,4), (9,12,6), (10,11,9), (10,12,5), (11,13,3), (12,13,4)\}$

18)

$n = 12$, $E = \{(1,2,5), (1,3,4), (2,4,2), (2,5,1), (2,6,3), (3,4,9), (3,5,2), (3,6,7),$
 $(4,7,3), (4,8,5), (5,7,6), (5,8,2), (5,9,5), (6,8,4), (6,9,3), (7,10,7), (7,11,2),$
 $(8,10,1), (8,11,1), (9,10,6), (9,11,4), (10,12,2), (11,12,3)\}$

19)

$n = 12$, $E = \{(1,2,4), (1,3,3), (2,4,4), (2,5,3), (2,6,6), (3,4,2), (3,5,1), (3,6,5),$
 $(4,7,7), (4,8,6), (5,7,4), (5,8,5), (5,9,3), (6,8,4), (6,9,4), (7,10,5), (8,10,2),$
 $(8,11,1), (9,10,2), (9,11,3), (10,12,1), (11,12,3)\}$

20)

$n = 12$, $E = \{(1,2,1), (1,3,2), (2,4,2), (2,5,4), (2,6,3), (3,4,5), (3,5,3), (3,6,5),$
 $(4,7,3), (4,8,5), (5,7,4), (5,8,1), (5,9,2), (6,8,6), (6,9,3), (7,10,4), (7,11,3),$
 $(8,10,2), (8,11,2), (9,10,7), (9,11,5), (10,12,3), (11,12,4)\}$

21)

$n = 12$, $E = \{(1,2,3), (1,3,4), (1,4,5), (2,5,5), (2,6,2), (3,5,4), (3,6,3), (4,5,7),$
 $(4,6,4), (5,7,2), (5,8,4), (6,7,2), (6,8,6), (6,9,5), (7,10,1), (8,10,4),$
 $(8,11,3), (9,11,2), (10,12,6), (11,12,4)\}$

22)

$n = 12$, $E = \{(1,2,5), (1,3,4), (2,4,4), (2,5,1), (2,6,2), (3,4,4), (3,5,3), (3,6,7),$
 $(4,7,6), (4,8,4), (5,7,5), (5,8,3), (5,9,4), (6,8,5), (6,9,6), (7,10,2), (7,11,4),$
 $(8,10,1), (8,11,6), (9,10,5), (9,11,2), (10,12,4), (11,12,3)\}$

23)

$n = 12$, $E = \{(1,2,4), (1,3,3), (2,4,2), (2,5,5), (2,6,6), (3,5,4), (3,6,2),$
 $(4,7,6), (4,8,3), (5,7,2), (5,8,5), (5,9,4), (6,8,6), (6,9,3), (7,10,3), (7,11,4),$
 $(8,10,5), (8,11,1), (9,10,2), (9,11,1), (10,12,4), (11,12,7)\}$

24)

$n = 11, \quad E = \{(1,2,6), (1,3,5), (2,4,5), (2,5,1), (3,4,4), (3,5,6),$
 $(4,6,10), (4,8,1), (5,6,3), (5,7,4), (5,8,5), (6,9,4), (6,10,2), (7,9,7), (7,10,4),$
 $(8,9,2), (8,10,6), (9,11,3), (10,11,4)\}$

25)

$n = 13, \quad E = \{(1,2,2), (1,3,1), (2,4,1), (2,5,5), (2,6,6), (3,4,7), (3,5,3), (3,6,5),$
 $(4,7,4), (4,8,6), (5,7,5), (5,8,3), (5,9,3), (5,10,5), (6,7,2), (6,8,4), (6,9,6),$
 $(6,10,3), (7,11,4), (7,12,5), (8,11,2), (8,12,4), (9,11,1), (9,12,3),$
 $(10,11,4), (10,12,4), (11,13,2), (12,13,3)\}$

§6. Максимальный поток в транспортной сети

Транспортной сетью называют ориентированный граф с n вершинами $v_1, \dots, v_n$, обладающий следующими свойствами:

- 1) нет дуг, входящих в вершину v_1 , называемую источником;
- 2) нет дуг, выходящих из вершины v_n называемой стоком;
- 3) есть хотя бы один путь от v_1 до v_n ;
- 4) каждой дуге (v_i, v_j) сопоставлено положительное число c_{ij} , называемое пропускной способностью дуги.

Транспортную сеть можно задавать матрицей пропускных способностей $C = \{c_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$, где $c_{ij} \geq 0$ и в случае $c_{ij} = 0$ считаем, что дуга (v_i, v_j) отсутствует.

Потоком в транспортной сети называют матрицу $F = \{f_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) при любых $i, j = \overline{1,n}$ выполняется неравенство $0 \leq f_{ij} \leq c_{ij}$, число f_{ij} называют потоком по дуге (v_i, v_j) , оно не должно быть больше пропускной способности дуги c_{ij} ;

2) для каждой внутренней вершины v_k , где $k = \overline{2, n-1}$, сумма входящих в нее потоков равна сумме выходящих из нее потоков

$$f_{1k} + f_{2k} + \dots + f_{nk} = f_{k1} + f_{k2} + \dots + f_{kn}.$$

Число $W(F) = f_{11} + f_{12} + \dots + f_{1n}$ называют объемом потока F . Объем потока равен сумме потоков, выходящих из источника, и сумме потоков, входящих в сток. Поток с наибольшим объемом называют максимальным.

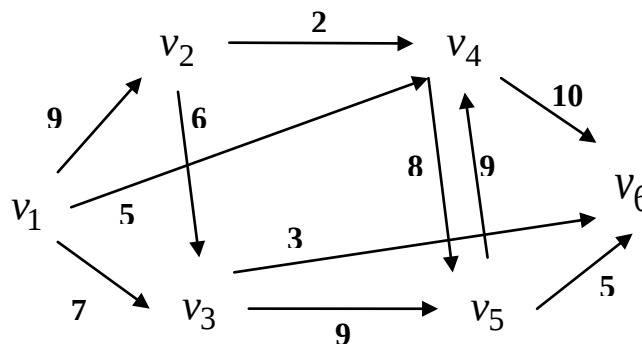
Для нахождения максимального потока в транспортной сети можно составить и решить следующую задачу линейного программирования:

$$W(F) = f_{11} + f_{12} + \dots + f_{1n} \rightarrow \max,$$

$$0 \leq f_{ij} \leq c_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$f_{1k} + f_{2k} + \dots + f_{nk} = f_{k1} + f_{k2} + \dots + f_{kn}, \quad k = \overline{2, n-1}.$$

Пример 6.1. Рассмотрим следующую транспортную сеть



Составим задачу линейного программирования:

$$W(F) = f_{12} + f_{13} + f_{14} \rightarrow \max,$$

$$f_{11} = 0, 0 \leq f_{12} \leq 9, 0 \leq f_{13} \leq 7, 0 \leq f_{14} \leq 5, f_{15} = 0, f_{16} = 0,$$

$$f_{21} = 0, f_{22} = 0, 0 \leq f_{23} \leq 6, 0 \leq f_{24} \leq 2, f_{25} = 0, f_{26} = 0,$$

$$f_{31} = 0, f_{32} = 0, f_{33} = 0, f_{34} = 0, 0 \leq f_{35} \leq 9, 0 \leq f_{36} \leq 3,$$

$$f_{41} = 0, f_{42} = 0, f_{43} = 0, f_{44} = 0, 0 \leq f_{45} \leq 8, 0 \leq f_{46} \leq 10,$$

$$f_{51} = 0, f_{52} = 0, f_{53} = 0, 0 \leq f_{54} \leq 9, f_{55} = 0, 0 \leq f_{56} \leq 5,$$

$$f_{61} = 0, f_{62} = 0, f_{63} = 0, f_{64} = 0, f_{65} = 0, f_{66} = 0,$$

$$f_{12} = f_{23} + f_{24}, f_{13} + f_{23} = f_{35} + f_{36},$$

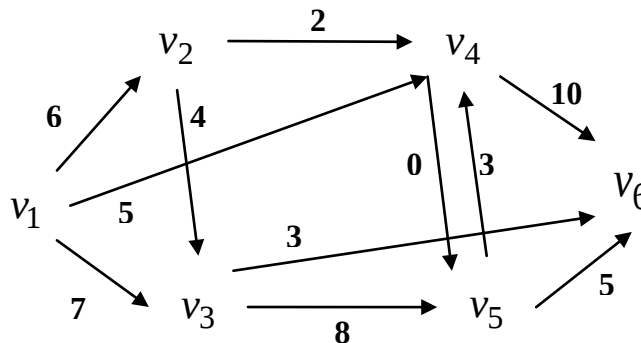
$$f_{14} + f_{24} + f_{54} = f_{45} + f_{46}, f_{35} + f_{45} = f_{54} + f_{56}.$$

Решая задачу линейного программирования относительно неизвестных f_{12} ,

f_{13} , f_{14} , f_{23} , f_{24} , f_{35} , f_{36} , f_{45} , f_{46} , f_{54} , f_{56} , находим

$$F^* = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ - максимальный поток,}$$

$$W(F^*) = 6 + 7 + 5 = 18 \text{ - объем максимального потока,}$$



Задание № 6

Построить транспортную сеть, заданную матрицей пропускных способностей $C = \{c_{ij}\}_{i,j=\overline{1,6}}$, и найти максимальный поток в транспортной сети.

Варианты

1)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 9 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 7 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 7 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

19)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

20)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

21)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

22)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

23)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

24)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

25)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

§7. Численные методы оптимизации

Пусть функция $f(x)$, определенная при всех n -мерных векторах $x \in R^n$, имеет минимум

$$f(x^*) = \min \{ f(x) : x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \}.$$

Последовательность векторов $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ называют минимизирующей последовательностью, если $f(x^{(k)}) \rightarrow f(x^*)$ при $k \rightarrow \infty$.

Методы построения минимизирующей последовательности называют численными методами оптимизации. Рассмотрим два из них – метод спуска и метод Ньютона.

Метод спуска. Если целевая функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки минимума x^* дифференцируема и ее градиент удовлетворяет условию Липшица

$$|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq L \cdot |x - y|,$$

где L называют константой Липшица, и если в этой окрестности нет других критических точек функции $f(x)$, то минимизирующую последовательность можно построить следующей формулой

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - t \cdot \nabla f(x^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $t = 1/(2L)$, $x^{(0)}$ - начальная точка из рассматриваемой окрестности.

Алгоритм метода спуска для приближенного нахождения точки минимума:

1. Задать точность приближения $\varepsilon > 0$ и выбрать начальную точку $x^{(0)}$.
2. Последовательно находить точки

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - t \cdot \nabla f(x^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

до тех пор, пока при некотором k_0 не будет выполнено неравенство

$$|\nabla f(x^{(k_0)})| < \varepsilon.$$

3. $x \approx x^{(k_0)}$ – приближенная точка минимума.

Метод Ньютона. Пусть целевая функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки минимума x^* и в каждой точке x этой окрестности существует матрица $H^{-1}(x)$, обратная матрице вторых производных $H(x)$ функции $f(x)$. И пусть в данной окрестности нет других критических точек функции $f(x)$. Тогда минимизирующую последовательность можно построить следующей формулой

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - H^{-1}(x^{(k-1)}) \nabla f(x^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $x^{(0)}$ - начальная точка из окрестности x^* .

Алгоритм метода Ньютона для приближенного нахождения точки минимума:

1. Задать точность приближения $\varepsilon > 0$ и выбрать начальную точку $x^{(0)}$.
2. Последовательно находить точки

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - H^{-1}(x^{(k-1)}) \nabla f(x^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

до тех пор, пока при некотором k_0 не будет выполнено неравенство

$$|\nabla f(x^{(k_0)})| < \varepsilon.$$

3. $x \approx x^{(k_0)}$ – приближенная точка минимума.

Если целевая функция $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки минимума x^* и ее матрица вторых производных $H(x)$ удовлетворяет условию сильной выпуклости $H(x) \geq l \cdot I$, где I - единичная матрица и $l > 0$ не зависит от x , то последовательности, которые строятся методами спуска и Ньютона, действительно будут минимизирующими последовательностями.

Пример 7.1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x_1^4 + ax_2^4 + (bx_1 + cx_2)^2 + px_1 + qx_2, \quad x = (x_1, x_2)^T,$$

где $a > 0$, $bc > 0$, $|p| + |q| > 0$. Заметим, что

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty.$$

Отсюда вытекает существование минимума функции.

Найдем градиент и матрицу вторых производных функции:

$$\nabla f(x) = \left(4x_1^3 + 2b(bx_1 + cx_2) + p, 4ax_2^3 + 2c(bx_1 + cx_2) + q \right)^T,$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 + 2b^2 & 2bc \\ 2bc & 12ax_2^2 + 2c^2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в любой точке, отличной от нуля, в силу $a > 0$, $bc > 0$, определитель матрицы $H(x)$ положительный:

$$\det H(x) = 24(6ax_1^2x_2^2 + c^2x_1^2 + ab^2x_2^2) > 0.$$

Любая критическая точка функции $f(x)$, в силу $|p| + |q| > 0$, отлична от нуля. Следовательно, в любой критической точке $\det H(x) > 0$.

В любой точке x матрица $H(x)$ удовлетворяет условию сильной выпуклости $H(x) \geq l \cdot I$, где $l = \min(2b^2, 2c^2)$. Поэтому сходимость методов спуска и Ньютона обеспечена.

Находим константу Липшица:

$$\begin{aligned} |\nabla f(x) - \nabla f(y)|^2 &= [4(x_1^3 - y_1^3) + 2b^2(x_1 - y_1) + 2bc(x_2 - y_2)]^2 + \\ &\quad + [4a(x_2^3 - y_2^3) + 2c^2(x_2 - y_2) + 2bc(x_1 - y_1)]^2 \leq \\ &\leq 3[4(x_1^3 - y_1^3)]^2 + 3[2b^2(x_1 - y_1)]^2 + 3[2bc(x_2 - y_2)]^2 + \\ &\quad + 3[4a(x_2^3 - y_2^3)]^2 + 3[2c^2(x_2 - y_2)]^2 + 3[2bc(x_1 - y_1)]^2 \leq \\ &\leq 48|x - y|^2 [(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2) + a^2(x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2)] + \\ &\quad + 24 \cdot \max(|b|^4, |c|^4) |x - y|^2 \leq \\ &\leq [96 \cdot \max(1, a^2)(|x|^2 + |y|^2) + 24 \cdot \max(|b|^4, |c|^4)] |x - y|^2 \end{aligned}$$

Полагая $|x| \leq r$, $|y| \leq r$ и $L^2 = 192 \cdot \max(1, a^2)r^2 + 24 \cdot \max(|b|^4, |c|^4)$, имеем:

$$|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \text{при} \quad |x| \leq r, \quad |y| \leq r.$$

Теперь найдем матрицу $H^{-1}(x)$:

$$H^{-1}(x) = (36ax_1^2x_2^2 + 6c^2x_1^2 + 6ab^2x_2^2)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6ax_2^2 + c^2 & -bc \\ -bc & 6x_1^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, формула метода спуска принимает следующий вид:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - L^{-1} \begin{pmatrix} 2(x^{(k-1)})_1^3 + b(b(x^{(k-1)})_1 + c(x^{(k-1)})_2) + p/2, \\ 2a(x^{(k-1)})_2^3 + c(b(x^{(k-1)})_1 + c(x^{(k-1)})_2) + q/2 \end{pmatrix}^T, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $|x^{(0)}| < r$ и

$$L = \sqrt{192 \cdot \max(1, a^2) r^2 + 24 \cdot \max(|b|^4, |c|^4)}.$$

А формула метода Ньютона принимает вид

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \begin{pmatrix} 18a(x^{(k-1)})_1^2 (x^{(k-1)})_2^2 + 3c^2 (x^{(k-1)})_1^2 + 3ab^2 (x^{(k-1)})_2^2 \\ \cdot \begin{pmatrix} 6a(x^{(k-1)})_2^2 + c^2 & -bc \\ -bc & 6(x^{(k-1)})_1^2 + b^2 \end{pmatrix} \\ \cdot \begin{pmatrix} 2(x^{(k-1)})_1^3 + b(b(x^{(k-1)})_1 + c(x^{(k-1)})_2) + p/2 \\ 2a(x^{(k-1)})_2^3 + c(b(x^{(k-1)})_1 + c(x^{(k-1)})_2) + q/2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Задание № 7

Для заданной функции f , зависящей от двух переменных x_1, x_2 , найти точку минимума с точностью $\varepsilon = 0,05$, применяя

а) метод спуска;

б) метод Ньютона.

Варианты

- 1) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^4 + (3x_1 + 2x_2)^2 - 2x_1 + 4x_2$
- 2) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + (2x_1 + 3x_2)^2 - 4x_1 + 2x_2$
- 3) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 3x_2^4 + (x_1 + 2x_2)^2 - 2x_1 + 2x_2$
- 4) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 4x_2^4 + (3x_1 + 2x_2)^2 + 6x_1 + 2x_2$
- 5) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 5x_2^4 + (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 - 2x_2$
- 6) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + (4x_1 + 3x_2)^2 + 2x_1 - 6x_2$

$$7) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 6x_2^4 + (5x_1 + x_2)^2 + 4x_1 + 2x_2$$

$$8) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 5x_2^4 + (4x_1 + 3x_2)^2 + 8x_1 + 4x_2$$

$$9) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 4x_2^4 + (3x_1 + 2x_2)^2 - 6x_1 + 2x_2$$

$$10) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 3x_2^4 + (2x_1 + 3x_2)^2 + 4x_1 - 4x_2$$

$$11) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^4 + (3x_1 + 4x_2)^2 - 6x_1 + 2x_2$$

$$12) f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + (3x_1 + x_2)^2 + 8x_1 - 2x_2$$

$$13) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^4 + (3x_1 + 2x_2)^2 + 2x_1 - 4x_2$$

$$14) f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + (2x_1 + 7x_2)^2 + 4x_1 - 2x_2$$

$$15) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 3x_2^4 + (x_1 + 2x_2)^2 + 2x_1 - 2x_2$$

$$16) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 4x_2^4 + (3x_1 + 8x_2)^2 - 6x_1 + 2x_2$$

$$17) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 5x_2^4 + (2x_1 + 9x_2)^2 + 4x_1 - 2x_2$$

$$18) f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + (4x_1 + 3x_2)^2 - 2x_1 + 6x_2$$

$$19) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 6x_2^4 + (5x_1 + x_2)^2 + 4x_1 - 2x_2$$

$$20) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 5x_2^4 + (4x_1 + 3x_2)^2 + 8x_1 - 4x_2$$

$$21) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 4x_2^4 + (7x_1 + 3x_2)^2 + 6x_1 - 2x_2$$

$$22) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 3x_2^4 + (2x_1 + 3x_2)^2 - 4x_1 + 4x_2$$

$$23) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^4 + (3x_1 + 5x_2)^2 + 6x_1 - 2x_2$$

$$24) f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + (3x_1 + 7x_2)^2 + 8x_1 + 2x_2$$

$$25) f(x_1, x_2) = x_1^4 + 3x_2^4 + (5x_1 + 2x_2)^2 - 2x_1 + 2x_2$$

§8. Простейшая задача вариационного исчисления

Простейшая задача вариационного исчисления состоит в нахождении минимума или максимума функционала

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} F(t, x(t), x'(t)) dt$$

на множестве гладких функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям

$$x(\alpha) = A, \quad x(\beta) = B.$$

Решение задачи, если оно существует, будет решением уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'}(t, x, x') - \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, x') = 0.$$

Поэтому уравнение Эйлера называют необходимым условием экстремума. Всякое решение $x(t)$ уравнения Эйлера, удовлетворяющее краевым условиям $x(\alpha) = A$, $x(\beta) = B$, называют экстремалью простейшей вариационной задачи. Таким образом, решение простейшей вариационной задачи следует искать среди экстремалей.

Экстремаль $x_0(t)$ будет решением простейшей вариационной задачи, если удовлетворяет двум условиям – усиленному условию Лежандра и условию Якоби; их называют достаточными условиями экстремума.

1. Усиленное условие Лежандра: для задачи на минимум должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}(t, x_0(t), x'_0(t)) > 0, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

а для задачи на максимум должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}(t, x_0(t), x'_0(t)) < 0, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

2. Условие Якоби: существует решение $u(t)$ уравнения Якоби

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x_0(t), x'_0(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x'}(t, x_0(t), x'_0(t)) \right) u(t) - \\ - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}(t, x_0(t), x'_0(t)) u'(t) \right) = 0,$$

такое, что $u(\alpha) = 0$ и $u(t) > 0$ при $\alpha < t \leq \beta$.

Пример 8.1. Найдем решение задачи

$$f(x) = \int_0^{\pi} (\sin t + 2x(t) - 4x'(t))^{10} dt \rightarrow \min,$$

$$x(0) = 2, \quad x(\pi) = 4.$$

Составим уравнение Эйлера и находим экстремаль:

$$F(t, x, x') = (\sin t + 2x - 4x')^{10},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(t, x, x') = -40(\sin t + 2x - 4x')^9,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, x') = 20(\sin t + 2x - 4x')^9,$$

$$2((\sin t + 2x - 4x')^9)' + (\sin t + 2x - 4x')^9 = 0 \text{ - уравнение Эйлера,}$$

$$\frac{((\sin t + 2x - 4x')^9)'}{(\sin t + 2x - 4x')^9} = -\frac{1}{2},$$

$$\sin t + 2x - 4x' = C_1 e^{-t/18},$$

$$x' - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}(\sin t - C_1 e^{-t/18}),$$

$$x(t) = \frac{9}{20}C_1 e^{-t/18} + C_2 e^{t/2} + \frac{1}{20}(\sin t + 2 \cos t) \text{ - общее решение уравнения}$$

Эйлера,

$$x(0) = 2, \quad \frac{9}{20}C_1 + C_2 + \frac{1}{10} = 2,$$

$$x(\pi) = 4, \quad \frac{9}{20}C_1e^{-\pi/18} + C_2e^{\pi/2} - \frac{1}{10} = 4,$$

$$C_{10} \approx 2,82, \quad C_{20} \approx 0,63,$$

$$x_0(t) = \frac{9}{20}C_{10}e^{-t/18} + C_{20}e^{t/2} + \frac{1}{20}(\sin t + 2 \cos t) - \text{экстремаль.}$$

Проверим, выполняются ли усиленное условие Лежандра и условие Якоби:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}(t, x_0(t), x'_0(t)) = 1440(\sin t + 2x - 4x'_0(t))^8 = 1440C_{10}^8e^{-4t/9} > 0,$$

усиленное условие Лежандра на минимум выполняется,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x_0(t), x'_0(t)) = 360(\sin t + 2x - 4x'_0(t))^8 = 360C_{10}^8e^{-4t/9},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x'}(t, x_0(t), x'_0(t)) = -720(\sin t + 2x - 4x'_0(t))^8 = -720C_{10}^8e^{-4t/9},$$

$$u''(t) + \frac{4}{9}u'(t) - \frac{1}{36}u(t) = 0 - \text{уравнение Якоби,}$$

$$u(t) = D_1e^{-t/2} + D_2e^{t/18} - \text{общее решение уравнения Якоби,}$$

$$u(0) = 0, \quad D_1 + D_2 = 0, \quad D_2 = -D_1,$$

$$u(t) = D_1(e^{-t/2} - e^{t/18}).$$

Положим $D_1 = -1$. Тогда

$$u(t) = e^{t/18} - e^{-t/2} > 0 \text{ при } t \in (0, \pi].$$

Следовательно, экстремаль $x_0(t)$ является точкой минимума:

$$f_{\min} = f(x_0) = \int_0^\pi C_{10}^{10}e^{-5t/9}dt = C_{10}^{10} \frac{9}{5}(1 - e^{-5\pi/9}) \approx 47137,95.$$

Задание № 8

Найти решение простейшей вариационной задачи

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} M (a(t) + bx(t) + cx'(t))^m dt \rightarrow \min (\max),$$

$$x(\alpha) = A, \quad x(\beta) = B,$$

где числа $M, m, \alpha, \beta, b, c, A, B$ и функция $a(t)$ задаются, m - целое и четное, $m \geq 2, \alpha < \beta, |c| > 1$.

Варианты

1) $M = 1, m = 2, \alpha = 0, \beta = 1, b = 1, c = 2,$

$$A = 0, B = 1, a(t) = 2t + 1$$

2) $M = -1, m = 4, \alpha = 1, \beta = 2, b = 2, c = 3,$

$$A = 1, B = 0, a(t) = 3t^2 + 2$$

3) $M = 1, m = 6, \alpha = 0, \beta = \pi, b = 3, c = 2,$

$$A = 0, B = 1, a(t) = \sin t$$

4) $M = -1, m = 4, \alpha = 0, \beta = \pi/2, b = 3, c = 3,$

$$A = 1, B = 0, a(t) = \cos t$$

5) $M = 2, m = 2, \alpha = 0, \beta = 3, b = 1, c = 2,$

$$A = 0, B = 1, a(t) = t^2 + 1$$

6) $M = 3, m = 6, \alpha = -1, \beta = 2, b = 1, c = -2,$

$$A = 1, B = 1, a(t) = t - 2$$

7) $M = -4, m = 2, \alpha = -2, \beta = 0, b = 1, c = -2,$

$$A = 0, B = 1, a(t) = \sqrt{t}$$

8) $M = 6, m = 6, \alpha = 1, \beta = 3, b = 1, c = -3,$

$$A = -1, B = 1, a(t) = 4t^2 + 1$$

9) $M = 5, m = 4, \alpha = 0, \beta = 1, b = 1, c = 3,$

$$A = 0, B = 2, a(t) = 3t^2 - 1$$

10) $M = -3, m = 8, \alpha = -2, \beta = 2, b = 1, c = -3,$

$$A = 0, B = 1, a(t) = e^t + 1$$

11) $M = 2, m = 10, \alpha = 0, \beta = 4, b = 1, c = -2,$

$$A = 2, B = -1, a(t) = 2t^4$$

12) $M = 4, m = 6, \alpha = 0, \beta = 2\pi, b = 1, c = 2,$

$$A = 0, B = 3, a(t) = 1 + \sin 2t$$

13) $M = -5, m = 2, \alpha = 0, \beta = \pi, b = 1, c = -2,$

$$A = 2, B = 0, a(t) = 4 - 3\cos t$$

14) $M = 1, m = 2, \alpha = 0, \beta = 1, b = 1, c = 2,$

$$A = 0, B = 1, a(t) = 3t^2 - 2$$

15) $M = -1, m = 4, \alpha = 1, \beta = 2, b = 2, c = 3,$

$$A = 1, B = 0, a(t) = 2t - 1$$

16) $M = 2, m = 6, \alpha = 0, \beta = \pi, b = 3, c = 2,$

$$A = 0, B = 1, a(t) = 1 - \cos t$$

17) $M = -1, m = 2, \alpha = 0, \beta = \pi/2, b = 3, c = 3,$

$$A = 1, B = 0, a(t) = 1 + 2\sin t$$

18) $M = -2, m = 4, \alpha = 0, \beta = 3, b = 1, c = 2,$

$$A = 0, B = 1, a(t) = t^2 - 1$$

19) $M = 5, m = 8, \alpha = -1, \beta = 2, b = 1, c = -2,$

$$A = 1, B = 1, a(t) = t + 2$$

20) $M = 4, m = 4, \alpha = -2, \beta = 0, b = 1, c = -2,$

$$A = 0, B = 1, a(t) = 2\sqrt{t}$$

21) $M = -6, m = 2, \alpha = 1, \beta = 3, b = 1, c = -3,$

$$A = -1, B = 1, a(t) = 4t^2 - t$$

22) $M = 5, m = 2, \alpha = 0, \beta = 1, b = 1, c = 3,$

$$A = 0, B = 2, a(t) = 3t^2 + 1$$

23) $M = -3, m = 10, \alpha = -2, \beta = 2, b = 1, c = -3,$

$$A = 0, B = 1, a(t) = e^{-t} + 1$$

24) $M = 2, m = 6, \alpha = 0, \beta = 4, b = 1, c = -2,$

$$A = 2, B = -1, a(t) = 5t^2 - 3$$

25) $M = -4, m = 8, \alpha = 0, \beta = 2\pi, b = 1, c = 2,$

$$A = 0, B = 3, a(t) = 2 + \cos 3t$$

Библиографический список

1. Корнеенко, В. П. Методы оптимизации: учебник / В. П. Корнеенко. – М.: Высшая школа, 2007. – 664 с.
2. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – М.: Высшая школа, 2002. – 554 с.
3. Пантелеев, А. В. Вариационное исчисление в примерах и задачах. / А. В. Пантелеев. – М.: МАИ, 2000. – 228 с.
4. Васильев, Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 2002. – 824 с.

Содержание

	Стр.
§1. Методы решения задач линейного программирования.....	3
§2. Матричные игры.....	14
§3. Транспортная задача.....	19
§4. Метод выпуклого программирования	28
§5. Метод динамического программирования	32
§6. Максимальный поток в транспортной сети.....	40
§7. Численные методы оптимизации.....	46
§8. Простейшая задача вариационного исчисления	52
Бibliографический список	59

Подписано в печать 20.06.2011.	Усл. печ. л. 3,8	Тираж	экз.
Печать офсетная.	Бумага писчая.	Заказ №	_____.

Отпечатано: РИО ВоГТУ, г. Вологда, ул. Ленина, 15