МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛОГОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**Методическое пособие
по выполнению контрольных работ № 1–3
для студентов заочной формы обучения**

Факультет электроэнергетический

Направление подготовки:	**13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника**
Профиль подготовки:	**электрооборудование и электрохозяйство предприятий, организаций и учреждений**

ВОЛОГДА
2015

УДК 629.113.004.5

Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия: методическое пособие по выполнению контрольных работ № 1–3 для студентов заочной формы обучения / сост. Т.А. Кочкарева, О.И. Микрюкова, Л.Г. Соколова. – Вологда: ВоГУ, 2015. – 63 с.

В пособии рассмотрены такие разделы высшей математики, как линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия. Эти разделы являются соответственно темами контрольных работ по высшей математике № 1, 2 и 3 для студентов заочной формы обучения указанных направления и профиля. В пособии представлен необходимый теоретический материал, приведены примеры решения соответствующих контрольных работ и задания для самостоятельного выполнения студентами.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Составители:
Т.А. Кочкарёва, доцент, канд. техн. наук,
О.И. Микрюкова, доцент, канд. физ.-мат. наук,
Л.Г. Соколова, ст. преподаватель

Рецензенты:
Т.Л. Панфилова, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики ВоГУ,
Е.Е. Филиппова, канд. физ.-мат. наук, преподаватель кафедры информатики и математики ВИПЭ

Введение

Данное пособие написано для того, чтобы помочь студентам, обучающимся на факультете заочного и дистанционного обучения по направлению «Электроэнергетика и электротехника» и профилю «электрооборудование и электрохозяйство предприятий, организаций и учреждений», в изучении линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, а также в выполнении контрольных работ по высшей математике по соответствующим темам: № 1, №2, №3.

В пособии содержатся три раздела, в каждом из которых имеется необходимый теоретический материал, пример выполнения соответствующей контрольной работы и задания для самостоятельного выполнения в десяти вариантах. Номер варианта определяется по последней цифре зачётной книжки (шифра).

Работу следует выполнять в тонкой ученической тетради в клетку. Выполненную работу следует снабдить титульным листом, образец которого можно найти на доске объявлений у деканата.

Поскольку пособие содержит достаточно большой теоретический материал, полезно сохранить его до конца обучения в вузе, так как он может быть востребован при дальнейшем изучении математики и других дисциплин.

Раздел 1. Контрольная работа по высшей математике №1

1.1. Теоретический материал по линейной алгебре

1.1.1. Комплексные числа и действия с ними

Под комплексным числом в алгебраической форме записи понимается выражение $z = a + bi$, *где* a *и* b *– действительные числа, а* i *– мнимая единица, для которой справедлива формула* $i^2 = -1$.

Числа вида $a + 0i = a$ отождествляются с действительными числами, числа вида $0 + bi = bi$ называются чисто мнимыми. Сопряженным числом $\bar{z}$ к числу $z = a + bi$, называется комплексное число $\bar{z} = a - bi$. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ равны, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел определяются следующим образом.

1) $z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)$;

2) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$;

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \dfrac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}$.

Примечание. Формулу умножения двух комплексных чисел не обязательно запоминать, так как она получается, если формально перемножить двучлены $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ по обычному правилу умножения двучленов и затем заменить i^2 на –1.

Примеры.

1. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1 = -2 + 3i$ и $z_2 = 7 - 8i$.

Находим сумму: $z_1 + z_2 = (-2 + 3i) + (7 - 8i) = (-2 + 7) + (3 - 8)i = 5 - 5i.$

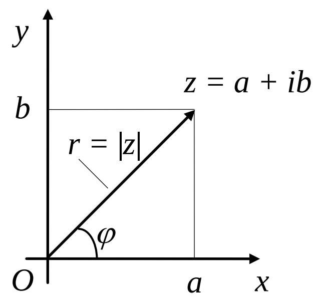
Умножим: $z_1 \cdot z_2 = (-2 + 3i) \cdot (7 - 8i) = -14 + 16i + 21i - 24i^2 = 10 + 37i.$

2. Найти частное комплексных чисел $z_1 = 2 + 5i$ и $z_2 = -1 + 6i.$

Для нахождения частного умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 5i}{-1 + 6i} = \frac{(2 + 5i) \cdot (-1 - 6i)}{(-1 + 6i) \cdot (-1 - 6i)} = \frac{-2 - 12i - 5i - 30i^2}{1 - 36i^2} =$$

$$= \frac{-2 - 17i + 30}{1 + 36} = \frac{28 - 17i}{37} = \frac{28}{37} - \frac{17}{37}i.$$



Комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить точкой на плоскости $x0y$, имеющей координаты (a, b). На оси $0x$ изображаются действительные числа, поэтому она называется *действительной* осью; на оси $0y$ расположены чисто мнимые числа; она называется *мнимой* осью.

Можно также сопоставить числу z вектор, направленный из начала координат в точку z. Длина этого вектора r, т.е. расстояние от начала координат до точки z, называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $r = |z|$:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Из рисунка находим $a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$. Следовательно:

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad z \neq 0.$$

Такая форма записи комплексного числа называется *тригонометрической*. Угол φ, образованный радиус-вектором $0z$ с положительным направлением действительной оси $0x$, называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\arg z$. В инженерных приложениях угол φ также называется фазой. Величина угла $\varphi = \arg z$ определяется с точностью до слагаемого

$2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Главным называется значение $\arg z$, удовлетворяющее условию: $-\pi < \arg z \le \pi$ (или $0 \le \arg z < 2\pi$).

Главное значение аргумента можно вычислить по следующим формулам:

$$\varphi = \begin{cases} arctg(b/a), & a > 0 \\ arctg(b/a) + \pi, & a < 0 \\ \pi/2, & a = 0,\ b > 0 \\ 3\pi/2, & a = 0,\ b < 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}.$$

Пусть φ – любое действительное число. Символом $e^{i\varphi}$ обозначается комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$. С помощью этого обозначения всякое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ может быть записано в показательной форме (формула Эйлера):

$$z = r\mathrm{e}^{i\varphi}.$$

Пример. Представить в тригонометрической и показательной форме комплексное число $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

Находим модуль $r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$. Аргумент находим по формуле:

$$\varphi = arctg\frac{2\sqrt{3}}{-2} + \pi = -arctg\sqrt{3} + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Следовательно $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

1.1.2. Матрицы и действия с ними

Матрица представляет собой прямоугольный массив чисел, образующих строки и столбцы одинаковой длины.

Для краткого обозначения матриц применяются латинские буквы *A, B, C* и т.д. Если в матрице *m* строк и *n* столбцов, то говорят, что матрица имеет размер $m \times n$. В общем виде элементы матрицы принято обозначать латинскими буквами *a, b, c* и т.д. Элемент, стоящий в *i*-й строке (т.е. в строке с номером *i*) и *j*-м столбце (т.е. столбце с номером *j*), обозначается a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} и т.д. Учитывая введенные обозначения, произвольная матрица *A* может быть записана так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кроме больших круглых скобок, массив чисел, образующих матрицу, может быть заключен в большие квадратные скобки или ограничен сдвоенными чертами. Многоточие в записи означает, что за элементом a_{12} следуют элементы a_{13}, a_{14} и т.д. до a_{1n}; за элементом a_{21} следуют элементы a_{31}, a_{41} и т.д. до элемента a_{m1}. Элементами матрицы могут быть любые действительные и комплексные числа.

Если в матрице число строк и столбцов совпадает, т.е. $m = n$, то матрица называется *квадратной*, а число n указывает порядок матрицы.

Направление из левого верхнего в правый нижний угол квадратной матрицы называется *главной диагональю*, а элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ — диагональными элементами. Их сумма $a_{11} + a_{22} + ... a_{nn}$, кратко обозначаемая $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, называется следом матрицы $(Sp\,A)$. Направление, перпендикулярное главной диагонали, называется *побочной* диагональю.

Если в квадратной матрице все элементы, стоящие выше или ниже одной из диагоналей, равны 0, например,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

то такие матрицы называются *треугольными*.

Если равны 0 все элементы, кроме стоящих на главной диагонали, то такая матрица называется *диагональной:*

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если все диагональные элементы равны 1, то такая матрица называется единичной:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, не обязательно квадратная, все элементы которой равны 0, называется *нулевой.*

Матрица, состоящая из одного столбца, называется матрицей-столбцом, матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой.

*Две матрицы называются равными, если они одного размера и все соответствующие элементы совпадают***.**

Под *нормой* матрицы A понимается действительное число $\|A\|$, аналогичное понятию модуля для действительных чисел. Из элементов матрицы А ее норму можно составить различными способами, в дальнейшем за норму будем принимать корень квадратный из суммы квадратов всех элементов матрицы:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} (a_{i\,j})^2}\ .$$

Простейшие действия с матрицами

1) Транспонирование.

Матрица A^T называется транспонированной по отношению к матрице A, если строки одной матрицы являются столбцами другой и наоборот, например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) Сложение (вычитание) матриц.

Чтобы найти сумму или разность двух матриц, нужно сложить или вычесть соответствующие элементы этих матриц, например,

$$A = \begin{pmatrix} 98 & 24 & 42 \\ 39 & 15 & 22 \\ 22 & 15 & 17 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 55 & 19 & 44 \\ 43 & 53 & 38 \\ 11 & 40 & 20 \end{pmatrix},$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 98+55 & 24+19 & 42+44 \\ 39+43 & 15+53 & 22+38 \\ 22+11 & 15+40 & 17+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 153 & 43 & 86 \\ 82 & 68 & 60 \\ 33 & 55 & 37 \end{pmatrix};$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 98-55 & 24-19 & 42-44 \\ 39-43 & 15-53 & 22-38 \\ 22-11 & 15-40 & 17-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 5 & -2 \\ -4 & -38 & -16 \\ 11 & -25 & -3 \end{pmatrix}.$$

Замечание: исходя из определения, складывать или вычитать можно только матрицы одного размера.

3) Умножение на число (скаляр).

Чтобы умножить матрицу на число, нужно все ее элементы умножить на это число, например,

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\quad 5A=5\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10\\15&20\end{pmatrix}.$$

Следствие: общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Умножение матриц

Матрица *C* называется произведением матрицы *A* на матрицу *B*, если ее элементы вычисляются следующим образом:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}.$$

Т.е. элемент матрицы *C*, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы *A* и j-го столбца матрицы *B* (соответствующих — это значит, что первый элемент строки умножаем на первый элемент столбца, второй — на второй и так до последней пары элементов).

Из определения данного действия следует, что умножать можно только такие матрицы, в которых число столбцов матрицы *A* (т.е. число элементов в ее строке) равно числу строк матрицы *B* (т.е. числу элементов в ее столбце). Такие матрицы называются согласованными для умножения. Из определения умножения можно также заключить, что умножение матрицы *A* размера $m\times n$ на матрицу *B* размера $n\times p$ дает матрицу *C* размера $m\times p$.

Заметим, что квадратные матрицы одного порядка всегда согласованы для умножения.

Пример.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&1\\1&2&1\\-1&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\0&-1\end{pmatrix}.$$

$$C=AB=\begin{pmatrix}(1\cdot1+0\cdot0+2\cdot0)&(1\cdot2+0\cdot1+2\cdot(-1))\\(3\cdot1+1\cdot0+1\cdot0)&(3\cdot2+1\cdot1+1\cdot(-1))\\(1\cdot1+2\cdot0+1\cdot0)&(1\cdot2+2\cdot1+1\cdot(-1))\\(-1\cdot1+3\cdot0+2\cdot0)&(-1\cdot2+3\cdot1+2\cdot(-1))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&6\\1&3\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

Для данных матриц обратное умножение *B* на *A* невозможно, т.к. число столбцов в *B* равно 2, а число строк в матрице *A* равно 4. Но даже, если возможны оба произведения, они в общем случае могут не совпадать. Проверим:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&0&2\\6&-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5&4&1\\-3&2&2\\0&6&7\end{pmatrix};$$

$$AB=\begin{pmatrix} (5+6) & (4-4+18) & (1-4+21) \\ 20 & (16+12) & (4+14) \\ (30+3) & (24-2) & (6-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 18 & 18 \\ 20 & 28 & 18 \\ 33 & 22 & 4 \end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix} (5+16+6) & (-10-1) & (15+8) \\ (-3+8+12) & (6-2) & (-9+4) \\ (24+42) & -7 & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 27 & -11 & 23 \\ 17 & 4 & -5 \\ 66 & -7 & 12 \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матриц

1) В общем случае $AB \neq BA$, т.е. в общем случае перестановочное свойство умножения не выполняется.

Матрицы, для которых оно выполняется, называются перестановочными.

2) Сочетательное свойство: $(AB)C = A(BC)$.

3) Распределительное свойство умножения относительно сложения:

$$A(B+C) = AB + AC$$

4) Умножение на единичную матрицу не меняет матрицы: $EA = AE = A$.

5) Умножение на нулевую матрицу дает нулевую матрицу: $0 \cdot A = 0$;

замечание: из того факта, что произведение двух матриц равно 0, не следует обязательно, что либо одна из них, либо обе вместе равны 0.

Матричные уравнения

Используя различные действия с матрицами, можно составлять матричные уравнения — соотношения между неизвестной матрицей X и известными матрицами.

Например, $AX = B$ или $XA = B$, $AXB = C$, $AX + B = C$, $XA - B = C$ и т.д.

Рассмотрим одно из простейших матричных уравнений:

$$AX = B.$$

В школьном курсе алгебры рассматривалось соответствующее ему уравнение для действительных чисел:

$$ax = b.$$

Решением этого линейного уравнения является $x = \frac{b}{a} = b \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b$, где число a^{-1} называется обратным к a и удовлетворяет соотношению: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Введем подобное понятие и для матриц. *Матрица A^{-1} называется обратной к A, если она удовлетворяет условию:*

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E,$$

где E – единичная матрица.

Из определения обратной матрицы следует, что ее можно найти только для квадратных матриц.

Существование обратной матрицы дает возможность решать матричные уравнения, например, рассмотрим уравнение $AX = B$. Умножим обе части уравнения слева на матрицу, обратную A:

$$A^{-1} \cdot AX = EX = X = A^{-1} \cdot B.$$

Аналогично можно найти решение уравнения $XA = B$, умножая теперь уже справа обе части уравнения на A^{-1}:

$$XA \cdot A^{-1} = XE = X = B \cdot A^{-1}.$$

Нахождение обратной матрицы по общей формуле

а) Возьмем матрицу второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Обозначим обратную к ней: $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Согласно определению обратной матрицы должно выполняться условие: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Выполнив умножение в левой части и приравнивая соответствующие элементы матриц в левой и правой части, получим две системы для нахождения неизвестных элементов обратной матрицы:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1. \end{cases}$$

Найдем решения указанных систем:

$$x_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; \qquad x_{12} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};$$

$$x_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; \qquad x_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Назовем выражение, стоящее в знаменателях формул и составленное из элементов матрицы второго порядка, *определителем второго порядка*. Определитель кратко обозначается Δ, ΔA, $\det A$. Последнее обозначение идет от латинского слова детерминант – определитель. В развернутом виде определитель второго порядка записывают так: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Чтобы вычислить определитель второго порядка, нужно из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Пример. $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) = 20 + 6 = 26.$

Если в определителе вычеркнуть строку с номером i и столбец с номером j, то оставшаяся часть определителя называется минором M_{ij}. Взятый с определенным знаком минор имеет название алгебраического дополнения: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Из этого определения следует, что, если сумма номеров вычеркнутых строки и столбца – четное число, то алгебраическое дополнение совпадает с минором. Если же эта сумма – число нечетное, то алгебраическое дополнение противоположно минору по знаку.

Используя введенные обозначения и вынося за знак матрицы общий множитель всех элементов, формулу обратной матрицы второго порядка можем записать в следующем виде:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

б) Рассмотрим матрицу третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Обозначим обратную к ней $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$. Согласно определению:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действуя аналогично пункту а), получим 3 системы для нахождения 9 неизвестных элементов обратной матрицы:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} = 1, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} = 0, \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} = 0, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} = 1, \\ a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{13} + a_{12}x_{23} + a_{13}x_{33} = 0, \\ a_{21}x_{13} + a_{22}x_{23} + a_{23}x_{33} = 0, \\ a_{31}x_{13} + a_{32}x_{23} + a_{33}x_{33} = 1. \end{cases}$$

Решая составленные системы и используя введенные обозначения, получим формулу обратной матрицы третьего порядка:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

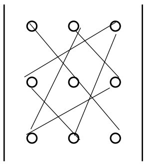
где ΔA - определитель матрицы третьего порядка, записываемый в развёрнутом виде следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

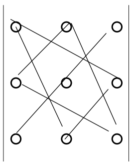
Определитель третьего порядка вычисляется по формуле:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Если формулу для вычисления определителей второго порядка запомнить легко, этого нельзя сказать про формулу для вычисления определителей третьего порядка. Для ее запоминания имеются специальные правила, одно из них – “правило треугольников”.



Произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, входят в определитель с тем знаком, который получится при умножении.



Произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали, входят в определитель с обратным знаком.

На рисунках элементы определителя обозначены точками.

Пример. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}.$$

Обозначим значение определителя Δ и найдем его, используя правило треугольников.

$$\Delta = 4\cdot(-2)\cdot(-5) + (-3)\cdot 8\cdot 1 + 3\cdot(-7)\cdot 5 - 1\cdot(-2)\cdot 5 - 3\cdot(-3)\cdot(-5) - 8\cdot(-7)\cdot 4 =$$
$$= 40 - 24 - 105 + 10 - 45 + 224 = 274 - 174 = 100.$$

Сравнение двух выведенных формул позволяет, пользуясь индуктивным подходом, написать формулу обратной матрицы для квадратной матрицы произвольного порядка n:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Из полученной формулы следует, что обратную матрицу можно найти только для невырожденных матриц, т.е. таких, у которых определитель не равен 0.

Для того чтобы составить обратную матрицу, необходимо:

1) вычислить определитель матрицы;

2) если определитель отличен от 0, то найти алгебраические дополнения всех элементов;

3) поставив алгебраические дополнения на место элементов, составить матрицу и транспонировать ее;

4) разделить элементы транспонированной матрицы из алгебраических дополнений на величину определителя (если элементы матрицы не делятся нацело на определитель, то деление записывают в виде множителя $\frac{1}{\Delta}$ перед матрицей).

Пример. Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Вычислим определитель $\Delta = 1-8+8-4-4+4=-3 \neq 0$.

2) Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

3) Составим матрицу из алгебраических дополнений $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

и транспонируем ее:

$$\tilde{A}^T=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

4) Выпишем обратную матрицу:

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Для проверки найдем произведение $A^{-1}\cdot A$:

$$-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} (5+4-12) & (10+2-12) & (10-4-6) \\ (-6-6+12) & (-12-3+12) & (-12+6+6) \\ (2+4-6) & (4+2-6) & (4-4-3) \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1.3. Решение квадратных неоднородных систем линейных алгебраических уравнений

Решение систем линейных уравнений – одно из самых распространенных математических упражнений. К составлению таких систем приводят многочисленные задачи на нахождение нескольких неизвестных величин, в чем мы будем иметь возможность убедиться во время последующего обучения. Рассмотрим основные термины, относящиеся к данной теме.

Уравнение называется линейным, если оно содержит неизвестные величины в первой степени и не содержит произведений переменных.

Например, линейными будут следующие уравнения:

$$2x+3y-z=0; \qquad 4x_1-2x_2+x_3=5.$$

Для обозначения неизвестных величин в математике обычно используют символы x, y, z, t (как в первом примере), а также $x_1,\ x_2,\ x_3,\dots,x_n,\dots$ (как во втором примере). В конкретных задачах для неизвестных могут быть использованы другие обозначения.

Постоянные величины, стоящие множителями при переменных, называют *коэффициентами при неизвестных*, а постоянные в правой части уравнений – *свободными членами уравнений.*

Набор из нескольких линейных уравнений для одних и тех же неизвестных называется системой линейных уравнений.

Например:

$$\begin{cases} x-y+z=2, \\ 6x+y-2z=0, \\ -x+2y+3z=9. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4=0, \\ -x_1+x_2-x_3-2x_4=0. \end{cases}$$

Систему, состоящую из m уравнений для n неизвестных, называют системой размера $m\times n$. Если в системе число неизвестных и уравнений совпадает, то она называется квадратной, если не совпадает – прямоугольной. Число уравнений в квадратной системе называется порядком системы.

Если в системе хотя бы один из свободных членов отличен от нуля, она называется *неоднородной*, если все свободные члены уравнений равны нулю, она называется *однородной*.

Решением системы линейных уравнений называется процесс получения тех значений переменных, которые обращают все уравнения системы в тождества. Сам такой набор значений также называется решением системы.

Если система имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*, если ни одного – то *несовместной*. Если решение единственно, то система называется *определенной*, если решений больше одного – то *неопределенной*.

Рассмотрим различные способы решения квадратных неоднородных систем линейных уравнений.

Метод Гаусса

Этот метод является продолжением и обобщением рассматриваемых в школе методов подстановки и сложения.

Запишем систему так, чтобы в первом уравнении при первом неизвестном коэффициент был равен 1. Если в системе есть подходящее уравнение, его можно переставить на первое место, если такого уравнения нет, то обе части первого уравнения можно разделить на коэффициент при первом неизвестном (полагая, конечно, что он отличен от 0). Умножая последовательно первое уравнение на числа, противоположные коэффициентам при первом неизвестном в остальных уравнениях, прибавляем его ко второму, третьему и т.д. уравнениям системы.

После этого во всех уравнениях системы, кроме первого, первое неизвестное будет исключено, т.е. эти уравнения будут содержать на одно неизвестное меньше, да и самих уравнений будет на одно меньше (первое не рассматриваем). Значит, эти уравнения образуют систему уравнений на порядок меньше, чем в исходной. С этой системой можно провести такие же преобразования, как на первом этапе и т.д. до тех пор, пока в одном уравнении не останется одно неизвестное. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y+z=13, \\ x+4y-3z=-15, \\ 2x-3y+4z=22. \end{cases}$$

Поменяем местами первое и второе уравнения системы:

$$\begin{cases} x+4y-3z=-15, \\ 3x-2y+z=13, \\ 2x-3y+4z=22. \end{cases}$$

Выполним такие преобразования: ко второму уравнению системы прибавим первое, умноженное на (-3), к третьему – первое, умноженное на (-2). После выполнения указанных действий система примет вид:

$$\begin{cases} x+4y-3z=-15, \\ -14y+10z=58, \\ -11y+10z=52. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на (-1), прибавим его к третьему, тогда:

$$\begin{cases} x+4y-3z=-15, \\ -14y+10z=58, \\ 3y=-6. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $y=-2$, из второго $z=\dfrac{58+14y}{10}=\dfrac{30}{10}=3$; из первого $x=-15-4y+3z=-15+8+9=2$. Подстановкой найденных значений во все уравнения исходной системы убеждаемся, что они являются ее решением.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6, \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на (-3) и прибавляя ко второму, затем на (-2) и прибавляя к третьему, затем на (-3) и прибавляя к четвертому, преобразуем систему.

$$\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6, \\ -4x_2+12x_3+8x_4=-16, \\ x_2+21x_3+10x_4=-6, \\ -x_2+21x_3+20x_4=-25. \end{cases}$$

Предварительно разделив обе части второго уравнения на (-4), прибавим его к четвертому уравнению, умножив на (-1), прибавим к третьему, тогда:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_2 + 21x_3 + 10x_4 = -6, \\ -x_2 + 21x_3 + 20x_4 = -25. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 24x_3 + 12x_4 = -10, \\ 18x_3 + 18x_4 = -21. \end{cases}$$

Разделим обе части третьего уравнения на 12, а четвертого - на 3, затем третье уравнение, умноженное на (-3), прибавим к четвертому, получим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_3 + x_4 = -5/6, \\ 6x_3 + 6x_4 = -7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_3 + x_4 = -5/6, \\ 3x_4 = -9/2. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_4 = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5;$ из третьего $x_3 = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{5}{6} + \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{3};$ из второго $x_2 = 4 + 3\cdot\dfrac{1}{3} + 2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 2;$ из первого $x_1 = 6 - 2 + 6\cdot\dfrac{1}{3} + 4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 0$. Подставляем найденные значения во все уравнения системы и убеждаемся, что решение верно.

Решение систем линейных уравнений по методу Гаусса особенно удобно, когда коэффициенты при неизвестных целые числа, в тех случаях, когда коэффициенты произвольны или даны в общем виде, решение системы (особенно вручную) по методу Гаусса может представлять непростую задачу. Попробуем найти еще один способ решения систем линейных уравнений.

Решение систем с помощью обратной матрицы (матричный способ)

Способ основан на том, что любую систему линейных уравнений можно записать в матричном виде: $AX = B$, где A – матрица из коэффициентов при неизвестных, X – матрица-столбец из самих неизвестных, B – матрица-столбец из свободных членов уравнений.

Рассмотрим для примера систему $\begin{cases} 3x + y = 13, \\ 5x - 2y = 18. \end{cases}$. Введем матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \end{pmatrix}$. С помощью этих матриц систему можно записать так: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \end{pmatrix}$. Выполнив действие в левой части равенства и используя условие равенства матриц, придем снова к исходной системе.

В матричном виде можно представить и прямоугольные системы, например, систему $\begin{cases} 2x-3y+5z=0, \\ 6x+4y-7z=0. \end{cases}$ можно записать так: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Итак, всякую систему можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$. Если матрица A в этом уравнении квадратная, то его можно решить по соответствующей формуле: $X = A^{-1} \cdot B$.

Пример. Систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x-2y+z=15, \\ 4x-3y+5z=32, \\ 2x+5y-3z=-20. \end{cases}$ решить с помощью обратной матрицы.

Выпишем матрицу коэффициентов системы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ и найдем для неё обратную по общей формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{66} \begin{pmatrix} 16 & 1 & 7 \\ -22 & 11 & 11 \\ -26 & 19 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X = \frac{1}{66} \begin{pmatrix} 16 & 1 & 7 \\ -22 & 11 & 11 \\ -26 & 19 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \\ -20 \end{pmatrix} = \frac{1}{66} \begin{pmatrix} 240+32-140 \\ -330+352-220 \\ -390+608-20 \end{pmatrix} = \frac{1}{66} \begin{pmatrix} 132 \\ -198 \\ 198 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x = 2,\ y = -3,\ z = 3$. Подстановкой найденных значений во все уравнения системы убеждаемся, что оно верное.

Решение систем по формулам Крамера

Для квадратной неоднородной системы с любым числом уравнений n неизвестную величину с номером i можно найти по формуле:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}; \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n;$$

где Δ – главный определитель системы;

Δ_i – вспомогательный определитель, полученный из главного заменой коэффициентов при неизвестном x_i на столбец свободных членов.

Анализ полученной формулы и применение ее на практике для решения систем позволяет сделать следующие выводы:

1) если главный определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение;

2) если $\Delta = 0$, а хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_i \neq 0$, то система не имеет решения;

3) если и главный и все вспомогательные определители равны 0, то система или не имеет решения, или имеет бесконечное множество решений.

Формулы Крамера являются особенно удобными, когда коэффициенты системы не являются целыми числами.

Пример. Систему линейных уравнений $\begin{cases} 0{,}11x - 0{,}17y = 0{,}05; \\ -0{,}34x + 2{,}25y = 1{,}57. \end{cases}$ решить по формулам Крамера.

Вычислим необходимые определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0{,}11 & -0{,}17 \\ -0{,}34 & 2{,}25 \end{vmatrix} = 0{,}1897;\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 0{,}05 & -0{,}17 \\ 1{,}57 & 2{,}25 \end{vmatrix} = 0{,}3794;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 0{,}11 & 0{,}05 \\ -0{,}34 & 1{,}57 \end{vmatrix} = 0{,}1897.$$

Тогда $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{0{,}3794}{0{,}1897} = 2;\quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{0{,}1897}{0{,}1897} = 1$.

Примечание: формула и пример вычисления определителя второго порядка приведены на стр. 10.

1.2. Пример решения контрольной работы №1

Задание 1

Вычислить значение функции $f(z_0)$, если

$$f(z) = \frac{(2+3i)z + (3+11i)}{(-1+i)z^2 + (-3-i)},\quad z_0 = -1 + 3i\sqrt{2}.$$

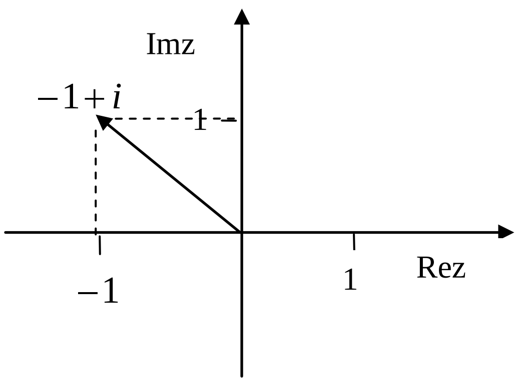
Изобразить результат на комплексной плоскости и представить его в тригонометрической форме.

Решение

Подставим значение z_0 в данную функцию. Выполним действия в числителе и знаменателе полученной функции, предварительно вычислив

$$(-1+3i)^2 = (-1)^2 + 2\cdot(-1)\cdot(3i) + (3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i.$$

Получим $\quad f(z_0) = \dfrac{(2+3i)(-1+3i) + (3+11i)}{(-1+i)(-8-6i) + (-3-i)} = \dfrac{-8+14i}{11-3i}$.



Чтобы выполнить деление комплексных чисел, помножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю, то есть на (11+3*i*), получим

$$f(z_0) = \frac{(-8+14i)(11+3i)}{(11-3i)(11+3i)} = \frac{-130+130i}{130} = -1+i$$

.

Назовем число $f(z_0) = w,\ w = -1 + i$.

Изобразим его на комплексной плоскости:

Тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид:

$$w = |w|(\cos(\arg w) + i\sin(\arg w)),$$

где $|w|$ – модуль комплексного числа и $\arg w$ – главное значение аргумента комплексного числа, его можно найти, как рассказано в пункте 1.1.1.

Для полученного комплексного числа $w = -1 + i$,, $|w| = \sqrt{2}$, $\arg w = arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$. Тогда число w в тригонометрической форме для нашего примера будет иметь вид: $w = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$.

Ответ: $f(z_0) = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$.

Задание 2

Найти $f(A_0)$, если $f(A) = A^3 - 4A^2 - 5A$, $\quad A_0 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение

Запишем $f(A) = A(A^2 - 4A - 5E)$, где E – единичная матрица. Найдем $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 8 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, определим выражение в скобке:

$$A^2 - 4A - 5E = \begin{pmatrix} 21 - 4\cdot 5 - 5\cdot 1 & 8 - 4\cdot 2 - 5\cdot 0 \\ -8 - 4\cdot(-2) - 5\cdot 0 & -3 - 4\cdot(-1) - 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Окончательно: $f(A_0) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Задание 3

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1, \\ x + 3y - 4z = -11, \\ 3x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Для данной системы формулы Крамера имеют вид:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Вычислим необходимые определители, используя правило треугольников (см. стр. 11, 12):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 35, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -11 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -70,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -11 & -4 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 35, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -11 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 105.$$

Тогда: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{-70}{35} = -2, \quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{35}{35} = 1, \quad z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{105}{35} = 3$

Подстановкой в систему убеждаемся, что решение верное.

Ответ: $x = -2, \quad y = 1, \quad z = 3$.

Задание 4

Пример решения этого задания приведён на страницах 15, 16.

1.3. Задания контрольной работы №1

Вариант 1

Задание 1

Вычислить значение функции $f(z_0)$, если

$f(z) = \dfrac{(3-i)z + (5+5i)}{(1-i)z^2 + (6+2i)}, \quad z_0 = 2 - i$.

Изобразить результат на комплексной плоскости и представить его в тригонометрической форме.

Задание 2

Найти $f(A_0)$, если $f(A) = A^3 + 6A^2 + 8A, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Задание 3

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 5; \\ 3x + 4y - 5z = 12; \\ 2y + 7z = 16. \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Задание 4

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

методом Гаусса.

Вариант 2

Задание 1

Вычислить значение функции $f(z_0)$, если

$$f(z) = \frac{(-3+2i)z + (-11+3i)\sqrt{3}}{-2z^2 + (-13-i)}, \quad z_0 = -1+3i.$$

Изобразить результат на комплексной плоскости и представить его в тригонометрической форме.

Задание 2

Найти $f(A_0)$, если $f(A) = A^3 - 6A^2 + 8A$, $A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 3

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5; \\ 3x + 4y - z = 3; \\ 4x + 5y - 2z = 3. \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Задание 4

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

методом Гаусса.

Вариант 3

Задание 1

Вычислить значение функции $f(z_0)$, если

$$f(z) = \frac{(-2+3i)z + (8+i)\sqrt{3}}{2z^2 + (2+9i)}, \quad z_0 = 2-i.$$

Изобразить результат на комплексной плоскости и представить его в тригонометрической форме.

Задание 2

Найти $f(A_0)$, если $f(A) = A^3 - 2A^2 - 8A$, $A_0 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание 3

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x+2y+z=4; \\ 3x-5y+3z=1; \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Задание 4

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20; \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11; \\ 2x_1+10x_2+9x_3+9x_4=40; \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37. \end{cases}$$

методом Гаусса.

Вариант 4

Задание 1

Вычислить значение функции $f(z_0)$, если

$f(z)=\dfrac{(-1-2i)z+(-1+8i)}{(1-i)z^2+(9+6i)}$, $z_0=2-3i$.

Изобразить результат на комплексной плоскости и представить его в тригонометрической форме.

Задание 2

Найти $f(A_0)$, если $f(A)=A^3+2A^2-8A$, $A_0=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание 3

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x+y-5z=-7; \\ 2x-3y+4z=-1; \\ 5x-y+3z=0. \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Задание 4

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=-3; \\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4=-6; \\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4=-8; \\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4=-8. \end{cases}$$

методом Гаусса.

Вариант 5

Задание 1

Вычислить значение функции $f(z_0)$, если

$$f(z)=\frac{(3-i)z+(11+3i)\sqrt{3}}{2z^2+(13+13i)},\quad z_0=2-3i.$$

Изобразить результат на комплексной плоскости и представить его в тригонометрической форме.

Задание 2

Найти $f(A_0)$, если $f(A)=A^3+3A^2+2A,\quad A_0=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

Задание 3

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=2;\\ 2x-y-6z=-1;\\ 3x-2y=8.\end{cases}$$

по формулам Крамера.

Задание 4

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 7x_1+9x_2+4x_3+2x_4=2;\\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4=6;\\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4=3;\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0.\end{cases}$$

методом Гаусса.

Вариант 6

Задание 1

Вычислить значение функции $f(z_0)$, если

$$f(z)=\frac{(-3+2i)z+(-11+3i)\sqrt{3}}{-3z^2+(-13-21i)},\quad z_0=-1+3i.$$

Изобразить результат на комплексной плоскости и представить его в тригонометрической форме.

Задание 2

Найти $f(A_0)$, если $f(A)=A^3-A^2-2A,\quad A_0=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

Задание 3

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 5; \\ -2x + y + z = 0; \\ 2x - y + 4z = 15. \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Задание 4

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -4; \\ 9x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 13; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1; \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_4 = 11. \end{cases}$$

методом Гаусса.

Вариант 7

Задание 1

Вычислить значение функции $f(z_0)$, если

$f(z) = \dfrac{(-1+2i)z + (8-i)}{(-1+i)z^2 + (-6-9i)}$, $z_0 = -3+2i$.

Изобразить результат на комплексной плоскости и представить его в тригонометрической форме.

Задание 2

Найти $f(A_0)$, если $f(A) = A^3 + A^2 - 2A$, $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Задание 3

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 11x + 3y - z = -9; \\ 2x + 5y - 5z = -2; \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Задание 4

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -1; \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 = -32; \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -8. \end{cases}$$

методом Гаусса.

Вариант 8

Задание 1

Вычислить значение функции $f(z_0)$, если

$$f(z)=\frac{(4-3i)z+(-15+5i)\sqrt{3}}{3z^2+(19+3i)},\quad z_0=-1+3i.$$

Изобразить результат на комплексной плоскости и представить его в тригонометрической форме.

Задание 2

Найти $f(A_0)$, если $f(A)=A^3-3A^2+2A,\quad A_0=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$

Задание 3

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}2x+y+4z=20;\\ 2x-y-3z=3;\\ 3x+4y-5z=-8.\end{cases}$$

по формулам Крамера.

Задание 4

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}2x_1+x_2+4x_3+8x_4=-1;\\ x_1+3x_2-6x_3+2x_4=3;\\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4=8;\\ 2x_1-x_2+2x_3=4.\end{cases}$$

методом Гаусса.

Вариант 9

Задание 1

Вычислить значение функции $f(z_0)$, если

$$f(z)=\frac{(-3+i)z+(-7-i)\sqrt{3}}{3z^2+(2+11i)},\quad z_0=1-2i.$$

Изобразить результат на комплексной плоскости и представить его в тригонометрической форме.

Задание 2

Найти $f(A_0)$, если $f(A)=A^3+4A^2+3A,\quad A_0=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$

Задание 3

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -9; \\ x + 2y + z = 3; \\ 3x + y - z = -1. \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Задание 4

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$$

методом Гаусса.

Вариант 10

Задание 1

Вычислить значение функции $f(z_0)$, если

$$f(z) = \frac{(-1+3i)z + (7-i)\sqrt{3}}{-2z^2 + (-1-7i)}, \quad z_0 = -2 + i\,.$$

Изобразить результат на комплексной плоскости и представить его в тригонометрической форме.

Задание 2

Найти $f(A_0)$, если $f(A) = A^3 + 2A^2 - 3A,\ \ A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 3

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x + 5y + z = -7; \\ 2x - y - z = 0; \\ x - 2y - z = 2. \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Задание 4

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7. \end{cases}$$

методом Гаусса.

Раздел 2. Контрольная работа по высшей математике №2

2.1. Теоретический материал по векторной алгебре

2.1.1. Векторы и действия с ними

Понятие вектора и линейные операции над векторами

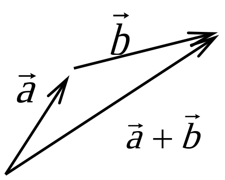
Геометрическим вектором или просто вектором будем называть направленный отрезок.

Мы будем обозначать вектор либо символом $\overline{AB}$, где буквы А и В обозначают соответственно начало и конец данного вектора, либо строчными латинскими буквами со стрелочками наверху, например, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Для обозначения длины вектора будем пользоваться символом модуля (или абсолютной величины). Так, $\left|\overline{AB}\right|$ и $|\vec{a}|$ обозначают длины векторов $\overline{AB}$ и $\vec{a}$ соответственно.

Вектор называется *нулевым*, если начало и конец его совпадают.

Векторы называются *коллинеарными*, если они находятся либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Векторы называются *компланарными*, если они находятся в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление (точки приложения векторов могут не совпадать).

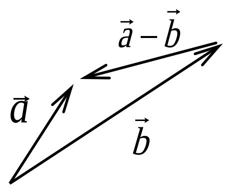


Вектором, *противоположным* вектору $\vec{a}$, называется вектор, коллинеарный ему, имеющий одинаковую с ним длину и противоположное направление.

Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$. Это правило нахождения суммы векторов называется “правилом треугольника”.

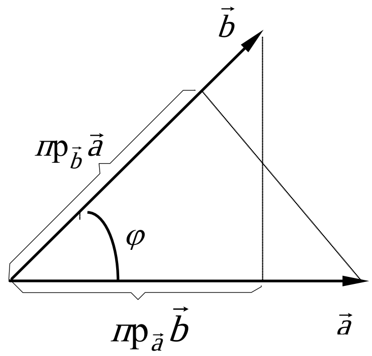
В случае, когда нужно найти сумму нескольких векторов $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n$ пользуются правилом “замыкания ломаной”: если начало вектора $\vec{a}_2$ приложить к концу вектора $\vec{a}_1$, а начало вектора $\vec{a}_3$ приложить к концу вектора $\vec{a}_2$ и т.д., то сумма будет представлять собой вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}_1$ в конец вектора $\vec{a}_n$.

Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется вектор, который в сумме с $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$. Чтобы найти разность векторов $\vec{a}-\vec{b}$, нужно привести вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу и провести вектор из конца вектора $\vec{b}$ в конец уменьшаемого вектора $\vec{a}$.



Довольно часто для нахождения суммы и разности векторов пользуются правилом параллелограмма: если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ привести к общему началу и достроить до параллелограмма, то диагональ, идущая из общего начала, будет представлять сумму векторов, а другая диагональ будет представлять разность векторов.

Произведением $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на вещественное число α, не равное 0, называется вектор, коллинеарный $\vec{a}$, имеющий длину $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$ и направление, совпадающее с $\vec{a}$, если $\alpha>0$ и противоположное вектору $\vec{a}$, если $\alpha<0$.



Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *(обозначается* $\vec{a}\cdot\vec{b}$*) называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними:*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Можно дать и другое определение. Т.к. произведение $|\vec{a}|\cos\varphi$ представляет собой проекцию вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ (обозначается $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$), а произведение $|\vec{b}|\cos\varphi$ является проекцией $\vec{b}$ на направление $\vec{a}$ (обозначается $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$), тогда:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}.$$

Скалярным произведением двух векторов называется произведение длины одного вектора и проекции другого вектора на направление первого.

Из первого определения скалярного произведения следует формула для нахождения угла между векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Свойства скалярного произведения

1) Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно 0 (т.к. $\cos\frac{\pi}{2}=0$) и наоборот, если скалярное произведение двух векторов равно 0, то они перпендикулярны или, как часто говорят, ортогональны.

2) Скалярное произведение векторов > 0, если они образуют острый угол ($\varphi<\frac{\pi}{2}$), скалярное произведение < 0, если они образуют тупой угол ($\varphi>\frac{\pi}{2}$).

3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

4) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$; $\quad \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

5) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

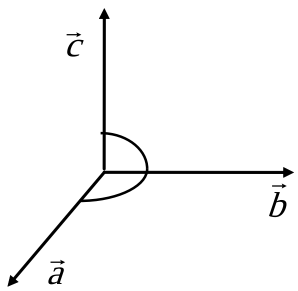
6) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ или $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ или $\vec{a}\times\vec{b}$ и удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$;

2) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ ортогонален (перпендикулярен) и $\vec{a}$, и $\vec{b}$;



3) Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ образуют правую тройку, т.е. кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ и затем к вектору $\vec{c}$ совершается против часовой стрелки.

Свойства векторного произведения

1) $\left[\alpha\,\vec{a},\vec{b}\right]=\alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right]$;

2) $\left[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]$;

3) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$;

4) $\left[\vec{a},\vec{a}\right]=\vec{0}$ *т.к.* $\sin\varphi=0$.

5) Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма или удвоенной площади треугольника, построенного на векторах, входящих в векторное произведение.

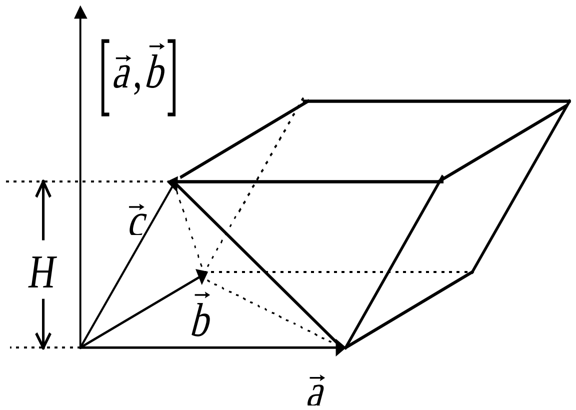
Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\vec{a},\vec{b}$ *и* $\vec{c}$*, обозначаемым* $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$*, называется скалярное произведение векторного произведения векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *на вектор* $\vec{c}$*:*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}.$$

Учитывая данные ранее определения скалярного и векторного произведений, можно выписать и более подробную формулу для вычисления смешанного произведения векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}) == \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\widehat{\vec{a},\vec{b}}\cdot\left|\vec{c}\right|\cos(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}).$$



Если вектора $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ привести к общему началу и построить на них параллелепипед (вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадают со сторонами основания, а вектор $\vec{c}$ с боковым ребром) или пирамиду, то модуль смешанного произведения векторов будет равен объему параллелепипеда $V_{\text{пар}}$ или шести объемам пирамиды $V_{\text{пир}}$:

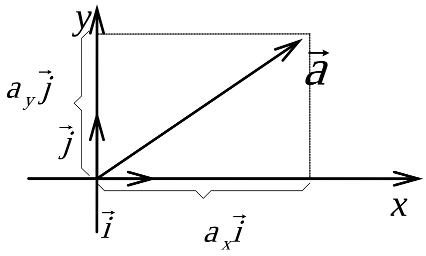
$$V_{\text{пар}} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| \text{ или } V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Напомним, что $V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}}\cdot H$, где $S_{\text{осн}} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a},\vec{b})$, высота H определяется как проекция бокового ребра $\vec{c}$ на направление нормали к основанию, т.к. векторное произведение $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ совпадает с направлением нормали, то $H = \left|\vec{c}\right|\cos\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$.

Если вектора $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ лежат в одной плоскости (компланарны), то ясно, что на них нельзя построить ни пирамиду, ни параллелепипед, поэтому смешанное произведение компланарных векторов равно нулю.

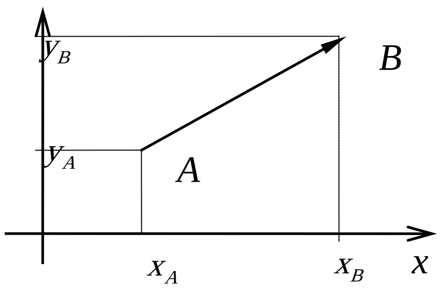
2.1.2. Координатная форма представления векторов

Изображение вектора направленным отрезком довольно наглядно, но неудобно, т.к. для записи информации о длине вектора, его направлении и точке приложения необходимо хранить и передавать рисунок с изображением вектора. Координатная форма представления векторов позволяет записывать информацию о векторе в удобном виде.



Для того, чтобы представить вектор на плоскости (двумерный вектор) по двум взаимно перпендикулярным осям (OX и OY) откладывают базисные вектора единичной длины $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Тогда любой вектор $\vec{a}$ можно представить в виде суммы некоторого числа (a_x) векторов $\vec{i}$ и некоторого числа (a_y) векторов $\vec{j}$: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$.

Кратко такая сумма записывается так: $\vec{a} = \left\{a_x, a_y\right\}$. Числа a_x и a_y равны проекциям вектора $\vec{a}$ на соответствующие оси и называются координатами вектора.

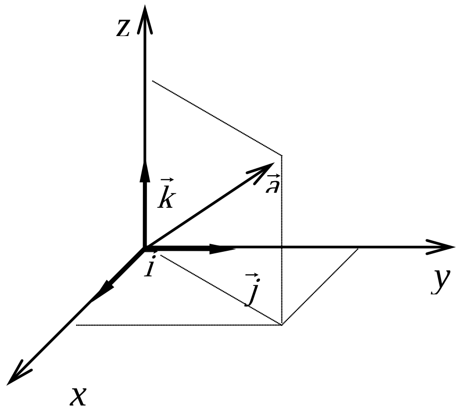


Следует отметить, что одни и те же координаты могут иметь векторы, приложенные к разным точкам. Чтобы устранить эту неопределенность, можно указывать координаты начала $A(x_A, y_A)$ и конца $B(x_B, y_B)$ вектора. Нетрудно видеть, что координаты вектора $\vec{a}$ можно найти через координаты начала и конца по следующему правилу:

$$a_x = x_B - x_A; \quad a_y = y_B - y_A.$$

Вспомнив теорему Пифагора, можно найти и длину вектора:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



Чтобы представить вектор в пространстве (трехмерный вектор) по трем взаимно перпендикулярным осям (OX, OY и OZ) откладываются базисные вектора единичной длины $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Тогда любой вектор $\vec{a}$ можно представить в виде суммы некоторого числа (a_x) векторов $\vec{i}$, некоторого числа (a_y) векторов $\vec{j}$ и некоторого числа (a_z) векторов $\vec{k}$: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

Краткая запись: $\vec{a} = \left\{a_x, a_y, a_z\right\}$. Числа a_x, a_y, a_z равны проекциям $\vec{a}$ на координатные оси OX, OY и OZ и называются координатами вектора $\vec{a}$. Чтобы уточнить положение вектора, можно так же, как и на плоскости указать координаты начала А и конца В вектора $\vec{a}$: $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$. Связь между координатами вектора и координатами начала и конца:

$$a_x = x_B - x_A;\quad a_y = y_B - y_A;\ a_z = z_B - z_A.$$

Длина трехмерного вектора вычисляется по формулам:

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\ .$$

Выполнение действий с векторами через их координаты

В координатной форме записи удобно выполнять любые действия с векторами.

Чтобы **умножить вектор на число**, нужно все его координаты умножить на это число:

$$\alpha\,\vec{a} = \left\{\alpha\, a_x, \alpha\, a_y, \alpha\, a_z\right\}.$$

Чтобы найти **сумму или разность** векторов, нужно сложить или вычесть соответствующие координаты.

$$\vec{a} = \left\{a_x, a_y, a_z\right\};\ \ \vec{b} = \left\{b_x, b_y, b_z\right\};$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \left\{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\right\};\quad \vec{a} - \vec{b} = \left\{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\right\}.$$

Используя свойства скалярного произведения, а также тот факт, что базисные вектора взаимно ортогональны, можно получить формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами:

$$\vec{a} = \left\{a_x, a_y, a_z\right\};\ \ \vec{b} = \left\{b_x, b_y, b_z\right\};$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат.

Формула для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Учитывая свойства векторного произведения и взаимную перпендикулярность базисных векторов, можно получить способ определения координат векторного произведения через координаты входящих в него векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\vec{a} = \left\{a_x, a_y, a_z\right\};\qquad \vec{b} = \left\{b_x, b_y, b_z\right\};$$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (a_y b_z - b_y a_z)\vec{i} + (a_x b_z - b_x a_z)\,\vec{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\vec{k}\,.$$

Формулы для вычисления координат векторного произведения легче запоминаются, если представить его в виде определителя, составленного из *базисных векторов и координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, разложенного по элементам первой строки:*

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение легко вычисляется, если вектора $\vec{a}, \vec{b}\, и\, \vec{c}$ заданы своими координатами:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение равно определителю, составленному из координат векторов, входящих в смешанное произведение.

2.2. Пример решения контрольной работы №2

Задание 1

Дано: $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = \sqrt{3},\ \angle\vec{a},\vec{b} = \pi/6$. Для векторов $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{d} = -2\vec{a} + \vec{b}$ найти скалярное произведение и модуль векторного произведения.

Решение

Используя свойства и определение скалярного произведения, найдём:

$$\vec{c}\cdot\vec{d} = \left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right)\cdot\left(-2\vec{a} + \vec{b}\right) = 3\vec{a}\cdot(-2\vec{a}) + 3\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot(-2\vec{a}) + 2\vec{b}\cdot\vec{b} =$$

$$= -6\vec{a}\cdot\vec{a} + 3\vec{a}\cdot\vec{b} - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{b} = -6\vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{b} =$$

$$= -6|\vec{a}|^2 - |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\pi/6 + 2|\vec{b}|^2 = -6\cdot 9 - 3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/2 + 2\cdot 3 = -52{,}5.$$

Используя свойства векторного произведения векторов и определение его модуля, найдём:

$$|\vec{c}\times\vec{d}| = |(3\vec{a} + 2\vec{b})\times(-2\vec{a} + \vec{b})| = |3\vec{a}\times(-2\vec{a}) + 3\vec{a}\times\vec{b} + 2\vec{b}\times(-2\vec{a}) + 2\vec{b}\times\vec{b}| =$$

$$= |-6\vec{a}\times\vec{a} + 3\vec{a}\times\vec{b} - 4\vec{b}\times a + 2\vec{b}\times\vec{b}| = |3\vec{a}\times\vec{b} + 4\vec{a}\times\vec{b}| = |7\vec{a}\times\vec{b}| =$$

$$= 7|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\angle\vec{a},\vec{b}) = 7\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot 0{,}5 = 10{,}5\sqrt{3}.$$

Задание 2

Дан тетраэдр с вершинами в точках

$A_1(1;-1;2),\ A_2(2;1;2),\ A_3(1;1;4),\ A_4(6;-3;8)$.

Найти: 1) внутренние углы в основании $A_1A_2A_3$ (с точностью до десятых долей градуса), сделать проверку;

2) объём пирамиды, площадь основания $A_1A_2A_3$ и длину высоты, проведённой из вершины A_4.

Решение

1) Внутренние углы в основании $A_1A_2A_3$ можно найти как углы между векторами, выходящими из соответствующих вершин:

$$\cos\angle A_1 = \frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overline{A_1A_3}\right|}, \quad \cos\angle A_2 = \frac{\overline{A_2A_1}\cdot\overline{A_2A_3}}{\left|\overline{A_2A_1}\right|\cdot\left|\overline{A_2A_3}\right|}, \quad \cos\angle A_3 = \frac{\overline{A_3A_1}\cdot\overline{A_3A_2}}{\left|\overline{A_3A_1}\right|\cdot\left|\overline{A_3A_2}\right|}.$$

Как изложено в теоретическом материале, координаты вектора равны разности координат конца и начала вектора, его длина равна корню квадратному из суммы квадратов его координат. Тогда:

$$\overline{A_1A_2} = \{1;2;0\},\quad \left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{5};\quad \overline{A_1A_3} = \{0;2;2\},\quad \left|\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{8};$$

$$\overline{A_2A_1} = \{-1;-2;0\},\quad \left|\overline{A_2A_1}\right| = \sqrt{5};\quad \overline{A_2A_3} = \{-1;0;2\},\quad \left|\overline{A_2A_3}\right| = \sqrt{5};$$

$$\overline{A_3A_1} = \{0;-2;-2\},\quad \left|\overline{A_3A_1}\right| = \sqrt{8};\quad \overline{A_3A_2} = \{1;0;-2\},\quad \left|\overline{A_3A_2}\right| = \sqrt{5}.$$

Подставим координаты векторов и их длины в формулы для нахождения косинусов углов:

$$\cos\angle A_1 = \frac{1\cdot 0+2\cdot 2+0\cdot 2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}} = \frac{4}{\sqrt{40}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow \angle A_1 = \arccos\frac{2}{\sqrt{10}} \approx 50{,}8^\circ;$$

$$\cos\angle A_2 = \frac{-1\cdot(-1)+(-2)\cdot 0+0\cdot 2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \Rightarrow \angle A_2 = \arccos 0{,}2 \approx 78{,}5^\circ;$$

$$\cos\angle A_3 = \frac{0\cdot 1+(-2)\cdot 0+(-2)\cdot(-2)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}} = \frac{4}{\sqrt{40}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow \angle A_3 = \arccos\frac{2}{\sqrt{10}} \approx 50{,}8^\circ.$$

Проверка: $50{,}8^\circ + 78{,}5^\circ + 50{,}8^\circ = 180{,}1^\circ$.

С учётом проведённых округлений нахождение углов можно признать правильным.

2) Как показано в теоретическом материале данного раздела, объём треугольной пирамиды можно найти как 1/6 модуля смешанного произведения векторов, на которых она построена:

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\left|\overline{A_1A_2}\,\overline{A_1A_3}\,\overline{A_1A_4}\right|.$$

Найдём смешанное произведение векторов, учитывая координаты вектора $\overline{A_1A_4} = \{5;-2;6\}$:

$$\overline{A_1A_2}\,\overline{A_1A_3}\,\overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 36.$$

Тогда $V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\cdot 36 = 6$.

Площадь треугольника, являющегося основанием $A_1A_2A_3$, можно найти как половину модуля векторного произведения векторов, которые образуют данный треугольник:

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right|.$$

Найдём векторное произведение:

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = \{4; -2; 2\}.$$

$$\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Тогда площадь основания $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$.

Высоту пирамиды из вершины A_4 найдём, используя формулу:

$$V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H \;\Rightarrow\; H = \frac{3V_{пир}}{S_{осн}}.$$

В данном случае $S_{осн} = S_{A_1A_2A_3}$ и высота $H = \frac{3 \cdot 6}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{6}$.

Ответ: 1) $\angle A_1 = \angle A_3 \approx 50{,}8°$; $\angle A_2 \approx 75{,}8°$;

2) $V_{A_1A_2A_3A_4} = 6$; $S_{A_1A_2A_3} = \sqrt{6}$; $H = 3\sqrt{6}$.

2.3. Задания контрольной работы №2

Вариант 1

Задание 1

Дано: $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle \vec{a}, \vec{b} = \pi/4$. Для векторов $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b}$ найти скалярное произведение и модуль векторного произведения.

Задание 2

Дан тетраэдр с вершинами в точках

$A_1(1;3;6)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(-1;0;1)$, $A_4(-4;6;-3)$.

Найти: 1) внутренние углы в основании $A_1A_2A_3$ (с точностью до десятых долей градуса), сделать проверку;

2) объём пирамиды, площадь основания $A_1A_2A_3$ и длину высоты, проведённой из вершины A_4.

Вариант 2

Задание 1

Дано: $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3,\ \angle\vec{a},\vec{b} = \pi/3$. Для векторов $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ и $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b}$ найти скалярное произведение и модуль векторного произведения.

Задание 2

Дан тетраэдр с вершинами в точках

$A_1(-4;2;6),\ A_2(2;-3;0),\ A_3(-10;5;8),\ A_4(-5;2;-4)$.

Найти: 1) внутренние углы в основании $A_1A_2A_3$ (с точностью до десятых долей градуса), сделать проверку;

2) объём пирамиды, площадь основания $A_1A_2A_3$ и длину высоты, проведённой из вершины A_4.

Вариант 3

Задание 1

Дано: $|\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 2,\ \angle\vec{a},\vec{b} = \pi$. Для векторов $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{d} = 4\vec{a} - \vec{b}$ найти скалярное произведение и модуль векторного произведения.

Задание 2

Дан тетраэдр с вершинами в точках

$A_1(7;2;4),\ A_2(7;-1;-2),\ A_3(3;3;1),\ A_4(-4;2;1)$.

Найти: 1) внутренние углы в основании $A_1A_2A_3$ (с точностью до десятых долей градуса), сделать проверку;

2) объём пирамиды, площадь основания $A_1A_2A_3$ и длину высоты, проведённой из вершины A_4.

Вариант 4

Задание 1

Дано: $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 1,\ \angle\vec{a},\vec{b} = \pi/3$. Для векторов $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$ найти скалярное произведение и модуль векторного произведения.

Задание 2

Дан тетраэдр с вершинами в точках

$A_1(2;1;4),\ A_2(-1;5;-2),\ A_3(-7;-3;2),\ A_4(-6;-3;6)$.

Найти: 1) внутренние углы в основании $A_1A_2A_3$ (с точностью до десятых долей градуса), сделать проверку;

2) объём пирамиды, площадь основания $A_1A_2A_3$ и длину высоты, проведённой из вершины A_4.

Вариант 5

Задание 1

Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\angle \vec{a}, \vec{b} = 0$. Для векторов $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = -\vec{a} + 3\vec{b}$ найти скалярное произведение и модуль векторного произведения.

Задание 2

Дан тетраэдр с вершинами в точках

$A_1(-1;-5;2)$, $A_2(-6;0;-3)$, $A_3(3;6;-3)$, $A_4(-10;6;7)$.

Найти: 1) внутренние углы в основании $A_1A_2A_3$ (с точностью до десятых долей градуса), сделать проверку;

2) объём пирамиды, площадь основания $A_1A_2A_3$ и длину высоты, проведённой из вершины A_4.

Вариант 6

Задание 1

Дано: $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle \vec{a}, \vec{b} = 3\pi / 4$. Для векторов $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{d} = -4\vec{a} + \vec{b}$ найти скалярное произведение и модуль векторного произведения.

Задание 2

Дан тетраэдр с вершинами в точках

$A_1(0;-1;-1)$, $A_2(-2;3;5)$, $A_3(1;-5;-9)$, $A_4(-1;-6;3)$.

Найти: 1) внутренние углы в основании $A_1A_2A_3$ (с точностью до десятых долей градуса), сделать проверку;

2) объём пирамиды, площадь основания $A_1A_2A_3$ и длину высоты, проведённой из вершины A_4.

Вариант 7

Задание 1

Дано: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle \vec{a}, \vec{b} = \pi / 3$. Для векторов $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ найти скалярное произведение и модуль векторного произведения.

Задание 2

Дан тетраэдр с вершинами в точках

$A_1(5;2;0)$, $A_2(2;5;0)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(-1;1;1)$.

Найти: 1) внутренние углы в основании $A_1A_2A_3$ (с точностью до десятых долей градуса), сделать проверку;

2) объём пирамиды, площадь основания $A_1A_2A_3$ и длину высоты, проведённой из вершины A_4.

Вариант 8

Задание 1

Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\angle \vec{a}, \vec{b} = 5\pi / 6$. Для векторов $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b}$ найти скалярное произведение и модуль векторного произведения.

Задание 2

Дан тетраэдр с вершинами в точках

$A_1(2; -1; -2)$, $A_2(1; 2; 1)$, $A_3(5; 0; -6)$, $A_4(-10; 9; -7)$.

Найти: 1) внутренние углы в основании $A_1A_2A_3$ (с точностью до десятых долей градуса), сделать проверку;

2) объём пирамиды, площадь основания $A_1A_2A_3$ и длину высоты, проведённой из вершины A_4.

Вариант 9

Задание 1

Дано: $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{3}$, $\angle \vec{a}, \vec{b} = \pi$. Для векторов $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b}$ найти скалярное произведение и модуль векторного произведения.

Задание 2

Дан тетраэдр с вершинами в точках

$A_1(-2; 0; -4)$, $A_2(-1; 7; 1)$, $A_3(4; -8; -4)$, $A_4(1; -4; 6)$.

Найти: 1) внутренние углы в основании $A_1A_2A_3$ (с точностью до десятых долей градуса), сделать проверку;

2) объём пирамиды, площадь основания $A_1A_2A_3$ и длину высоты, проведённой из вершины A_4.

Вариант 10

Задание 1

Дано: $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle \vec{a}, \vec{b} = \pi / 6$. Для векторов $\vec{c} = -\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{d} = 3\vec{a} - \vec{b}$ найти скалярное произведение и модуль векторного произведения.

Задание 2

Дан тетраэдр с вершинами в точках

$A_1(14; 4; 5)$, $A_2(-5; -3; 2)$, $A_3(-2; -6; -3)$, $A_4(-2; 2; -1)$.

Найти: 1) внутренние углы в основании $A_1A_2A_3$ (с точностью до десятых долей градуса), сделать проверку;

2) объём пирамиды, площадь основания $A_1A_2A_3$ и длину высоты, проведённой из вершины A_4.

Раздел 3. Контрольная работа по высшей математике №3

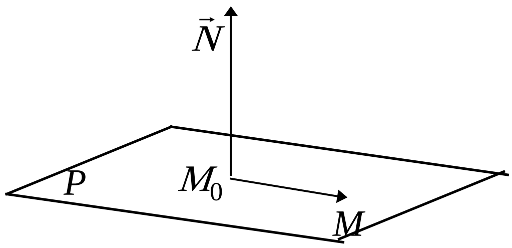
3.1. Теоретический материал по аналитической геометрии

3.1.1. Плоскость

Уравнением плоскости будем называть соотношение между декартовыми координатами *x, y, z* произвольной точки плоскости, которому удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей данной плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору

Составим уравнение плоскости *P*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно вектору $\overline{N} = \{A, B, C\}$, $\overline{N} \neq \overline{0}$, направленному от начала координат к плоскости.



Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости *P*. Рассмотрим вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. По условию вектор $\overline{N}$ перпендикулярен плоскости *P*, следовательно, вектор $\overline{N}$ перпендикулярен вектору $\overline{M_0M}$ (т.к. $\overline{M_0M}$ лежит на плоскости *P*) и их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\overline{N} \cdot \overline{M_0M} = 0$,

или $$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Общее уравнение плоскости

Раскроем скобки в полученном уравнении и приведем подобные члены:

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0.$$

Обозначив через $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, получим $Ax + By + Cz + D = 0$.

Составленное уравнение называется *общим уравнением плоскости*. Оно является линейным алгебраическим уравнением, коэффициенты при x, y и z дают координаты нормального (т.е. перпендикулярного) вектора плоскости.

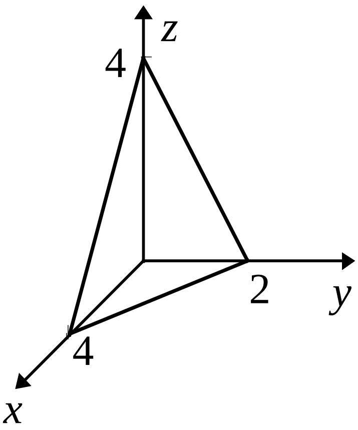
Уравнение плоскости в отрезках

Рассмотрим общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Перенесем слагаемое *D* в правую сторону и разделим обе части уравнения на $(-D) \neq 0$: $Ax + By + Cz = -D$, $\dfrac{A}{-D}x + \dfrac{B}{-D}y + \dfrac{C}{-D}z = 1$,

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$ Обозначим: $a = -\dfrac{D}{A}$, $b = -\dfrac{D}{B}$, $c = -\dfrac{D}{C}$.

Тогда $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$



Это уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках*, где a, b, c – отрезки (с учетом знаков), отсекаемые плоскостью на осях координат.

Пример. Построить плоскость $x+2y+z-4=0$.

Перепишем уравнение в виде

$$x+2y+z=4,\quad \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1.$$

Треугольник, изображенный на рисунке, соединяет точки, отсекаемые плоскостью на координатных осях. Этот треугольник является частью плоскости и показывает ее расположение в пространстве.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ – три точки пространства, не лежащие на одной прямой, через которые проходит плоскость. Возьмем произвольную точку $M(x,y,z)$ плоскости и образуем три вектора $\overline{M_1M},\ \overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3}$. Так как все 4 точки лежат в одной плоскости, то и три вектора, их соединяющие, лежат в той же плоскости, т.е. компланарны. Их смешанное произведение равно 0, т.е. $\overline{M_1M}\,\overline{M_1M_2}\,\overline{M_1M_3}=0$.

Поскольку смешанное произведение равно определителю, составленному из координат векторов, то должно выполняться:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Написанное равенство – уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

Покажем на примере, как от данного вида уравнения плоскости, довольно громоздкого и неудобного на практике, перейти к общему.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(0;-2;-1)$, $M_2(2;4;-2)$, $M_3(3;2;0)$.

Подставив в (19.4) координаты точек M_1, M_2, M_3, получим:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+2 & z+1 \\ 2-0 & 4+2 & -2+1 \\ 3-0 & 2+2 & 0+1 \end{vmatrix}=0;\qquad \begin{vmatrix} x & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$x\begin{vmatrix}6 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix}2 & 6\\ 3 & 4\end{vmatrix}=0,$$

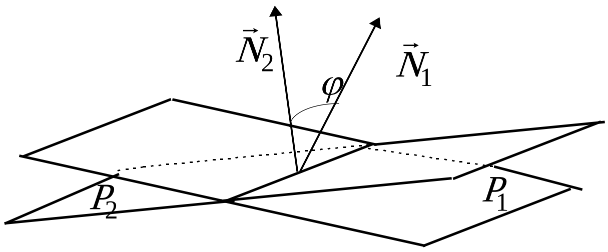
$$x(6+4)-(y+2)(2+3)+(z+1)(8-18)=0,$$

$$10x-5(y+2)-10(z+1)=0.$$

Сократив на 5, получим общее уравнение искомой плоскости

$$2x-y-2z-4=0.$$

Угол между плоскостями



Пусть даны две плоскости P_1 и P_2:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

с нормальными векторами $\overline{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\overline{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$.

Тогда φ – двугранный угол между ними, – равен углу, образованному нормальными векторами $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$. Поэтому

$$\cos\varphi=\cos\left(\overline{N}_1\,\hat{}\,\overline{N}_2\right)=\frac{\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2}{\left|\overline{N}_1\right|\cdot\left|\overline{N}_2\right|}=\frac{A_1A_1+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

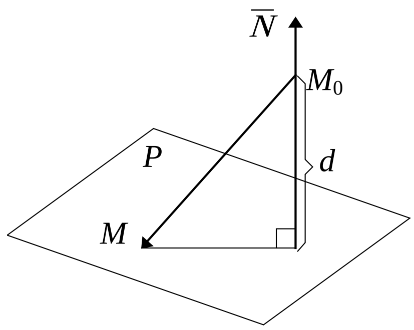
Пример. Найти угол между плоскостями
$x+2y-3z+4=0$ и $2x+3y+z+8=0$.

Подставив параметры уравнений плоскостей в соответствующую формулу, имеем

$$\cos\varphi=\cos\left(\overline{N}_1\,\hat{}\,\overline{N}_2\right)=\frac{\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2}{\left|\overline{N}_1\right|\cdot\left|\overline{N}_2\right|}=\frac{1\cdot2+2\cdot3+(-3)\cdot1}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{5}{14}.$$

Отсюда находим, что $\varphi=\arccos\dfrac{5}{14}\approx69^\circ$.

Кратчайшее расстояние от точки до плоскости



Найдем расстояние d от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости P.

Под расстоянием от точки до плоскости понимается длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. Возьмем на плоскости, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, произвольную точку $M(x,y,z)$ и соединим ее вектором с M_0, а из основания перпендикуляра отложим вектор $\overline{N}=\{A,B,C\}$, нормальный плоскости. Тогда расстояние d будет равно абсолютной величине проекции вектора $\overline{M_0M}$ на направление вектора $\overline{N}$, обозначаемой $\left|np_{\overline{N}}\overline{M_0M}\right|$. Данную проекцию можно найти, используя скалярное произведение двух векторов

$$\left|np_{\overline{N}}\overline{M_0M}\right| = \frac{\left|\overline{N}\cdot\overline{M_0M}\right|}{\left|\overline{N}\right|}.$$

Вычисляя скалярное произведение через координаты векторов, получим

$$d = \frac{\left|A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\left|Ax+Bx+Cz-Ax_0-By_0-Cz_0\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \frac{\left|-D-Ax_0-By_0-Cz_0\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Здесь использовано равенство $Ax+By+Cz=-D$, вытекающее из уравнения плоскости.

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(1;-2;3)$ до плоскости $2x-4y-3z+1=0$.

Подставив необходимые данные в формулу, имеем

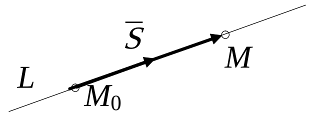
$$d = \frac{\left|2\cdot1-4\cdot(-2)-3\cdot3+1\right|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+(-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}}.$$

3.1.2. Прямая в пространстве

Под уравнениями прямой в пространстве будем понимать соотношения между координатами произвольной точки, принадлежащей данной прямой.

Канонические уравнения прямой

Положение прямой L в пространстве можно однозначно определить, в частности, заданием какой-либо ее фиксированной точки M_0 и ненулевого вектора $\overline{S}$, коллинеарного этой прямой. Такой вектор называется *направляющим вектором прямой*.



Пусть прямая L проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\overline{S}=\{m, n, p\}$. Так как важно направление, а не точка приложения вектора $\overline{S}$, то его всегда можно отложить так, чтобы прямая проходила через него, например, поместив его начало в точку M_0. Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y, z)$ и соединим ее вектором с M_0. Тогда вектора $\overline{M_0M}$ и $\overline{S}$ – коллинеарны, т.к. лежат на одной прямой. Т.к. координаты коллинеарных векторов пропорциональны, то:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

Параметрические уравнения прямой

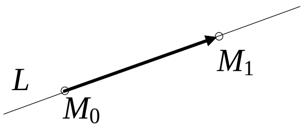
Примем каждое из отношений в предыдущих уравнениях за параметр t, который может принимать любые значения, т.к. m, n, p – заданы, а координаты x, y, z могут принимать любые значения.

$$\frac{x-x_0}{m}=t,\ \frac{y-y_0}{n}=t,\ \frac{z-z_0}{p}=t,$$

откуда $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt\ , \ -\infty<t<\infty \\ z=z_0+pt. \end{cases}$

Наиболее часто параметром t является время.

Уравнения прямой, проходящей через две точки



Пусть прямая L проходит через точки $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ и $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$. Составим канонические уравнения этой прямой. Для этого за направляющий вектор $\overline{S}$ примем вектор $\overline{M_0M_1}=\left\{x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\right\}$, соединяющий две заданные точки, т.е. $\overline{S}=\overline{M_0M_1}$. В качестве фиксированной точки возьмем любую из заданных, например M_0. Поэтому из канонических уравнений имеем

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

Пример. Написать уравнения прямой, проходящей через точки $M_0\left(-1;3;-5\right)$ и $M_1\left(1;4;2\right)$.

Подставим координаты точек в уравнения, получим

$$\frac{x+1}{1+1}=\frac{y-3}{4-3}=\frac{z+5}{2+5},\text{ или }\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{7}.$$

Угол между двумя прямыми

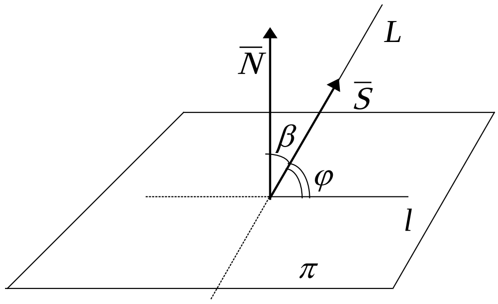
Пусть в пространстве даны две прямые

$$\left(L_1\right)\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ \text{и}\ \left(L_2\right)\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

с направляющими векторами $\overline{S}_1=\left\{m_1,n_1,p_1\right\}$ и $\overline{S}_2=\left\{m_2,n_2,p_2\right\}$. Тогда φ – угол между ними, равен углу, образованному векторами $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$. Поэтому

$$\cos\varphi=\cos\left(\overline{S}_1\wedge\overline{S}_2\right)=\frac{\overline{S}_1\cdot\overline{S}_2}{\left|\overline{S}_1\right|\left|\overline{S}_2\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Угол между прямой и плоскостью



Углом φ между прямой L, заданной уравнением $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскостью π, заданной уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

называется угол между прямой L и ее проекцией на плоскость l.

Т.к. $\overline{N}=\{A,B,C\}$ – вектор, перпендикулярный плоскости π, то $\varphi+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ и $\sin\varphi=\cos\beta$. Из скалярного произведения $\overline{N}$ и $\overline{S}=\{m,n,p\}$ – направляющего вектора прямой, находим

$$\cos\beta=\frac{\overline{N}\cdot\overline{S}}{\left|\overline{N}\right|\cdot\left|\overline{S}\right|}.$$

Следовательно $$\sin\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Точка пересечения прямой и плоскости

Подставим параметрические уравнения прямой

$x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt$

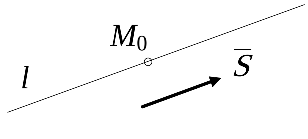
в уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ вместо x, y, z. Найдем значение параметра t, соответствующее точке пересечения, а затем, подставив его в параметрические уравнения, определим координаты точки пересечения x_p, y_p, z_p.

3.1.3. Прямая на плоскости

Различные виды уравнений прямой на плоскости

Рассуждая аналогично, как в разделе “Прямая в пространстве”, можно написать следующие уравнения прямой l на плоскости Oxy.

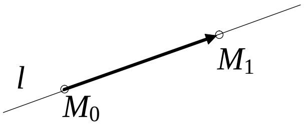
Каноническое уравнение прямой



$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n},$$

где $M_0(x_0,y_0)$ – точка, через которую проходит прямая; $\overline{S}=\{m,n\}$ – направляющий вектор прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две точки



$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0},$$

где $M_0(x_0,y_0)$, $M_1(x_1,y_1)$ – точки, через которые проходит прямая.

Общее уравнение прямой

Прямую на плоскости *Oxy* можно задать еще как пересечение двух плоскостей

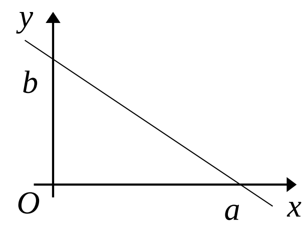
$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

откуда $Ax + By + D = 0$. Обычно для обозначения свободного члена используют букву *C* и общее уравнение прямой записывают так:

$$Ax + By + C = 0$$

Коэффициенты *A* и *B* являются компонентами вектора $\overline{N} = \{A, B\}$, нормального к данной прямой.

Уравнение прямой в отрезках

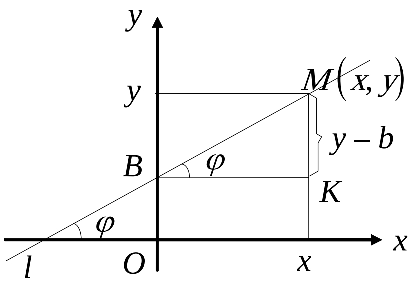


Если в общем уравнении прямой $C \neq 0$, то перенося свободный член *C* в правую часть уравнения и разделив все его члены на (–*C*), получим уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где *a, b* – отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом



Пусть прямая *l*, проходящая через точку $M(x, y)$, составляет угол φ ($\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$) с осью *Ox* и пересекает ось *Oy* в точке $B(0; b)$ (см. рис.).

Из треугольника *BMK* находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y - b}{x},$$

откуда, обозначив $\operatorname{tg}\varphi = k$ (угловой коэффициент), получим

$$k = \frac{y - b}{x},$$

или $y = kx + b$.

Угол между двумя прямыми

Угол определяется по следующим формулам.

Если уравнения прямых заданы в виде

(l_1) $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}$ и (l_2) $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}$, то $\quad \cos\varphi = \cos\left(\overline{S}_1 \hat{} \overline{S}_2\right) = \dfrac{\overline{S}_1 \cdot \overline{S}_2}{\left|\overline{S}_1\right| \cdot \left|\overline{S}_2\right|} = \dfrac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$

Если уравнения прямых даны в общем виде

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \text{ и } A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

то $\quad \cos\varphi = \cos\left(\overline{N}_1 \hat{} \overline{N}_2\right) = \dfrac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{\left|\overline{N}_1\right| \cdot \left|\overline{N}_2\right|} = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$

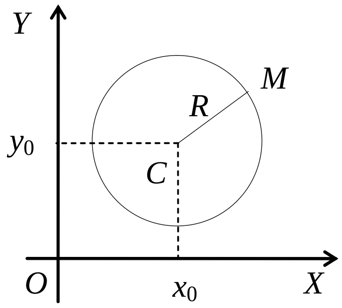
Расстояние от точки до прямой

Рассмотрим прямую *l*, заданную общим уравнением $Ax + By + C = 0$, где $\overline{N} = \{A, B\}$ – нормальный вектор прямой. Найдем расстояние *d* от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой *l*.

Под расстоянием от точки до прямой понимается длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Формула для нахождения расстояния может быть выведена аналогично расстоянию от точки до плоскости и имеет вид: $d = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

3.1.4. Кривые второго порядка

Окружность



Окружностью называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки, называемой центром, постоянно.

Выведем уравнение окружности в декартовой системе координат. Пусть точка $C(x_0, y_0)$ - центр окружности, R - расстояние от центра до произвольной точки $M(x, y)$, принадлежащей окружности (радиус окружности). По определению окружности $CM = R$, т.к.

$$CM = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

откуда $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$. После возведения в квадрат обеих частей равенства, получим уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(x_0, y_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Если центр окружности находится в начале координат, то уравнение окружности примет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

Если в левой части уравнения $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ раскрыть скобки, привести подобные и ввести обозначения: $D=-x_0$, $E=-y_0$, $F=x_0^2+y_0^2-R^2$, то его можно записать в виде: $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$.

При умножении или делении обеих частей данного уравнения на произвольное число, отличное от 0, коэффициенты при x^2 и y^2 уже не будут равны 1, но должны быть равны друг другу.

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $4x^2-8x+4y^2+4y-11=0$.

Сгруппируем слагаемые, содержащие переменные x и y, и вынесем за скобку имеющиеся общие множители:

$$4(x^2-2x)+4(y^2+y)-11=0.$$

В скобках выделим полный квадрат:

$$4(x^2-2x+1-1)+4(y^2+2\cdot\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})-11=0,$$

$$4\left[(x-1)^2-1\right]+4\left[(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\right]-11=0.$$

Раскрывая квадратные скобки и сокращая обе части уравнения на 4, получим

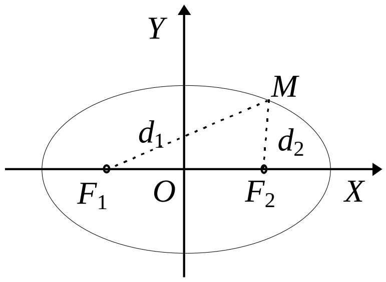
$$(x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=4=2^2.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением окружности в общем виде, найдем, что координаты центра $x_0=1$, $y_0=-\frac{1}{2}$, а радиус окружности $R=2$.

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна и больше расстояния между фокусами.

Выведем уравнение эллипса в декартовой системе координат. Расположим фокусы эллипса на оси OX симметрично началу координат в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. d_1 и d_2 — расстояния от произвольной точки $M(x,y)$ эллипса до фокусов. Тогда, по определению эллипса $d_1+d_2=2a$, где $2a$ — сумма расстояний. Из определения также следует, что $2a>2c$. Поскольку



$$d_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad d_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

то $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$.

Преобразуем выписанное равенство, возведя вначале обе его части в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2+2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2=4a^2.$$

Раскроем скобки, приведем подобные:

$$2(x^2+y^2+c^2)+2\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}=4a^2.$$

Введем обозначение $t=x^2+y^2+c^2$ и разделим на 2 обе части уравнения:

$$t+\sqrt{t^2-4c^2x^2}=2a^2 \text{ или } 2a^2-t=\sqrt{t^2-4c^2x^2}.$$

Снова возведем в квадрат обе части равенства:

$$4a^4-4a^2t+t^2=t^2-4c^2x^2.$$

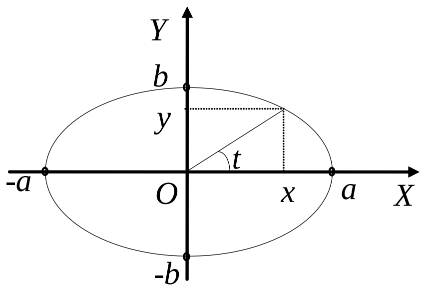
После упрощения:

$$a^4-a^2\left(x^2+y^2+c^2\right)=-c^2x^2 \text{ или } x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Разделив обе части последнего равенства на $a^2(a^2-c^2)$, получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

В уравнении использовано обозначение $b^2=a^2-c^2$.

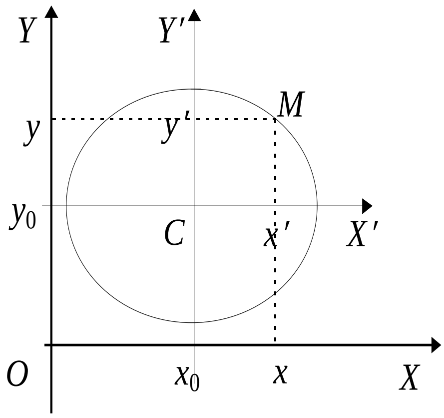


Из уравнения следует, что эллипс должен проходить через точки $(a,0), (-a,0), (b,0), (-b,0)$, которые называются вершинами эллипса. Соединяя эти точки плавной линией, получим изображение эллипса, заданного каноническим уравнением.

Из рисунка видно, что эллипс имеет две оси симметрии и центр симметрии. Параметры a и b в уравнении эллипса называются его полуосями, т.к. равны половине длины соответствующих осей симметрии, отношение $e=\dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса ($c=\sqrt{a^2-b^2}$).

Заметим, что если фокусы эллипса расположены на оси OX, то $a>b$, если же фокусы расположены на оси OY, то наоборот, $a<b$.

Пусть теперь центр эллипса расположен в произвольной точке $C(x_0,y_0)$, а оси симметрии параллельны координатным осям. Проведем через центр эллипса вспомогательную систему координат $X'OY'$. В этой системе координат можно получить каноническое уравнение эллипса:



$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1.$$

Из рисунка видно, что координаты произвольной точки на эллипсе в исходной и вспомогательной системе координат связаны соотношениями:

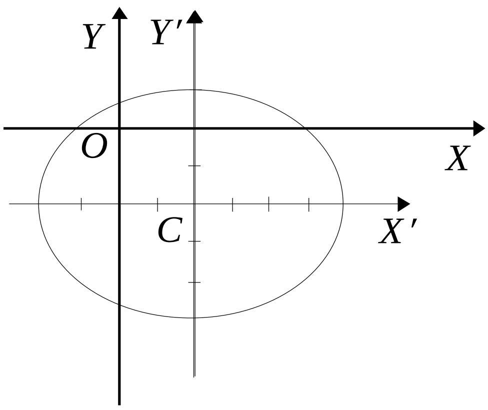
$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases}$$

Используя эти равенства, получим уравнение эллипса со смещенным центром:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Чтобы нарисовать эллипс по данному уравнению, нужно отметить центр эллипса $C(x_0, y_0)$, провести через него вспомогательную систему координат $X'OY'$, отметить в ней вершины эллипса и соединить плавной линией.

Пример. Изобразить эллипс по его уравнению:



$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}=1.$$

Координаты центра C $x_0 = 2,\ y_0 = -2$, отметим его на координатной плоскости. Проведем через C вспомогательные оси X' и Y'. Чтобы отметить вершины эллипса вправо и влево от C по оси X', отложим по 4 единицы (т.к. $a = 4$), а вверх и вниз по оси Y' отложим по 3 единицы (т.к. $b = 3$). Соединим полученные точки плавной линией.

Указанное в данном примере уравнение можно записать в другом виде:

$$9(x-2)^2+16(y+2)^2=144.$$

Обе части исходного уравнения умножили на 144.

Раскроем скобки и приведем подобные:

$$9x^2-36x+16y^2+64y-44=0.$$

В общем виде подобное уравнение можно записать так:

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (*)$$

Отметим, что в уравнении эллипса коэффициенты A и C могут различаться по величине, но должны совпадать по знаку.

Обратный переход от уравнения вида (*) к уравнению со смещенным центром можно выполнить аналогично примеру, рассмотренному в предыдущем пункте.

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, имеет постоянное значение, меньшее расстояния между фокусами.

Если разместить фокусы гиперболы на OX симметрично началу координат в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, обозначить расстояния от произвольной точки $M(x,y)$ на гиперболе до фокусов d_1 и d_2, а модуль их разности положить равным $2a$, то можно выписать условие для составления уравнения гиперболы в декартовой системе координат:

$$|d_1 - d_2| = \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Преобразуя выписанное равенство подобно тому, как это было сделано при выводе уравнения эллипса, получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В уравнении использовано обозначение $a^2 - c^2 = -b^2$ (поскольку $a < c$). Отношение $e = \dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы.

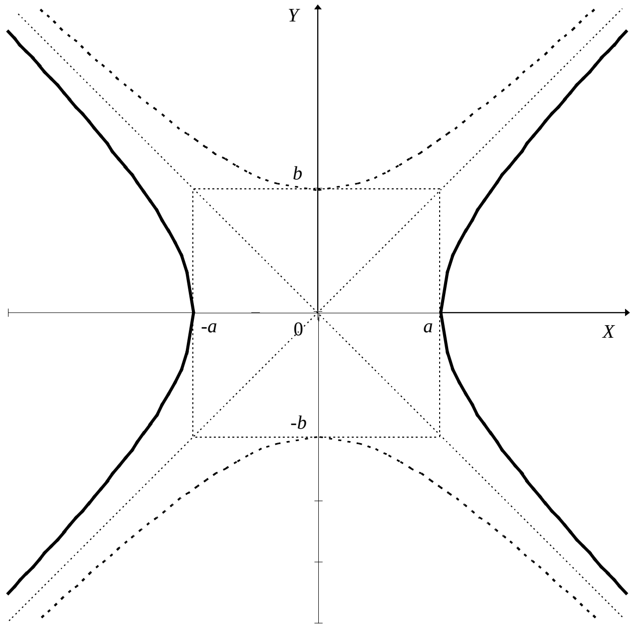
Если фокусы гиперболы расположить на OY, уравнение гиперболы будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ или } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Такая гипербола называется *сопряженной*.

Для построения графика гиперболы, описываемой уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, отметим, что он должен проходить через точки $(-a,0)$ и $(a,0)$ - вершины гиперболы, кроме этого график не может пересекать OY.

Учитывая этот результат, график гиперболы строим следующим образом. Проводим прямые $x = \pm a$ и $y = \pm b$, эти линии ограничат основной прямоугольник гиперболы. Проведем прямые, совпадающие с диагоналями этого прямоугольника, это будут асимптоты гиперболы.



Отметим вершины $(-a,0)$ и $(a,0)$, затем проведем линии, плавно приближаясь от вершин к асимптотам.

График гиперболы состоит из двух половин — ветвей, он имеет две оси симметрии и центр симметрии.

Пунктирной линией на рисунке нанесен график сопряженной гиперболы.

Уравнение гиперболы, центр симметрии которой находится в точке $C(x_0, y_0)$, а оси симметрии параллельны координатным осям, получается аналогично подобному уравнению для эллипса:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1 \qquad (**)$$

Отметим, что в уравнении гиперболы коэффициенты при x^2 и y^2 разных знаков.

Пример. Установить, что уравнение $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ определяет гиперболу и построить ее.

Т.к. коэффициенты при x^2 и y^2 разных знаков, то можно предположить, что это уравнение гиперболы. Чтобы убедиться в этом, преобразуем заданное уравнение к виду (**).

Сгруппируем слагаемые с x и y и вынесем имеющиеся при них общие множители за скобки:

$16(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 6y) - 161 = 0$.

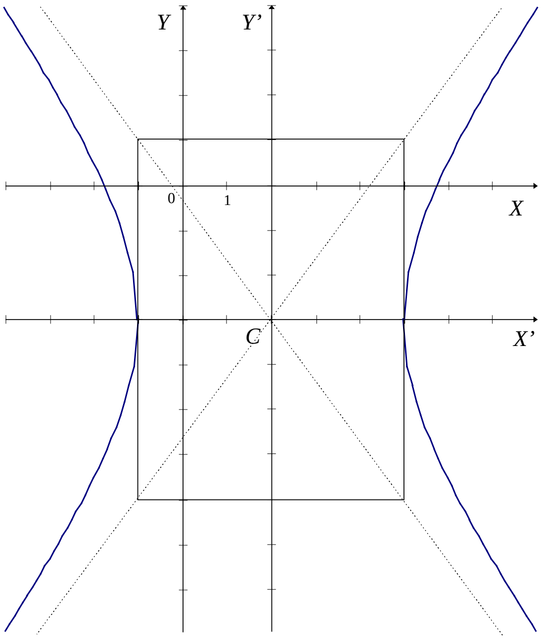
Выделим в скобках полный квадрат:

$$16(x^2 - 4x + 4 - 4) - 9(y^2 + 6y + 9 - 9) - 161 = 0;$$

$$16(x^2 - 4x + 4) - 4 \cdot 16 - 9(y^2 + 6y + 9) - 9 \cdot (-9) - 161 = 0;$$

$$16(x-2)^2 - 64 - 9(y+3)^2 + 81 - 161 = 0;$$

$$16(x-2)^2 - 9(y+3)^2 = 144.$$



Разделим обе части последнего равенства на 144: $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1$.

Это уравнение гиперболы с центром в $C(2,-3)$ и полуосями $a=3$ и $b=4$.

Отметим положение центра и проведем через него вспомогательные оси X' и Y'. Отложим вправо и влево от C по 3 единицы и проведем прямые, параллельные оси Y', отложив вверх и вниз по 4 единицы, проведем прямые, параллельные оси X'. Прямые, совпадающие с диагоналями получившегося прямоугольника, являются асимптотами нашей гиперболы, отметим ее вершины на OX' и построим график.

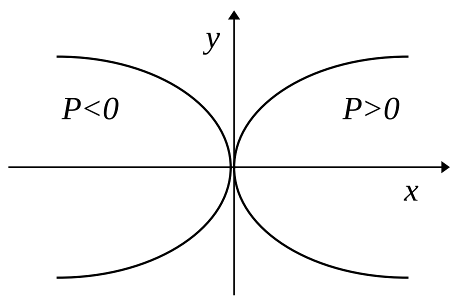
Парабола

Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки, называемой фокусом, и заданной прямой, называемой директрисой при условии, что директриса не проходит через фокус.

Чтобы составить уравнение параболы, разместим фокус в точке $F(\frac{p}{2},0)$, директрису проведем параллельно оси OY через точку $(-\frac{p}{2},0)$. Расстояние от произвольной точки $M(x,y)$, принадлежащей параболе, до директрисы обозначим d, а расстояние от M до фокуса — r. По определению $r=d$;

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения: $(x-\frac{p}{2})^2+y^2=(x+\frac{p}{2})^2$.

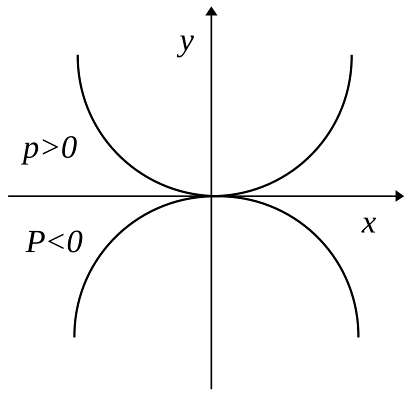


Раскрывая скобки и приводя подобные, получим каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Если $p > 0$, то ветви параболы направлены в сторону положительного направления оси OX, если $p < 0$, то в обратную.

Если расположить директрису параллельно OX, а фокус на оси OY, то получим уравнение параболы в виде: $x^2 = 2py$.



В соответствии со знаком параметра p ветви такой параболы будут смотреть вверх ($p > 0$) или вниз ($p < 0$).

График параболы имеет только одну ось симметрии и не имеет центра симметрии. На графике имеется точка, называемая вершиной параболы.

Если вершина параболы находится не в начале координат, а в произвольной точке (x_0, y_0), то уравнение параболы имеет вид:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad \text{или} \quad (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$

В уравнение параболы одна из координат входит в первой степени, а другая - во второй.

3.2. Пример решения контрольной работы №3

Задание 1

Прямая l_1 проходит через точки $(-3;4)$ и $(4;-2)$, прямая l_2 проходит через точки $(-1;-3)$ и $(6;2)$. Составив уравнения прямых, найти точку их пересечения. Для проверки результата сделать чертёж.

Решение

Для составления уравнений прямых l_1 и l_2 используем уравнение прямой с угловым коэффициентом. Тогда уравнения прямых в общем виде можно записать так:

$l_1 : y = k_1 x + b_1, \qquad l_2 : y = k_2 x + b_2$.

Учитывая, что координаты точки, принадлежащей прямой, должны удовлетворять её уравнению, для нахождения параметров уравнения первой прямой получим систему:

$$\begin{cases} 4 = -3k_1 + b_1, \\ -2 = 4k_1 + b_1. \end{cases}$$

Решив систему, получим уравнение l_1: $y = -\frac{6}{7}x + \frac{10}{7}$.

Аналогично для нахождения параметров уравнения прямой l_2 составим и решим систему:

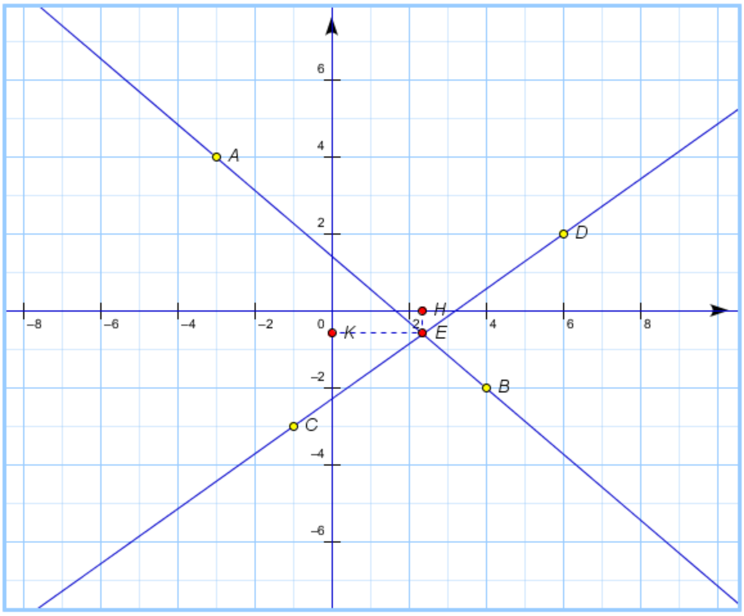
$$\begin{cases} 4 = -3k_1 + b_1, \\ -2 = 4k_1 + b_1. \end{cases}$$

Тогда уравнение l_2: $y = \frac{5}{7}x - \frac{16}{7}$.

Точка пересечения прямых должна удовлетворять уравнениям обеих прямых, т.е. быть решением системы:

$$\begin{cases} y = -\frac{6}{7}x + \frac{10}{7}, \\ y = \frac{5}{7}x - \frac{16}{7}. \end{cases}$$

Решением этой системы являются $x = \frac{26}{11} \approx 2{,}4$; $y = -\frac{46}{77} \approx -0{,}6$.

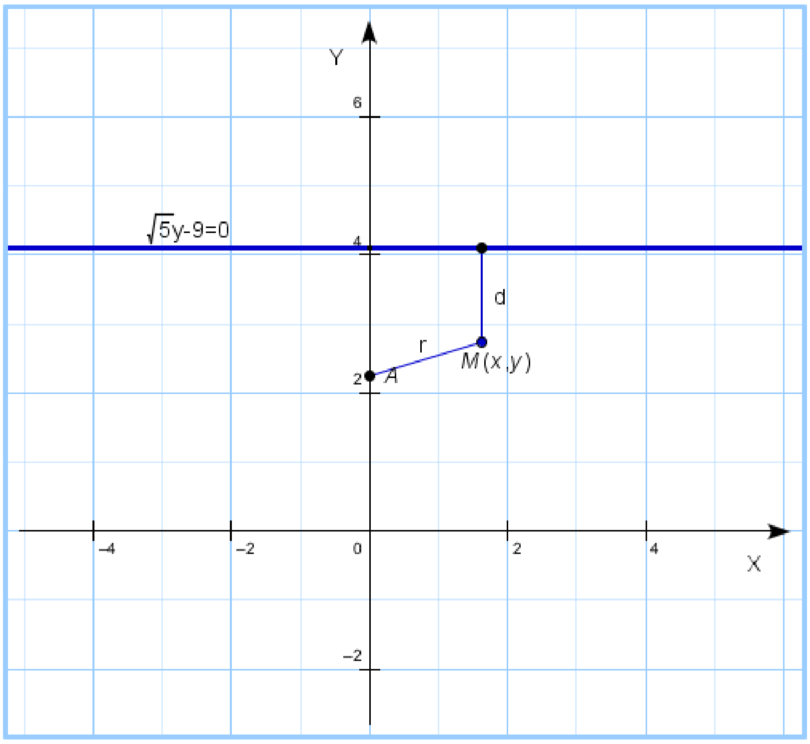


На рисунке отмечены заданные точки, проведены прямые, проходящие через них. Как видим, координаты точки их пересечения E соответствуют их значениям, найденным аналитически.

Задание 2

Найти уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $A\left(0;\sqrt{5}\right)$ к расстоянию до прямой $l:\sqrt{5}\,y-9=0$ постоянно и равно $\sqrt{5}/3$. Изобразить полученную линию на координатной плоскости.

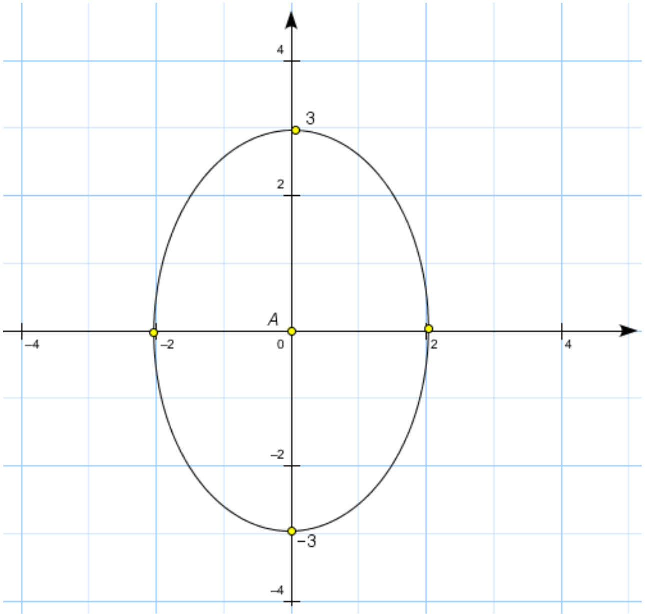
Решение



Для наглядности на чертеже изображена заданная прямая и заданная точка. Там же отмечена произвольная точка $M(x;y)$, принадлежащая линии, уравнение которой нужно составить.

Длина отрезка d равна модулю разности ординат точки на заданной прямой и точки M: $d=\left|\dfrac{9}{\sqrt{5}}-y\right|$. Расстояние r между точками A и M находится по формуле: $r=\sqrt{(x-0)^2+(y-\sqrt{5})^2}=\sqrt{x^2+(y-\sqrt{5})^2}$.

По условию задачи: $\dfrac{r}{d}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow 3r=\sqrt{5}\,d\ \Rightarrow 9r^2=5d^2$.



Подставляя в последнее равенство расстояния до точки и прямой, получим уравнение:

$$9(x^2+(y-\sqrt{5})^2)=5\left(\frac{9}{\sqrt{5}}-y\right)^2.$$

Раскрываем скобки:

$$9\left(x^2+y^2-2\sqrt{5}y+5\right)=5\left(\frac{81}{5}-\frac{18}{\sqrt{5}}y+y^2\right)\Rightarrow.$$

$$9x^2+9y^2-18\sqrt{5}y+45=81-18\sqrt{5}y+5y^2.$$

Приведём подобные: $9x^2+4y^2=36$. Разделив обе части уравнения на 36, получим каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Его изображение в соответствии с полученным уравнением приведено на рисунке.

Задание 3

Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}$ и плоскости $2x+y+7z-3=0$. Отметить найденную точку в трёхмерной декартовой системе координат.

Решение

Запишем уравнения прямой в параметрической форме:

$$\frac{x-7}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}=t\Rightarrow\ \frac{x-7}{3}=t;\quad \frac{y-3}{1}=t;\quad \frac{z+1}{-2}=t\ \Rightarrow$$
$$x=7+3t;\quad y=3+t;\quad z=-1-2t.$$

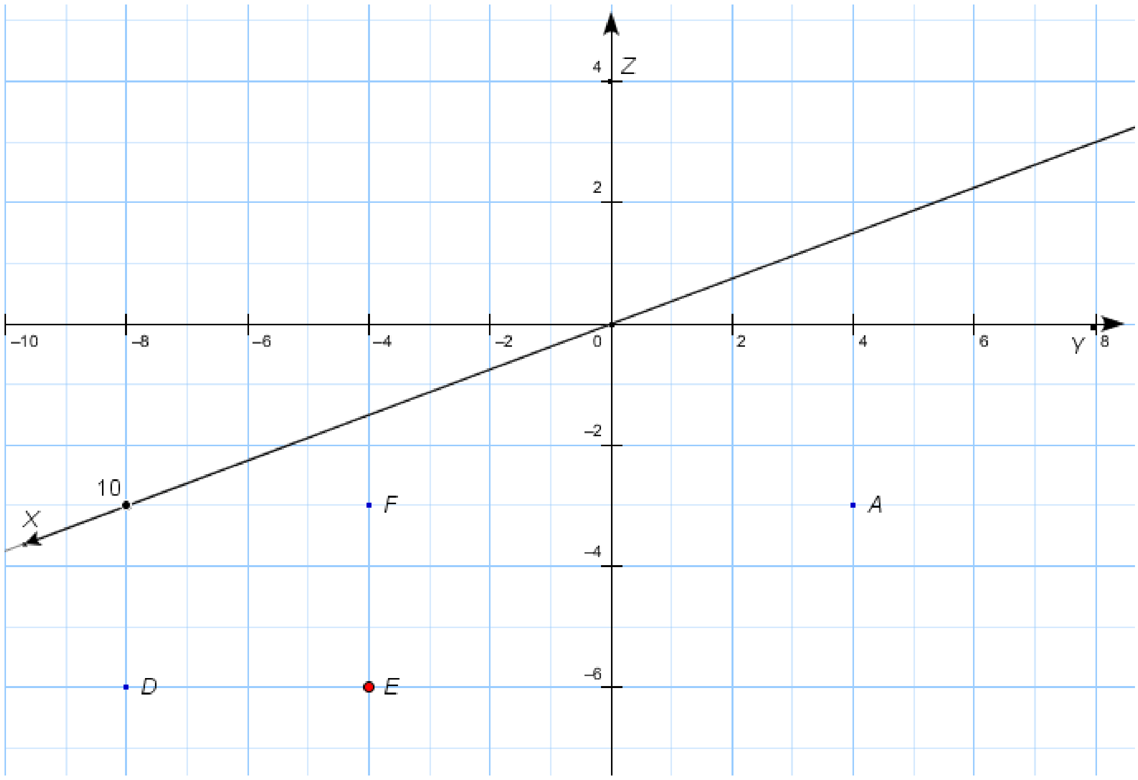
Подставим полученные равенства в уравнение плоскости:

$$2(7+3t)+3+t+7(-1-2t)=0\Rightarrow -7t=-7\Rightarrow t=1.$$

Тогда координаты точки пересечения:

$$x=7+3\cdot 1=10;\ y=3+1=4;\ z=-1-2\cdot 1=-3.$$

Для того чтобы отложить полученную точку в трёхмерной декартовой системе координат через значение абсциссы (10), проведём прямую, параллельную оси ординат. На ней от оси абсцисс отложим значение ординаты, равное 4. Из полученной точки вниз отложим значение аппликаты, равное -3.



Точка E – это точка пересечения прямой и плоскости.

3.3. Задания контрольной работы №3

Вариант 1

Задание 1

Прямая l_1 проходит через точки $(1;2)$ и $(5;-1)$, прямая l_2 проходит через точки $(-2;-1)$ и $(5;2)$. Составив уравнения прямых, найти точку их пересечения. Для проверки результата сделать чертёж.

Задание 2

Найти уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $A\left(-\sqrt{34};0\right)$ к расстоянию до прямой $l:\sqrt{34}x+25=0$ постоянно и равно $\sqrt{34}/5$. Изобразить полученную линию на координатной плоскости.

Задание 3

Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$ и плоскости $x+2y+3z-14=0$. Отметить найденную точку в трёхмерной декартовой системе координат.

Вариант 2

Задание 1

Прямая l_1 проходит через точки $(2;3)$ и $(8;1)$, прямая l_2 проходит через точки $(-1;-2)$ и $(5;6)$. Составив уравнения прямых, найти точку их пересечения. Для проверки результата сделать чертёж.

Задание 2

Найти уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $A(\sqrt{5};0)$ к расстоянию до прямой $l:\sqrt{5}x-9=0$ постоянно и равно $\sqrt{5}/3$. Изобразить полученную линию на координатной плоскости

Задание 3

Найти точку пересечения прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}$ и плоскости $x+2y-5z+20=0$. Отметить найденную точку в трёхмерной декартовой системе координат.

Вариант 3

Задание 1

Прямая l_1 проходит через точки $(-1;4)$ и $(6;2)$, прямая l_2 проходит через точки $(-4;-1)$ и $(5;3)$. Составив уравнения прямых, найти точку их пересечения. Для проверки результата сделать чертёж.

Задание 2

Найти уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $A(0;\sqrt{3})$ к расстоянию до прямой $l:\sqrt{3}\,y-4=0$ постоянно и равно $\sqrt{3}/2$. Изобразить полученную линию на координатной плоскости.

Задание 3

Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}$ и плоскости $x-3y+7z-24=0$. Отметить найденную точку в трёхмерной декартовой системе координат.

Вариант 4

Задание 1

Прямая l_1 проходит через точки $(1;-2)$ и $(8;-4)$, прямая l_2 проходит через точки $(2;2)$ и $(6;4)$. Составив уравнения прямых, найти точку их пересечения. Для проверки результата сделать чертёж.

Задание 2

Найти уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $A(\sqrt{20};0)$ к расстоянию до прямой $l:\sqrt{5}\,x-8=0$ постоянно и равно $\sqrt{5}/2$. Изобразить полученную линию на координатной плоскости.

Задание 3

Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{2}$ и плоскости $2x-y+4z=0$. Отметить найденную точку в трёхмерной декартовой системе координат.

Вариант 5

Задание 1

Прямая l_1 проходит через точки $(-2;3)$ и $(4;-3)$, прямая l_2 проходит через точки $(-3;1)$ и $(6;5)$. Составив уравнения прямых, найти точку их пересечения. Для проверки результата сделать чертёж.

Задание 2

Найти уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $A(0;\sqrt{12})$ к расстоянию до прямой $l:\sqrt{12}\,y-16=0$ постоянно и равно $\sqrt{12}/4$. Изобразить полученную линию на координатной плоскости.

Задание 3

Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$ и плоскости $3x+y-5z-12=0$. Отметить найденную точку в трёхмерной декартовой системе координат.

Вариант 6

Задание 1

Прямая l_1 проходит через точки $(-3;1)$ и $(6;3)$, прямая l_2 проходит через точки $(-1;6)$ и $(3;-2)$. Составив уравнения прямых, найти точку их пересечения. Для проверки результата сделать чертёж.

Задание 2

Найти уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $A(\sqrt{13};0)$ к расстоянию до прямой $l:\sqrt{13}\,x-9=0$ постоянно и равно $\sqrt{13}/3$. Изобразить полученную линию на координатной плоскости.

Задание 3

Найти точку пересечения прямой $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}$ и плоскости $x+3y-5z+9=0$. Отметить найденную точку в трёхмерной декартовой системе координат.

Вариант 7

Задание 1

Прямая l_1 проходит через точки $(-5;4)$ и $(-1;1)$, прямая l_2 проходит через точки $(1;-3)$ и $(4;-1)$. Составив уравнения прямых, найти точку их пересечения. Для проверки результата сделать чертёж.

Задание 2

Найти уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $A(\sqrt{15};0)$ к расстоянию до прямой $l:\sqrt{15}\,x-16=0$ постоянно и равно $\sqrt{15}/4$. Изобразить полученную линию на координатной плоскости.

Задание 3

Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$ и плоскости $x-2y+5z+17=0$. Отметить найденную точку в трёхмерной декартовой системе координат.

Вариант 8

Задание 1

Прямая l_1 проходит через точки $(2;5)$ и $(7;1)$, прямая l_2 проходит через точки $(-4;-3)$ и $(-2;-1)$. Составив уравнения прямых, найти точку их пересечения. Для проверки результата сделать чертёж.

Задание 2

Найти уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $A(-\sqrt{20};0)$ к расстоянию до прямой $l:\sqrt{5}\,x+8=0$ постоянно и равно $\sqrt{5}/2$. Изобразить полученную линию на координатной плоскости.

Задание 3

Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1}$ и плоскости $x-2y+4z-19=0$. Отметить найденную точку в трёхмерной декартовой системе координат.

Вариант 9

Задание 1

Прямая l_1 проходит через точки $(-3;6)$ и $(8;0)$, прямая l_2 проходит через точки $(1;-2)$ и $(6;4)$. Составив уравнения прямых, найти точку их пересечения. Для проверки результата сделать чертёж.

Задание 2

Найти уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $A(-\sqrt{5};0)$ к расстоянию до прямой $l:\sqrt{5}\,x+9=0$ постоянно и равно $\sqrt{5}/3$. Изобразить полученную линию на координатной плоскости.

Задание 3

Найти точку пересечения прямой $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1}$ и плоскости $2x-y+3z+20=0$. Отметить найденную точку в трёхмерной декартовой системе координат.

Вариант 10

Задание 1

Прямая l_1 проходит через точки $(3;3)$ и $(9;1)$, прямая l_2 проходит через точки $(-6;-3)$ и $(-1;0)$. Составив уравнения прямых, найти точку их пересечения. Для проверки результата сделать чертёж.

Задание 2

Найти уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $A(\sqrt{34};0)$ к расстоянию до прямой $l:\sqrt{34}\,x-25=0$ постоянно и равно $\sqrt{34}/5$. Изобразить полученную линию на координатной плоскости.

Задание 3

Найти точку пересечения прямой $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}$ и плоскости $2x-3y-5z-7=0$. Отметить найденную точку в трёхмерной декартовой системе координат.

Оглавление

ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методическое пособие по выполнению контрольных работ № 1–3
для студентов заочной формы обучения

Подписано в печать . Формат 60 × 84/16
Бумага писчая. Печать офсетная.
Усл. п. л. 4. Тираж экз. Заказ №

РИО ВоГУ 160000, г. Вологда, ул. С. Орлова, 6