Министерство образования и науки Российской Федерации
Вологодский государственный университет

Кафедра высшей математики

Высшая математика

Методическое пособие

Часть 1

Факультет заочного и дистанционного обучения

Направление подготовки 13.03.02 – электроэнергетика и электротехника

Профиль – электроснабжение

Вологда
2015

УДК: 629.113.004.5

Высшая математика : методическое пособие. Часть 1.– Вологда : ВоГУ, 2015. – 56 с.

Методическое пособие предназначено студентам заочной формы обучения для подготовки и выполнения контрольных работ по курсу «высшая математика» в первом семестре первого курса (I часть). В учебно-методическом пособии приведены необходимые теоретические сведения по разделу курса, рассмотрены основные приемы решения задач и приведены варианты контрольных работ.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Составители: О.Л. Крюкова, ст. преподаватель;
А.Л. Крюкова, ст. преподаватель кафедры математики
и методики математики ВоГУ.

Рецензенты: А.Р. Кашенков, канд. техн. наук, доцент кафедры математики и МПМ
Е.Е. Филиппова, канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель кафедры
информатики и математики Вологодского института права
и экономики Федеральной службы исполнения наказаний

Введение

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов заочной формы обучения по направлению подготовки электроэнергетика и электротехника, профиль: электроснабжение. Текст содержит варианты трех контрольных работ, которые необходимо самостоятельно выполнить студентам в первом семестре, разбор задач, аналогичных предложенным в контрольных. Кроме того, в пособии приведен справочный теоретический материал, необходимый для выполнения контрольных заданий. Номер варианта контрольной работы определяется в соответствии с последней цифрой шифра студента – номера его зачетной книжки. Каждая работа выполняется в отдельной тетради, задачи должны быть представлены в том порядке, в котором они указаны в контрольной работе. Компьютерное оформление работ на проверку не принимается.

Задачи для контрольных заданий

Контрольная работа № 1

Тема 1. Комплексные числа.

Тема 2. Основные понятия линейной алгебры.

Задача 1. Найти: а) область определения функции $f(z)$;

б) значение функции $f(z)$ в точке z_0.

1.1. $f(\mathrm{z})=\dfrac{2z}{36z^2-36z+13}$, $z_0=\dfrac{i}{3}$.

1.2. $f(\mathrm{z})=\dfrac{z+2}{16z^2-16z+5}$, $z_0=-\dfrac{1}{4}i$.

1.3. $f(\mathrm{z})=\dfrac{13z}{9z^2-18z+10}$, $z_0=2-i$.

1.4. $f(z)=\dfrac{25(z+2)}{16z^2-32z+17}$, $z_0=-1-i$.

1.5. $f(\mathrm{z})=\dfrac{z-2i}{4z^2-8z+5}$, $z_0=2+i$.

1.6. $f(\mathrm{z})=\dfrac{5z}{25z^2-50z+26}$, $z_0=1,2-0,2i$.

1.7. $f(\mathrm{z})=\dfrac{z-6}{4z^2-16z+17}$, $z_0=3-i$.

1.8. $f(\mathrm{z})=\dfrac{5(z-1)}{9z^2-36z+37}$, $z_0=3+i$.

1.9. $f(\mathrm{z})=\dfrac{26z}{16z^2-64z+65}$, $z_0=2{,}5+0{,}5i$.

1.10. $f(\mathrm{z})=\dfrac{2z-2}{4z^2-24z+37}$, $z_0=3{,}5-0{,}5i$.

Задача 2. Найти все решения уравнения, используя формулу Муавра, ответ записать в тригонометрической форме.

2.1. $iz^3+4+i=0$.

2.2 $iz^3+3+i=0$.

2.3. $iz^3+4+3i=0$.

2.4. $iz^3+3+2i=0$.

2.5. $iz^3+2+i=0$.

2.6. $iz^3+6+i=0$.

2.7. $iz^3+1+6i=0$.

2.8. $iz^3+6+4i=0$.

2.9. $iz^3+1+4i=0$.

2.10. $iz^3+1+5i=0$.

Задача 3. Решить матричное уравнение $A\cdot X=B\cdot C+k\cdot D$

3.1. $A=\begin{pmatrix}5&3&-1\\2&0&4\\3&5&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&4&-2\\-3&-2&0\\1&5&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\\2&-2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\\1&0\end{pmatrix}$, $k=2$.

3.2. $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\4&5&2\\-1&0&-7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&4&5\\0&1&3\\2&-2&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&3\\-1&0\\2&2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&-1\\0&2\\1&0\end{pmatrix}$, $k=-1$

3.3. $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ k=-2$

3.4. $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 7\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 4 & -10\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ k=3$

3.5. $A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 0\\ -7 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ k=-3$

3.6. $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 7 & 3 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 6 & -1\\ -1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix},\ k=2$

3.7. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 7 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ k=-2$

3.8. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -5\\ 4 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & -3 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ k=-1$

3.9. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 6 & -2\\ 4 & 0 & 1\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ k=3$

3.10. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 0 & 3\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ -3 & -1 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ k=2$

Задача 4. Решить систему уравнений, используя правило Крамера

4.1. $\begin{cases}2x-y-3z=5,\\ 3x+4y-5z=12,\\ \quad 2y+7z=16.\end{cases}$ 4.2. $\begin{cases}2x+3y+4z=5,\\ 3x+4y-z=3,\\ 4x+5y-2z=3.\end{cases}$

4.3. $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$ 4.4. $\begin{cases} 3x+y-5z=-7, \\ 2x-3y+4z=-1, \\ 5x-y+3z=0. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x-y-6z=-1,. \\ 3x-2y=8. \end{cases}$ 4.6. $\begin{cases} 3x-y=5, \\ -2x+y+z=0, \\ 2x-y+4z=15. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 11x+3y-z=-9, \\ 2x+5y-5z=-2, \\ x+y+z=1. \end{cases}$ 4.8. $\begin{cases} 2x+y+4z=20, \\ 2x-y-3z=3, \\ 3x+4y-5z=-8. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} 2x-y-3z=-9, \\ x+2y+z=3, \\ 3x+y-z=-1. \end{cases}$ 4.10. $\begin{cases} x+5y+z=-7, \\ 2x-y-z=0, \\ x-2y-z=2. \end{cases}$

Задача 5. Доказать совместность системы и найти ее решение

5.1. $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=3 \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=2 \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=1 \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=5 \\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0 \\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=1 \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=2 \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0 \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} 6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-10x_5=1 \\ -4x_1+6x_2-14x_3-3x_4+8x_5=-2 \\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=3 \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=2 \\ x_1+10x_2-3x_3-2x_4-x_5=3 \\ 4x_1+19x_2-4x_3-5x_4=7 \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 2 \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 3 \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = -1 \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = -7 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 1 \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 3 \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = -6 \end{cases}$

Контрольная работа № 2

Тема 3. Основные понятия векторной алгебры.

Тема 4. Аналитическая геометрия в пространстве.

Тема 5. Аналитическая геометрия на плоскости.

Задача 1. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}\ и\ \overline{AC}$ и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах

1.1. A(7, 0, 2), B(7, 1, 3), C(8, –14, 2).

1.2. A(2, 3, 2), B(–1, –3, –13), C(–3, –7, –3).

1.3. A(2, 2, 7), B(0, 0, 6), C(–2, 5, 7).

1.4. A(–1, 2, –3), B(0, 1, –2), C(–3, 4, –5).

1.5. A(0, 3, –6), B(9, 3, 6), C(12, 3, 3).

1.6. A(3, 3, –1), B(5, 1, –2), C(4, 1, –3).

1.7. A(–2, 1, 1), B(2, 3, –2), C(0, 0, 3).

1.8. A(1, 4, –1), B(–2, 4, –5), C(8, 4, 0).

1.9. A(0, 1 ,0), B(0, 2, 1), C(1, 2, 0).

1.10. A(–4, 0, 4), B(–1, 6, 7), C(1, 10, 9).

Задача 2. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти:

а) уравнение прямой A_1A_2;

б) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

в) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

г) вычислить объем пирамиды и расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$.

2.1. $A_1(4, 2, 5)$, $A_2(0, 7, 2)$, $A_3(0, 2, 7)$, $A_4(1, 5, 0)$

2.2. $A_1(4, 4, 10)$, $A_2(4, 10, 2)$, $A_3(2, 8, 4)$, $A_4(9, 6, 4)$

2.3. $A_1(4, 8, 5)$, $A_2(6, 9, 4)$, $A_3(2, 10, 10)$, $A_4(7, 5, 9)$

2.4. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(8, 7, 4)$, $A_3(8, 10, 4)$, $A_4(4, 7, 8)$

2.5. $A_1(10, 6, 6)$, $A_2(-2, 8, 2)$, $A_3(6, 8, 9)$, $A_4(7, 10, 3)$

2.6. $A_1(1, 8, 2)$, $A_2(5, 2, 6)$, $A_3(5, 7, 4)$, $A_4(4, 10, 9)$

2.7. $A_1(6, 6, 5)$, $A_2(4, 9, 5)$, $A_3(4, 6, 11)$, $A_4(6, 9, 3)$

2.8. $A_1(7, 2, 2)$, $A_2(5, 7, 7)$, $A_3(5, 3, 1)$, $A_4(2, 3, 7)$

2.9. $A_1(8, 6, 4)$, $A_2(10, 5, 5)$, $A_3(5, 6, 8)$, $A_4(8, 10, 7)$

2.10. $A_1(7, 7, 3)$, $A_2(6, 5, 8)$, $A_3(3, 5, 8)$, $A_4(8, 4, 1)$

Задача 3. Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

а) уравнение высоты CH;

б) уравнение медианы AM;

в) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

г) уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно стороне AB.

3.1. $A(-2, 4)$, $\mathrm{B}(3, 1)$, $\mathrm{C}(10, 7)$.

3.2. $A(-3, -2)$, $\mathrm{B}(14, 4)$, $\mathrm{C}(6, 8)$.

3.3. $A(1, 7)$, $\mathrm{B}(-3, -1)$, $\mathrm{C}(11, -7)$.

3.4. $A(1, 0),\ \text{B}(-1, 4),\ \text{C}(9, 5)$.

3.5. $A(1, -2),\ \text{B}(7, 1),\ \text{C}(3, 7)$.

3.6. $A(-2, -3),\ \text{B}(1, 6),\ \text{C}(6, 1)$.

3.7. $A(-4, 2),\ \text{B}(-6, 6),\ \text{C}(6, 2)$.

3.8. $A(4, -3),\ \text{B}(7, 3),\ \text{C}(1, 10)$.

3.9. $A(4, -4),\ \text{B}(8, 2),\ \text{C}(3, 8)$.

3.10. $A(-3, -3),\ \text{B}(5, -7),\ \text{C}(7, 7)$.

Задача 4. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет заданным условиям:

4.1. Отношение расстояний от точки M до точки F(4; 0) и от точки M до прямой $x = 6,25$ равно 0,8.

4.2. Отношение расстояний от точки M до точки F(3; 0) и от точки M до прямой $x = 25/3$ равно 0,6.

4.3. Отношение расстояний от точки M до точки F(5; 0) и от точки M до прямой $x = 1,8$ равно 5/3.

4.4. Отношение расстояний от точки M до точек в $A(2, 3)$ *и* $B(-1, 2)$ равно 0,75.

4.5. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(4, 0)$ $B(-2, 2)$ равна 28.

4.6. Отношение расстояний от точки M до точки F(-4; 0) и от точки M до прямой $x = -6,25$ равно 0,8.

4.7. Отношение расстояний от точки M до точки F(-3; 0) и от точки M до прямой $x = -25/3$ равно 0,6.

4.8. Отношение расстояний от точки M до точки F(-5; 0) и от точки M до прямой $x = -1,8$ равно 5/3.

4.9. Отношение расстояний от точки M до точки F(5; 0)и от точки M до прямой $x = 3,2$ равно 1,25.

4.10. Отношение расстояний от точки M до точек в $A(-3, 5)$ *и* $B(4, 2)$ равно 1/3.

Контрольная работа № 3

Тема 6. Предел последовательности. Предел функции, непрерывность функции.

Задача 1. Вычислить пределы числовых последовательностей.

1.1. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$,;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

1.2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

1.3. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-5}\right)n\sqrt{n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$.

1.4. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}\right]$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

1.5. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n\left(n^2+5\right)}}{\sqrt{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

1.6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+..+n}$.

1.7. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+3}-n\right]$.

1.8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right]$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$.

1.9. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right]$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$.

1.10. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n\left(n^4-1\right)}-\sqrt{n^5-8}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$.

Задача 2. Вычислить пределы функций

2.1. а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+4}{x^3+5x^2-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6+3x^4+4x}{x^4+x^3-2x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+8}{x^2+x+5}\right)^{-3x^2}$; е $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{3x^2}$.

2.2. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+x^2+x}{x^4+5x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+2x^4+4x+1}{x^7+x^3-2x^2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{x-12}}{x^2-2x+8}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+7}{x^2-2x+4}\right)^{-4x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{5\operatorname{tg}x^2}$

2.3. а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+x}{5x^3+5x^2-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+3x^4+2x}{10x^4-2x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{3x+3}-\sqrt{x+7}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-2x+1}\right)^{1-x}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin4x}{\sin3x}$.

2.4. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^6+5x^3-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+x}{x^4+x^3-2x+7}$; г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-2}{\sqrt{x+3}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2+3}\right)^{-x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{3\sin^2 x}$.

2.5. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^3-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+5x^2+1}{x^4-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x^3+x^2}{x^5+2x^3+x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4+x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+4}{x^2+2x+1}\right)^{1+x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\operatorname{arctg}2x}{1-\cos 2x}$.

2.6. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^4-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+10x^2+2x}{5x^3-x^2+2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x-12}{x^3+x^2-2x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+5}\right)^{-5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot\operatorname{tg}x}$.

2.7. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2+5x-14}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+15x^2+x}{x^5+x^4+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^8+10x^4+x}{x^5+x^3+2x}$; г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+5}}{(\mathrm{x}+1)^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x-1}{x^2}\right)^{2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2\operatorname{arctg}x}$.

2.8. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+x^3+10x}{x^5+2x^4-2x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^4+3x}{x^7+x^5-2x^3+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{5-x}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x+5}\right)^{2x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot\operatorname{tg}2x}$.

2.9. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+10x^2+3x}{-2x^3+x^2-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^6+x^4+3x^2}{x^7+5x^3-2x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+3x+5}\right)^{x^2+2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x^2}{5x^2}$.

2.10. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^3+64}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+x-1}{6x^3+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+x^4+x^3}{x^6-x^3-x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+x+5}\right)^{x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \operatorname{tg} 7x}{5x^2}$.

Задача 3. Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики

3.1. $f(\mathrm{x})=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x<1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$

3.2. $f(\mathrm{x})=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2 \\ -x+4, & x>2 \end{cases}$

3.3. $f(\mathrm{x})=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ -(x-1)^2, & 0<x<2 \\ 2x-3, & x\ge 2 \end{cases}$

3.4. $f(\mathrm{x})=\begin{cases} \sin x, & x<0 \\ x, & 0\le x<2 \\ x+2, & x\ge 2 \end{cases}$

3.5. $f(\mathrm{x})=\begin{cases} -x+2, & x<-2 \\ x^3, & -2\le x\le 1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$

3.6. $f(\mathrm{x})=\begin{cases}\cos x, & x\le \pi/2\\ x, & \pi/2\le x<3\\ x^2, & x\ge 3\end{cases}$

3.7. $f(\mathrm{x})=\begin{cases}x, & x<0\\ 2^x-1, & 0\le x<1\\ 3-x, & x\ge 1\end{cases}$

3.8. $f(\mathrm{x})=\begin{cases}x-1, & x<1\\ x^2+2, & 1\le x\le 2\\ -2x, & x>2\end{cases}$

3.9. $f(\mathrm{x})=\begin{cases}x^3, & x<-1\\ x-1, & -1\le x\le 3\\ -x+5, & x>3\end{cases}$

3.10. $f(\mathrm{x})=\begin{cases}-1, & x<0\\ \cos x, & 0\le x\le \pi\\ 1-x, & x>\pi\end{cases}$

Разбор заданий контрольной работы № 1

Задача 1. Найти: а) область определения функции $f(z)=\dfrac{4z+1}{4z^2-8z+13}$;

б) значение функции $f(z)=\dfrac{4z+1}{4z^2-8z+13}$ в точке $z_0=0,5-1,5i$.

Решение.

а) Так как $f(z)$ является дробно-рациональной функцией, то область определения этой функции представляет собой множество всех комплексных чисел, исключая те, которые обращают знаменатель в ноль. Составим и решим уравнение $4z^2-8z+13=0$. Уравнение имеет комплексные корни, так как его дискриминант $D=64-208=-144<0$. Найдем корни: $z_{1,2}=\dfrac{8\pm 12i}{8}=1\pm\dfrac{3}{2}i$. Таким образом, областью определения функции $f(z)$ является множество всех комплексных чисел, кроме $z=1\pm\dfrac{3}{2}i$.

б) Найдем значение функции в заданной точке $f(0,5-1,5i)=\dfrac{4(0,5-1,5i)+1}{4(0,5-1,5\mathrm{i})^2-8(0,5-1,5\mathrm{i})+13}$.

Выполним действия

$$\frac{4(0,5-1,5i)+1}{4(0,5-1,5\mathrm{i})^2-8(0,5-1,5\mathrm{i})+13}=\frac{2-6i+1}{4(0,25-1,5i+2,25i^2)-(4-12i)+13}=$$

$$=\frac{3-6i}{1-6i-9-4+12i+13}=\frac{3-6i}{1+6i}.$$

Для того чтобы поделить два комплексных числа, числитель и знаменатель дроби умножим на число, сопряженное знаменателю, получим $\dfrac{3-6i}{1+6i}=\dfrac{(3-6i)\cdot(1-6i)}{(1+6i)\cdot(1-6i)}=\dfrac{3-21i+36i^2}{1+36}=\dfrac{-33-21i}{37}$.

Таким образом, $f(0,5-1,5i)=\dfrac{-33-21i}{37}$.

Задача 2. Найти все решения уравнения $iz^3+5+12i=0$, используя формулу Муавра, ответ записать в тригонометрической форме.

Решение.

Преобразуем уравнение так, чтобы выразить z^3.

$z^3 = \dfrac{-5-12i}{i}$ или $z^3 = -12+5i \Rightarrow z = \sqrt[3]{-12+5i}$.

Найдем тригонометрическую форму комплексного числа:

$\omega = -12+5i$. $|\omega| = \sqrt{144+25} = 13$,

$\operatorname{tg}(\arg\omega) = -\dfrac{5}{12} \Rightarrow \arg\omega = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12}$ так как $\dfrac{\pi}{2} < \arg\omega < \pi$.

Тогда $\omega = -12+5i = 13\left(\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12}\right) + i\sin\left(\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12}\right)\right)$.

Используем формулу Муавра

$$z = \sqrt[3]{-12+5i} = \sqrt[3]{13\left(\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right) + i\sin\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)\right)}$$

$$= \sqrt[3]{13}\left(\cos\left(\frac{\pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 2\pi k}{3}\right)\right), \quad k = 0,1,2 \ .$$

Уравнение $iz^3 + 5 + 12i = 0$ имеет 3 комплексных корня, получаемых при различных значениях k.

$$z_1 == \sqrt[3]{13}\left(\cos\left(\frac{\pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{12}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{12}}{3}\right)\right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{13}\left(\cos\left(\frac{-\operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 3\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 3\pi}{3}\right)\right),$$

$$z_3 = \sqrt[3]{13}\left(\cos\left(\frac{-\operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 5\pi}{3}\right)\right).$$

Задача 3. Решить матричное уравнение $A\cdot X = B\cdot C + k\cdot D$, где

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 11 & 0 & -5 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 4 & -10 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ k=3$$

Решение:

Убедимся, что A матрица не является вырожденной, то есть обладает обратной матрицей. Для этого вычислим её определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 11 & 0 & -5 \\ -8 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель, например, по элементам второго столбца:

$$\det A = (-1)^{1+2}\cdot 7\cdot \begin{vmatrix} 11 & -5 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} + \left(-1\right)^{2+2}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -7\cdot \begin{vmatrix} 11 & -5 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = -7\cdot(11\cdot 2-(-8)\cdot(-5)) - 2\cdot(4\cdot(-5)-11\cdot 2) = 210.$$

Определитель отличен от нуля, поэтому обратная матрица существует, и мы можем вычислить обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{T}.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2\cdot(0\cdot 2 - 2\cdot(-5)) = 10$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 11 & -5 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3\cdot(11\cdot 2 - (-8)\cdot(-5)) = 18$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} 11 & 0 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4\cdot(11\cdot 2 - 0\cdot(-8)) = 22$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3\cdot(7\cdot 2 - 2\cdot 2) = -10$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (4 \cdot 2 - 2 \cdot (-8)) = 24$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (4 \cdot 2 - 7 \cdot (-8)) = -64$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (7 \cdot (-5) - 2 \cdot 0) = -35$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (4 \cdot (-5) - 2 \cdot 11) = 42$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (0 \cdot 4 - 7 \cdot 11) = -77$$

Таким образом, матрица, составленная из алгебраических дополнений, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 10 & 18 & 22 \\ -10 & 24 & -64 \\ -35 & 42 & -77 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Транспонирование матрицы – такое преобразование этой матрицы, при котором ее строки становятся столбцами с теми же номерами. Транспонированная матрица к матрице $(*)$ будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} 10 & -10 & -35 \\ 18 & 24 & 42 \\ 22 & -64 & -77 \end{pmatrix},$$

тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{210} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -10 & -35 \\ 18 & 24 & 42 \\ 22 & -64 & -77 \end{pmatrix} \text{ или } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{21} & -\frac{1}{21} & -\frac{1}{6} \\ \frac{3}{35} & \frac{4}{35} & \frac{1}{5} \\ \frac{11}{105} & -\frac{32}{105} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, уравнение имеет единственное решение. Выполним преобразование левой части уравнения

$$B=\begin{pmatrix}4 & 4 & -10\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ k=3$$

$$B\cdot C+k\cdot D=\begin{pmatrix}4 & 4 & -10\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Обозначим произведение матриц $B\cdot C=F$, где F матрица размерности 3×2 элементами $f_{ij}=b_{i1}\cdot c_{1j}+b_{i2}\cdot c_{2j}$, $i=1,2,3$.

Получим

$$F=B\cdot C=\begin{pmatrix}4 & 4 & -10\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 0+4\cdot 1-10\cdot(-1) & 4\cdot 3+4\cdot 1-10\cdot 0\\ 2\cdot 0+4\cdot 1-1\cdot(-1) & 2\cdot 3+4\cdot 1-1\cdot 0\\ 0\cdot 0+1\cdot 1-3\cdot(-1) & 0\cdot 3+1\cdot 1-3\cdot 0\end{pmatrix}.$$

$$F=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 5 & 10\\ 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Матрица $3D=3\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ -3 & 3\\ 0 & -3\end{pmatrix}$

и $F+3D=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 5 & 10\\ 4 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 0\\ -3 & 3\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & 16\\ 2 & 13\\ 4 & -21\end{pmatrix}.$

Исходное уравнение принимает вид

$$\begin{pmatrix}4 & 7 & 2\\ 11 & 0 & -5\\ -8 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}20 & 16\\ 2 & 13\\ 4 & -21\end{pmatrix}.$$

Умножим левую и правую части уравнения слева на A^{-1}, получаем

$$X=\frac{1}{210}\cdot\begin{pmatrix}10 & -10 & -35\\ 18 & 24 & 42\\ 22 & -64 & -77\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}20 & 16\\ 2 & 13\\ 4 & -21\end{pmatrix},$$

$$X = \frac{1}{210} \cdot \begin{pmatrix} 40 & 765 \\ 576 & -282 \\ 4 & 1137 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Решить систему уравнений, используя правило Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Решение:

Вычислим определитель матрицы, составленной из коэффициентов, стоящих при переменных в предложенной системе линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -12 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Его назовем главным определителем, $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -12 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -99$. Если главный определитель отличен от нуля, то система имеет единственное решение и найти его можно по правилу Крамера. Для этого заменим в матрице коэффициентов первый столбец на столбец свободных членов, и вычислим определитель такой матрицы:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -12 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -12 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Аналогичным образом, получаем матрицы с замененными вторым и третьим столбцами соответственно, затем вычислим определители этих матриц.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -12 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -12 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -66$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 33$$

Решение системы можно найти таким образом:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=0,\;\; x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-66}{-99}=\frac{2}{3},\;\; x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{33}{-99}=-\frac{1}{3}.$$

Задача 5. Доказать совместность системы и найти ее решение

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=1\\ 4x_1+5x_2-7x_3+x_4=2\\ 5x_1+7x_2-8x_3+3x_4=3\\ 2x_1+x_2-5x_3-3x_4=0 \end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1\\ 4 & 5 & -7 & 1 & 2\\ 5 & 7 & -8 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Вычтем из второй строки первую, предварительно умноженную на 4

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -3 & -7 & -2\\ 5 & 7 & -8 & 3 & 3\\ 2 & 1 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Вычтем из третьей строки первую, умноженную на 5

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -3 & -7 & -2\\ 0 & -3 & -3 & -7 & -2\\ 2 & 1 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Наконец, вычтем из четвертой строки первую, умноженную на 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -3 & -7 & -2\\ 0 & -3 & -3 & -7 & -2\\ 0 & -3 & -3 & -7 & -2 \end{array}\right)$$

Затем вторую строку умножим на – 1 и прибавим ее к третьей и четвертой строкам

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен 2. Число свободных неизвестных в общем случае равно $n-r$, где n – количество неизвестных системы, r – ранг матрицы системы. У нас число свободных неизвестных равно 4 – 2 = 2.

Новой расширенной матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ \quad 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}.$$

Пусть x_3, x_4 – свободные переменные, принимающие любые действительные значения. Все остальные неизвестные выразим через них. Из второго уравнения системы выразим $x_2 = \frac{2}{3} - x_3 - \frac{7}{3}x_4$.

Подставляя найденное выражение для x_2 в первое уравнение, получаем

$$x_1 = 1 - 2\cdot\left(\frac{2}{3} - x_3 - \frac{7}{3}x_4\right) - 2x_4 + x_3$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} + 3x_3 + \frac{8}{3}x_4.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид $\left(-\frac{1}{3} + 3x_3 + \frac{8}{3}x_4;\ \frac{2}{3} - x_3 - \frac{7}{3}x_4;\ x_3;\ x_4\right)(x_3,\ x_4 \in \mathbb{R})$.

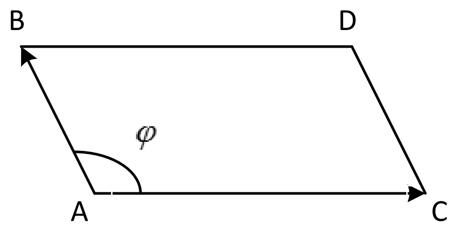
Разбор заданий контрольной работы № 2

Тема 3. Основные понятия векторной алгебры.

Тема 4. Аналитическая геометрия в пространстве.

Тема 5. Аналитическая геометрия на плоскости.

Задача 1. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}\ и\ \overline{AC}$ и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, если известны координаты точек $A(1;\,3;-2),\ B(6;\,3;\,2),\ C(-2;4;\,0)$.



Решение. Найдем координаты векторов $\overline{AB}\ и\ \overline{AC}$.

$\overline{AB}=(5;\,0;\,4)\ и\ \overline{AC}=(-3;1;\,2)$.

Угол между векторами найдем с помощью скалярного произведения векторов $\cos\varphi=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}$, где $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=5\cdot(-3)+0\cdot1+4\cdot2=-7$ и

$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{5^2+0^2+4^2}=\sqrt{41}$, $\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}=\sqrt{13}$.

Тогда $\cos\varphi=\dfrac{-7}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{13}}$.

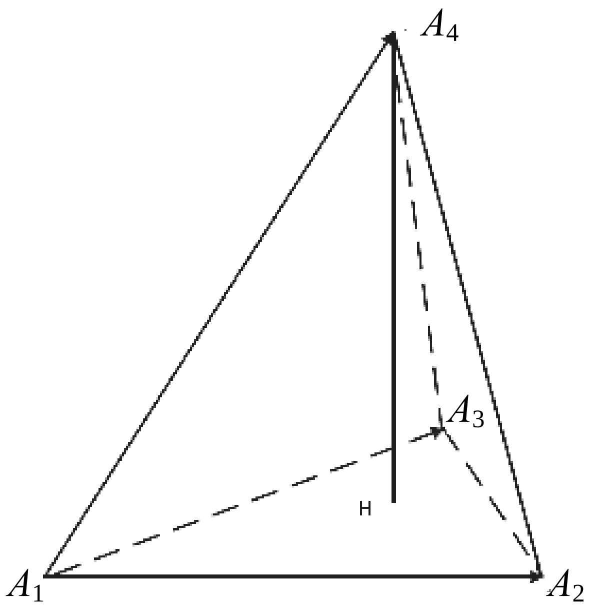
Площадь параллелограмма найдем с помощью модуля векторного произведения векторов $\overline{AB}\ и\ \overline{AC}$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 5 & 0 & 4\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}5 & 4\\ -3 & 2\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}5 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}\overline{k}=-4\overline{i}-2\overline{j}+5\overline{k}$$

и $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+5^2}=\sqrt{45}$.

Задача 2. Даны координаты вершин пирамиды

$A_1(-1;-2;\,3),\ A_2(2;\,3;\,1),\ A_3(1;4;-1),\ A_4(5;\,3;\,0)$. Найти уравнение прямой A_1A_2, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, вычислить объем пирамиды и расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$.



Решение. Найдем координаты векторов

$\overline{A_1A_2} = (3;5;4)$, $\overline{A_1A_3} = (2;6;-4)$, $\overline{A_1A_4} = (6;5;-3)$.

Напишем уравнение прямой A_1A_2, проходящей через точку A_1 коллинеарно вектору $\overline{A_1A_2}$: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z-3}{4}$.

Для того чтобы написать уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, используем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$.

Раскрывая определитель, получаем уравнение

$-44(x+1) + 20(y+2) + 8(z-3) = 0$.

Упростим полученный результат и находим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$: $11x - 5y - 2z - 5 = 0$.

Нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$ $\overline{n} = (11; -5; -2)$ коллинеарен высоте пирамиды A_4H , а значит он является направляющим вектором прямой A_4H .

Таким образом, уравнение высоты A_4H имеет вид

$$\frac{x-5}{11} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z}{-2}.$$

Объем пирамиды вычислим используя геометрический смысл смешанного произведения: $V = \frac{1}{6}\left|\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4}\right|$. Смешанное произведение вычислим как определитель третьего порядка, составленный из координат векторов $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & -4 \\ 6 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -188$. Следовательно, объем пирамиды $V = \frac{188}{6} = 31\frac{1}{3}$.

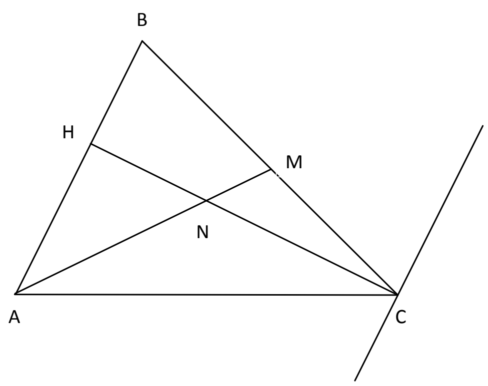
Расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$ можно вычислить, если воспользоваться формулой $d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где $Ax + By + Cz + D = 0$ уравнение некоторой плоскости, а $M_0(x_0; y_0; z_0)$ точка, не принадлежащая данной плоскости.

Тогда $d = \frac{\left|11 \cdot 5 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - 5\right|}{\sqrt{11^2 + (-5)^2 + (-2)^2}} = \frac{35}{\sqrt{150}} = \frac{7}{\sqrt{6}}$.

Задача 3. Даны координаты вершин треугольника

$A(1, -3),\ \mathrm{B}(0, 7),\ \mathrm{C}(-2, 4)$.

Найти: а) уравнение высоты CH; б) уравнение медианы AM; в) точку N пересечения медианы AM и высоты CH; г) уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно стороне AB.



Решение.

а) Найдем координаты вектора $\overline{AB} = (-1; 10)$. Т.к. высота $CH \perp \overline{AB}$, то $\overline{AB}$ является нормальным вектором для прямой CH, таким образом, уравнение высоты имеет вид $-1 \cdot (x + 2) + 10 \cdot (y - 4) = 0$.

Упростим полученное уравнение и получим $x-10y+42=0$.

б) Вычислим координаты точки $M(-1;\,5{,}5)$, как координаты середины отрезка BC. Тогда уравнение прямой, проходящей через две заданные точки имеет вид $\dfrac{x-1}{-1-1}=\dfrac{y+3}{5{,}5+3}$.

Выполним преобразование полученного уравнения

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{8{,}5}\Rightarrow 17x+4y-5=0.$$

в) Вектор $\overline{AB}$ коллинеарен искомой прямой, а значит, служит для этой прямой направляющим вектором. Каноническое уравнение этой прямой имеет вид $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-4}{10}$. Выполнив преобразования, получим $10x+y+16=0$.

Задача 4. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки $A(3;-4)$ на расстоянии в три раза большем, чем от прямой $x=5$.

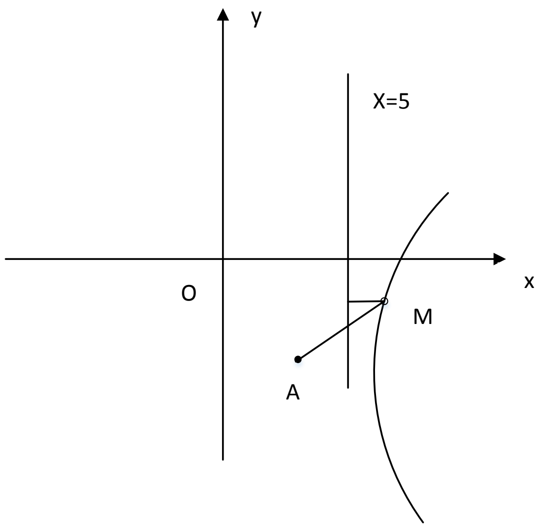


Рис. 1

Решение. Пусть точка $M(x;y)$ принадлежит искомой линии. Тогда расстояние $AM=\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}$ в три раза больше, чем расстояние $MN=|x-5|$. Составим уравнение $\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=3|x-5|$ и преобразуем его. $(x-3)^2+(y+4)^2=9(x-5)^2\Rightarrow x^2-6x+9+(y+4)^2=9x^2-90x+225$

$\Rightarrow 8x^2-84x+216-(y+4)^2=0$. Продолжим преобразования $8\left(x^2-\dfrac{21}{2}x\right)+216-(y+4)^2=0$. Выделим полный квадрат по переменной x и получим $8\left(x-\frac{21}{4}\right)^2-(y+4)^2=\frac{9}{2}$ или $\frac{\left(x-\frac{21}{4}\right)^2}{\frac{9}{16}}-\frac{(y+4)^2}{\frac{9}{2}}=1$. Получили уравнение гиперболы, центр которой находится в точке с $O_1\left(\frac{21}{4};-4\right)$, а полуоси $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

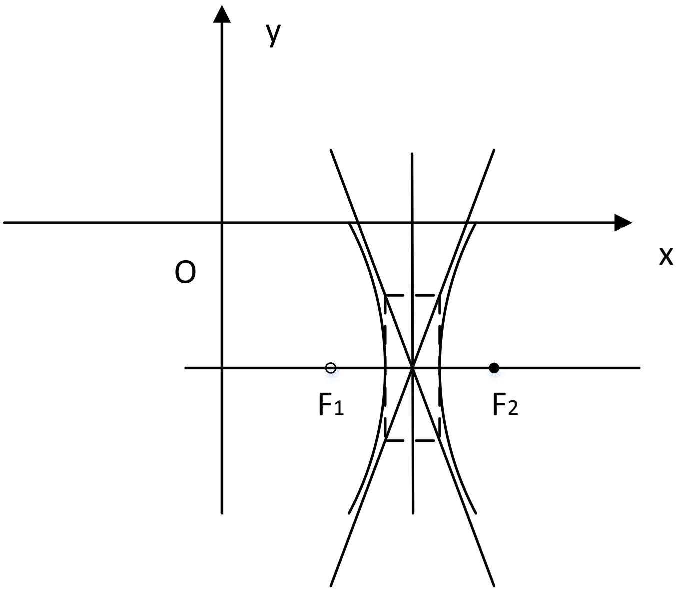


Рис. 2

Разбор заданий контрольной работы № 3

Тема 6. Предел последовательности. Предел функции, непрерывность функции.

Задача 1. а) Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3-(n+1)^3}{(n+2)^4-(n-2)^4}.$$

Решение. Числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают, поэтому дробь необходимо преобразовать. Сначала используем формулы сокращенного умножения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3-(n+1)^3}{(n+2)^4-(n-2)^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3+12n^2+6n+1-n^3-3n^2-3n-1}{\left((n+2)^2-(n-2)^2\right)\left((n+2)^2+(n-2)^2\right)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{7n^3 + 9n^2 + 3n}{8n \cdot (2n^2 + 8)} = \lim_{n \to \infty} \frac{7n^3 + 9n^2 + 3n}{8n^3 + 64n}.$$

Для того чтобы избавиться от неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$, поделим числитель и знаменатель на старшую степень переменной, т.е. на n^3. Получим

$$\lim_{n \to \infty} \frac{7 + 9\frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^2}}{8 + 64\frac{1}{n^2}} = \frac{7}{8}.$$

б) Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \left(\sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 4} \right).$$

Решение. Для того чтобы раскрыть неопределенность $\infty - \infty$, преобразуем общий член последовательности $n^2 \left(\sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 4} \right)$, умножив и поделив его на выражение, сопряженное выражению в скобках

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \left(\sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 4} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 \left(\sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 4} \right)\left(\sqrt{n^4 + 1} + \sqrt{n^4 - 4} \right)}{\left(\sqrt{n^4 + 1} + \sqrt{n^4 - 4} \right)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 \cdot 5}{\left(\sqrt{n^4 + 1} + \sqrt{n^4 - 4} \right)}$$

Поделив числитель и знаменатель на старшую степень неизвестного, получим $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^4}} - \sqrt{1 - \frac{4}{n^4}} \right)} = \dfrac{5}{2}$.

в) Вычислить предел числовой последовательности $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)! - (n+2)!}{n! + (n+2)!}$.

Решение. По определению число $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. Преобразуем дробь и получим $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)! + (n+2)!}{n! + (n+2)!} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)!(1 + (n+2))}{n!(1 + (n+1)(n+2))} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)(3+n)}{1 + (n+1)(n+2)}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 4n + 3}{n^2 + 3n + 3} = 1.$$

Задача 2.

1) Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$.

Решение. Используя основные теоремы о пределах, видим, что $\lim\limits_{x\to -3}(2x^2+5x-3)=0$ и $\lim\limits_{x\to -3}(3x^2+10x+3)=0$. Таким образом, выражение $\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$ представляет неопределенность $\dfrac{0}{0}$ при $x\to -3$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, числитель и знаменатель дроби разложим на множители, найдя корни многочленов. Уравнение $2x^2+5x-3=0$ имеет корни $x_1=-3,\ x_2=\dfrac{1}{2}$. Уравнение $3x^2+10x+3=0$ имеет корни $x_1=-3,\ x_2=-\dfrac{1}{3}$. Тогда $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(2x-1)\cdot(x+3)}{(3x+1)\cdot(x+3)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x-1}{3x+1}=\dfrac{7}{8}$.

2) Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^2+4x-10}{4x^4+5x^3-2x}$.

Решение. Так как числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при неограниченном возрастании аргумента, то выражение $\dfrac{2x^4-5x^2+4x-10}{4x^4+5x^3-2x}$ представляет неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Раскроем эту неопределенность, поделив числитель и знаменатель дроби на старшую степень переменного т.е. на x^4. Получим $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{10}{x^4}}{4+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^3}}=\dfrac{1}{2}$.

3) Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+3x^4+4x^2}{100x^4+99x^3}$.

Решение. Так же как в предыдущем случае, неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$ и раскрываем ее аналогично. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+3x^4+4x^2}{100x^4+99x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}}{\frac{100}{x}+\frac{99}{x^2}}=\infty$.

4) Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{11-x}}$.

Решение. Выражение $\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{11-x}}$ представляет неопределенность $\frac{0}{0}$ при $x \to 2$. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, преобразуем дробь, умножив сначала числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю

$$\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{11-x}} = \frac{\left(\sqrt{x^2+12}-4\right)\cdot\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{11-x}\right)}{\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{11-x}\right)\cdot\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{11-x}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+12}-4\right)\cdot\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{11-x}\right)}{(4x+1)-(11-x)} = \frac{\left(\sqrt{x^2+12}-4\right)\cdot\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{11-x}\right)}{5x-10}.$$ Затем аналогично умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю исходной дроби

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+12}-4\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)\cdot\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{11-x}\right)}{(5x-10)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)} = \frac{\left(x^2-4\right)\cdot\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{11-x}\right)}{5\cdot(x-2)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)} =$$

$$= \frac{\left(x^2-4\right)\cdot\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{11-x}\right)}{5\cdot(x-2)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)} = \frac{(x-2)\cdot\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{11-x}\right)}{5\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)}.$$ Выполнив преобразования, вычислим предел, используя основные теоремы о пределах

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cdot\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{11-x}\right)}{5\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)} = \frac{4\cdot(3+3)}{5\cdot(4+4)} = \frac{3}{5}.$$

5) Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2}\right)^{-x^2+2}$.

Решение. Убедимся, что выражение $\left(\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2}\right)^{-x^2+2}$ представляет неопределенность вида 1^∞. Действительно, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2}=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2+2)=-\infty$. Преобразуем основание степени $\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2}=1+\frac{2}{x^2+2x+2}$, тогда вся степень может быть преобразована следующим образом $\left(1+\frac{2}{x^2+2x+2}\right)^{\frac{(x^2+2x+2)\cdot(-x^2+2)}{x^2+2x+2}}$. Продолжим вычисление предела, используя свойство непрерывности функции $\mathring{a}^x$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2}\right)^{-x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x^2+2x+2}\right)^{x^2+2x+2}\right)^{\frac{-x^2+2}{x^2+2x+2}}=(e^2)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+2}{x^2+2x+2}}=\mathring{a}^{-2}.$$

5) Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{artg}^2\,3x}{1-\cos^2 4x}$.

Решение. Воспользуемся таблицей эквивалентных бесконечно малых величин $\mathrm{arctg}\,a : a$, $1-\cos a : \frac{a^2}{2}$ при $\alpha\to 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{artg}^2\,3x}{1-\cos^2 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{(4x)^2/2}=\frac{9}{8}$.

Задача 3. Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее график $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & -\infty<x\le -2\\ x+2, & -2<x<0\\ \cos x, & 0\le x<\infty\end{cases}$.

Решение. На интервалах $(-\infty;-2]$, $(-2;0)$ и $[0;\infty)$ функция непрерывна, поэтому исследовать ее на непрерывность нужно в точках $x=-2$ *и* $x=0$. Вычислим значения функции и ее односторонние пределы в данных точках.

а) В точке $x=-2$ $f(-2)=(-2)^2-4=0$, $\lim\limits_{x\to-2-0}(x^2+2x)=0$, $\lim\limits_{x\to-2+0}(x+2)=0$.

Односторонние пределы равны между собой и равны значению функции в данной точке, значит, функция в точке $x=-2$ непрерывна.

б) В точке $x=0$ $f(0)=2$, $\lim\limits_{x\to 0-0}(x+2)=0$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\cos x=1$. Односторонние пределы конечны, но не равны между собой, значит, функция в точке $x=0$ имеет конечный разрыв (разрыв первого рода).

Справочный теоретический материал

Комплексные числа.

На множестве действительных чисел невозможно решить уравнение $x^2+1=0$. Введем условный символ i, который называется «мнимая единица», основное свойство которой $i^2=-1$, или $i=\sqrt{-1}$.

Тогда числа вида $a\cdot\sqrt{-1}=a\cdot i$ назовем мнимыми числами, а числа вида $a+bi$ – комплексными.

Комплексные числа изображают точкой на координатной плоскости.

Два комплексных числа $z_1=a_1+b_1i$ $z_2=a_2+b_2i$ равны, если равны их действительные и мнимые части: $z_1=z_2 \Leftrightarrow a_1=a_2$ и $b_1=b_2$. Нулем называют число $0+0i$, а единицей $1+0i$.

Комплексные числа можно складывать по правилу:

$z_1+z_2=\left(a_1+a_2\right)+\left(b_1+b_2\right)\cdot i$.

Умножают комплексные числа по правилу:

$z_1\cdot z_2=\left(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2\right)+i\cdot\left(a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1\right)$

Существует обратный элемент z^{-1}, имеющий вид $z^{-1}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}\cdot i$.

Обозначим: $a-bi=\overline{z}$ – число сопряженное с z.

Тогда правило деления таково: $z_1:z_2=\dfrac{z_1\cdot\overline{z}_2}{\left|z_2\right|}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,

где $r=\left|z\right|=\sqrt{a^2+b^2}$ – модуль комплексного числа, угол $\varphi=\arg z$ – его аргумент. В тригонометрической форме комплексные числа можно умножать, возводить в натуральную степень и извлекать корень из комплексного числа по формулам:

Если $z_1=r_1\cdot\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)$, $z_2=r_2\cdot\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)$, тогда

$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$;

$z^n=r^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ - формула Муавра;

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$, где $k = 0,1,2,...,n-1$ к = 0,1,2,…,n-1 – формула Муавра.

На множестве комплексных чисел квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$ имеет всегда два корня z_1 и z_2. А любое уравнение n-ой степени $P_n(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n = 0$ имеет n корней, действительных или комплексных.

***Матрицы, определители и их свойства*.**

Прямоугольной матрицей размерности $m \times n$ называется таблица, состоящая из m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad (i \text{ – номер строки, } j \text{ – номер столбца})$$

Если $m = n$, то матрица называется квадратной порядка n.

При $m = 1$– матрица строка; при $n = 1$– матрица столбец.

Две матрицы называются равными, если имеют одинаковую размерность и равны элементы, стоящие на одинаковых местах. $A = (a_{ij}) = B(b_{ij}) \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$

Суммой двух матриц одинаковой размерности называется матрица, составленная из сумм соответствующих элементов матриц $C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Существует нулевая матрица $\text{O} = (a_{ij} = 0)$.

Произведением матрицы $A(a_{ij})$ на число α называется матрица $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})$.

Произведением матриц $A = (a_{ij})$размерности $m \times n$ и $B = (b_{ij})$ размерности $n \times p$ называется матрица $C = (c_{ij})$, коэффициенты которой вычисляются по правилу: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$. Элемент, стоящий на пересечении i-ой строки и j-того столбца, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-того столбца матрицы В.

Произведение матриц не коммутативно, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Существует $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & \\ 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица n - го порядка

Для матрицы A размерности $m \times n$ выполняются свойства

$E_m \cdot A = A, \quad A \cdot E_n = A$. Если A и E квадратные матрицы одного порядка, то $A \cdot E = E \cdot A = A$

Если для данной матрицы A существует матрица X : $A \cdot X = X \cdot A = E$, то X называется обратной А и обозначается $X = A^{-1}$.

Каждой квадратной матрице n-го порядка можно сопоставить число, которое называется определителем матрицы и вычисляется по определенному правилу.

Определителем второго порядка называется таблица $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, значение которого находится по правилу $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель третьего порядка вычисляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13}$$

Здесь M_{ij} – минор элемента a_{ij}, т.е. определитель второго порядка, полученный из данного вычеркиванием i - ой строки и j - того столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Определитель n - го порядка вычисляется так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{vmatrix} == a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + ... + (-1)^{1+n} a_{1n} \cdot M_{1n},$$

где M_{ij} - минор элемента a_{ij} т.е. определитель $n-1$- го порядка, полученный вычеркиванием i - ой строки и j - того столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} назовем минор со знаком, выбранным по правилу: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Тогда $\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + ... + a_{1n} \cdot A_{1n}$. Говорят, что определитель вычислен разложением по элементам первой строки.

Перечислим некоторые свойства определителей.

1) При транспонировании матриц определители не меняются.

   Под транспонированием матриц понимают преобразование матрицы (и определителя), при котором строки и столбцы меняются местами.

Следствия: а) одинаковые свойства для строк и столбцов;

б) $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + ... + a_{n1}A_{n1}$ – разложение по элементам первого столбца.

2) Если в квадратной матрице какие-нибудь две строки (или столбца) поменять местами, то определитель поменяет знак.

3) Определитель может быть разложен по элементам любой строки или столбца.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & a_{in} \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

разложение по элементам i – ой строки.

Следствия: а) если одна из строк (столбцов) состоит из нулей, то определитель равен нулю.

б) если элементы строки (столбца) умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число.

4) Если определитель имеет две одинаковые строки (столбца), то он равен нулю.

5) Если матрица имеет две пропорциональные строки (столбца), то он равен нулю.

6) Определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же постоянное число.

Вернемся к задаче вычисления матрицы обратной данной. Сформулируем правило: всякая невырожденная матрица A (определитель $\Delta A \neq 0$) имеет обратную матрицу, которая вычисляется по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} \cdot A^{*T}$, где

матрица $A^{*T} = (A_{ji}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & . & A_{nn} \end{pmatrix}$, составленная из алгебраических дополнений элементов данной матрицы.

Решение систем линейных уравнений.

1. Матричный метод.

Пусть имеется система n – го порядка

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица системы;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Данная система эквивалентна матричному уравнению: $A \cdot X = B$, тогда решение системы эквивалентно решению указанного матричного уравнения, т.е. $X = A^{-1} \cdot B$.

2. Правило Крамера.

Если определитель Δ системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, где Δ_k – определитель, полученный из главного заменой k – го столбца столбцом свободных членов.

Замечание: а) Если $\Delta = 0$, а какой-либо из $\Delta_k \neq 0$, то, очевидно, что система решений не имеет.

б) Если все определители одновременно равны нулю, то система либо имеет бесчисленное множество решений, либо несовместна.

3. Метод Гаусса (метод исключения неизвестных).

Пусть дана произвольная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Расширенной матрицей системы назовем матрицу, полученную из А добавлением столбца свободных членов $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$.

Под элементарными преобразованиями системы линейных уравнений понимаются следующие операции:

1. Умножение какого-либо уравнения системы на число, отличное от нуля;
2. Прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число;
3. Перемена местами двух уравнений в системе.

Очевидно, что каждому элементарному преобразованию системы соответствует аналогичное преобразование строк расширенной матрицы этой системы и наоборот.

Элементарные преобразования системы обратимы, т.е. если мы, сделав элементарное преобразование, перешли от одной системы к другой, то можем вернуться к первоначальной, выполнив некоторое другое преобразование.

Определение: две системы линейных уравнений от одних и тех же переменных называются равносильными, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот (или обе системы несовместны).

При элементарных преобразованиях система переходит в равносильную систему.

Метод Гаусса заключается в том, что при помощи элементарных преобразований систему (расширенную матрицу) приводят к трапециевидной форме. После этого уже не представляет труда разобраться в вопросе о совместности системы, определить число решений и найти сами решения.

Векторы и действия с ними.

Вектором назовем направленный отрезок в пространстве. Обозначения: $\overline{AB},\ \overline{a}$. Длина отрезка АВ является длиной вектора $\overline{AB}$. Нулевой вектор – вектор, имеющий нулевую длину.

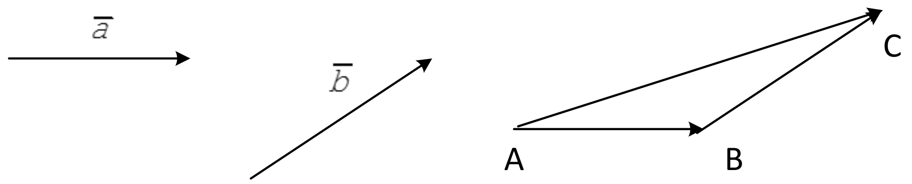
Векторы коллинеарны, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы компланарны, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Два вектора называются равными, если они

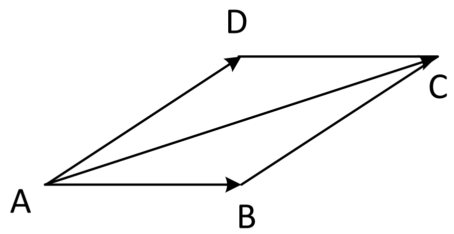
a) коллинеарны,
b) одинаково направлены,
c) имеют равные длины.

Из определения следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе в любую точку пространства. Такой вектор называется свободным.

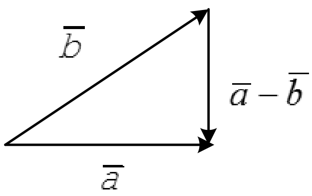
Пусть даны два вектора $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$. Построим равные им векторы $\overline{AB}=\overline{a}$ *и* $\overline{BC}=\overline{b}$. Тогда вектор $\overline{AC}$ называется суммой векторов $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$. $\overline{AC}=\overline{a}+\overline{b}$.



Этот способ называется «правило треугольника». Векторы можно складывать и по «правилу параллелограмма» (см рис.)



Разностью двух векторов $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ называется сумма векторов $\overline{a}+(-\overline{b})$. Вычитание – действие обратное сложению $\overline{a}-\overline{b}=\overline{x} \Rightarrow \overline{a}=\overline{b}+\overline{x}$



Произведение вектора $\overline{a}$ на число α называется вектор $\overline{b}=\alpha\cdot\overline{a}$:

а) $\left|\overline{b}\right|=|\alpha|\cdot|\overline{a}|$

б) $\overline{b}$ коллинеарен $\overline{a}$

в) $\overline{b}$ *и* $\overline{a}$ одинаково направлены, если $\alpha>0$, и противоположно направлены, если $\alpha<0$.

Выражение $\alpha_1\cdot\overline{a}_1+\alpha_2\cdot\overline{a}_2+\ldots+\alpha_n\cdot\overline{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов.

Базисом в пространстве называются три любых не компланарных вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом на плоскости называются два любых не коллинеарных вектора, взятых в определенном порядке.

Если $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$ - базис в пространстве, то коэффициенты разложения вектора $\overline{a}$ по базису $\overline{a}=\alpha_1\cdot\overline{e}_1+\alpha_2\cdot\overline{e}_2+\alpha_3\cdot\overline{e}_3$ называются координатами.

Каждый вектор в плоскости может быть единственным образом разложен по данному базису этой плоскости.

Каждый вектор пространства может быть единственным образом разложен по данному базису в пространстве.

Равные векторы имеют равные координаты.

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

При сложении векторов складываются их координаты.

***Прямоугольная декартова система координат*.**

Прямоугольной декартовой системой координат в пространстве называется точка и базис, векторы которого

а) попарно перпендикулярны (ортогональны),

б) $|\overline{e_1}| = |\overline{e_2}| = |\overline{e_3}| = 1$.

Точка называется началом координат. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат (абсцисса, ордината, аппликата).

Приняты обозначения: $\overline{e_1} = \overline{i}$, $\overline{e_2} = \overline{j}$, $\overline{e_3} = \overline{k}$.

Координаты радиус-вектора точки М называются координатами точки М в данной системе координат.

Нетрудно проверить, что координаты точки в декартовой прямоугольной системе координат по абсолютной величине равны расстоянию от этой точки до координатных плоскостей. Они имеют знак (+) или (–) в зависимости от того, в каком квадранте пространства она находится.

Пусть в данной прямоугольной декартовой системе координат вектор $\overline{a} = \alpha_x \cdot \overline{i} + \alpha_y \cdot \overline{j} + \alpha_z \cdot \overline{k}$. Найти длину вектора можно по формуле

$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Для того чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вычесть координаты начала.

Пусть даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, тогда координаты вектора $\overline{AB} = (x_1 - x_2) \cdot \overline{i} + (y_1 - y_2) \cdot \overline{j} + (z_1 - z_2) \cdot \overline{k}$

Пусть даны концы отрезка точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ и точка $M(x; y; z) \in AB$ и делящая его в отношении $\lambda = \dfrac{|AM|}{|MB|}$ $(\lambda > 0)$. Тогда координаты точки M вычисляются по формулам $x=\dfrac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda}$; $y=\dfrac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda}$; $z=\dfrac{z_1+\lambda\cdot z_2}{1+\lambda}$.

Следствие: Координаты середины отрезка равны среднему арифметическому координат концов отрезка.

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2};\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Пусть в данной прямоугольной декартовой системе координат даны векторы $\overline{a}=(\tilde{x};\tilde{y};\tilde{z})$, $\overline{p}=(x_1;y_1;z_1)$, $\overline{q}=(x_2;y_2;z_2)$ и $\overline{r}=(x_3;y_3;z_3)$, причем векторы $\overline{p},\overline{q}$ и $\overline{r}$ сами образуют базис. Вектор $\overline{a}$ можно разложить по базису $\overline{p},\overline{q}$ и $\overline{r}$, т.е. записать в виде $\overline{a}=\alpha\cdot\overline{p}+\beta\cdot\overline{q}+\gamma\cdot\overline{r}$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}x_3\\ y_3\\ z_3\end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение задачи сводится к решению системы линейных уравнений

$$\begin{cases}\tilde{x}=\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3\\ \tilde{y}=\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3\\ \tilde{z}=\alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3\end{cases}.$$

Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов.

Под углом между векторами мы понимаем угол между векторами, равными данным и имеющим общее начало. Если нет никаких указаний, то углом между векторами считается тот, который меньше π $(0\le\varphi\le\pi)$.

Скалярным произведением двух не нулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$(\overline{a},\overline{b})=\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi$$

Признак перпендикулярности векторов: скалярное произведение не нулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы перпендикулярны

$$|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \ .$$

$\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$ т.к. $\overline{a}^2 = |\overline{a}|\cdot|\overline{a}|\cdot\cos 0 = |\overline{a}|^2$

$\overline{a}\cdot(\overline{b}\cdot\overline{c}) \neq (\overline{a}\cdot\overline{b})\cdot\overline{c}$

Скалярное произведение может быть вычислено, если известны координаты веторов: $\overline{a}\cdot\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. Скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат.

С помощью скалярного произведения вычисляют угол между векторами $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$.

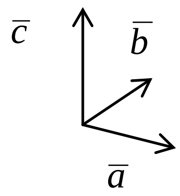
Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется право ориентированной или правой тройкой векторов, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки. В противоположном случае тройка называется левой.

Пусть даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Построим вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий условиям:

a) $|\overline{c}| = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\sin\varphi$;

b) $\overline{c}\perp\overline{a}$, $\overline{c}\perp\overline{b}$;

c) $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют правую тройку векторов.



Вектор $\overline{c}$ называется векторным произведением

векторов $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$. $\overline{c} = \overline{a}\times\overline{b}$.

$\overline{a}\times\overline{b} = -\overline{b}\times\overline{a}$ антикоммутативность (следует из определения)

Геометрический смысл векторного произведения: $|\overline{c}|$- численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$.

Векторное произведение не нулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны.

$$\overline{a}\times\overline{b} = 0 \Rightarrow |\overline{c}| = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\sin\varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi n,$$

т.е. векторы коллинеарны.

Смешанное произведение векторов.

Число $\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})$ называется смешанным произведением векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ и обозначается $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$.

Геометрический смысл: смешанное произведение не компланарных векторов равно по модулю объему параллелепипеда построенных на этих векторах. Смешанное произведение положительно, если векторы образуют правую тройку векторов, и отрицательно, если векторы образуют левую тройку векторов.

$$\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c}) = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}\times\overline{c}|\cdot\cos\theta = |\overline{b}\times\overline{c}|\cdot пр_{\overline{b}\times\overline{c}}\overline{a} = S_{осн}\cdot H = V_{пар-да}$$

Знак смешанного произведения совпадает со знаком $\cos\theta$. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}\times\overline{c}$ лежат по одну сторону плоскости $\overline{b}$ и $\overline{c}$, то $\cos\theta > 0$ и тройка векторов – правая; если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}\times\overline{c}$ лежат по разные стороны плоскости $\overline{b}$ и $\overline{c}$, то $\cos\theta < 0$ и тройка векторов – левая.

Смешанное произведение не нулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \overline{a}\perp\overline{b}\times\overline{c} \Leftrightarrow \overline{a},\overline{b},\overline{c} - \in пл. \\ |\overline{b}\times\overline{c}| = 0 \Leftrightarrow \overline{b}\ колл.\ \overline{c} \Leftrightarrow \overline{a},\overline{b},\overline{c} - \in пл. \end{cases}$$

При перестановке множителей в смешанном произведении абсолютная величина числа не меняется, быть может, изменится, только знак.

Смешанное произведение векторов равно определителю третьего порядка, составленному из координат векторов.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Плоскость в пространстве.

В прямоугольной декартовой системе координат каждая плоскость может быть задана линейным уравнением вида: $Ax + By + Cz + D = 0$, которое называется «общее уравнение».

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору, имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Геометрический смысл коэффициентов при неизвестных уравнения общего уравнения плоскости – координаты нормального вектора плоскости.

Если плоскость проходит через заданную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ компланарно двум векторам $\overline{p}$ и $\overline{q}$, то уравнение плоскости можно написать так: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}=0$, раскрывая определитель, получим уравнение плоскости.

Если плоскость проходит через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1),\ M_2(x_2;y_2;z_2),\ M_3(x_3;y_3;z_3)$, то уравнение плоскости получим из условия $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$

Если плоскость отрезает на координатных осях не нулевые отрезки, т.е. пересекает координатные оси в точках $M_1(a;0;0),\ M_2(0;b;0),\ M_3(0;0;c)$, то получим уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Расстояние от точки $\tilde{M}(\tilde{x};\tilde{y};\tilde{z})$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ можно вычислить по формуле

$$d=\frac{\left|A\tilde{x}+B\tilde{y}+C\tilde{z}+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пусть даны две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

а) если плоскости пересекаются, то их нормальные векторы $\overline{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ и $\overline{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ не коллинеарны, т.е. $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.

б) если плоскости параллельны (но не совпадают), то $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2$, то

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}.$$

в) если плоскости совпадают, то $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

Прямая в пространстве.

В прямоугольной декартовой системе координат каждая прямая может быть задана, как линия пересечения двух непараллельных плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0 \end{cases}$$

Верно обратное утверждение: каждое уравнение указанного вида при $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ определяет прямую в пространстве.

Однако более удобно при решении задач использовать другие уравнения.

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z \end{cases}$$ – параметрическое уравнение прямой или

$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$ – каноническое уравнение прямой (два линейно независимых уравнения), где $\bar{a}(a_x;\, a_y;\, a_z)$ – направляющий вектор прямой, а точка $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ принадлежит прямой.

Через две заданные точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ можно провести прямую, уравнение которой находится по формуле $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Пусть даны уравнения двух прямых

L_1: $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ L_2: $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$

а) прямые скрещиваются (не лежат в одной плоскости), если выполняется условие

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

б) прямые пересекаются, если

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{l_1}{l_2} \neq \frac{m_1}{m_2} \neq \frac{n_1}{n_2}.$$

в) прямые параллельны, если

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}, \ \frac{x_1 - x_2}{l_2} \neq \frac{y_1 - y_2}{m_2} \neq \frac{z_1 - z_2}{n_2}.$$

г) прямые совпадают; три вектора $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{M_1 M_2}$ коллинеарны.

Углом между двумя прямыми называется любой из двух углов между двумя параллельными им прямыми, проходящими через произвольную точку пространства. Вычислить косинус угла можно по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2}{|\overline{a}_1| \cdot |\overline{a}_2|}.$$

Пусть дана прямая $L: \dfrac{x - x_0}{a_x} = \dfrac{y - y_0}{a_y} = \dfrac{z - z_0}{a_z}$ и плоскость

$$\alpha: \ Ax + By + Cz + D = 0$$

а) плоскость и прямая пересекаются, если $A \cdot a_x + B \cdot a_y + C \cdot a_z \neq 0$.

б) плоскость и прямая параллельны, если

$$A \cdot a_x + B \cdot a_y + C \cdot a_z = 0, \text{ но } \ A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D \neq 0.$$

в) прямая лежит в плоскости, если

$$A \cdot a_x + B \cdot a_y + C \cdot a_z = 0 \ \text{ и } \ A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D = 0.$$

Углом между прямой и плоскостью называется меньший из двух углов между этой прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

$$|\cos\varphi| = \sin\varphi = \frac{\overline{n} \cdot \overline{a}}{|\overline{n}| \cdot |\overline{a}|}.$$

Прямая и плоскость перпендикулярны, если $\overline{n}$ *и* $\overline{a}$ коллинеарны.

Для того чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, воспользуемся параметрическим уравнением прямой и составим систему

$$\begin{cases} x = ta_x + x_0 \\ y = ta_y + y_0 \\ z = ta_z + z_0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Если $A \cdot a_x + B \cdot a_y + C \cdot a_z \neq 0$, то система имеет единственное решение, а значит, общая точка находится однозначно.

Прямая на плоскости.

Любая прямая на плоскости может быть задана линейным уравнением $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$.

Верно и обратное утверждение: любое линейное уравнение определяет некоторую прямую.

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0; y_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\overline{n}(A;\ B)$.

Пусть φ- угол, который прямая L образует с положительным направлением оси ох. Тогда уравнение прямой можно записать в виде: $y = \mathrm{tg}\varphi \cdot x + b$ или $y = kx + b$, где k называется угловым коэффициентом, а b начальной ординатой. Если выразить у из общего уравнения, то получим равенство: $y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$. Таким образом, $k = -\frac{A}{B}$ $и$ $b = -\frac{C}{B}$.

Пусть точка $M_0(x_0;\ y_0)$ принадлежит прямой L, уравнение которой $y = kx + b$, т.е. $y_0 = kx_0 + b$ и $y - y_0 = k(x - x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении.

Пусть прямая L проходит через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ параллельно заданному вектору $\overline{a}(a_x; a_y)$ – направляющему вектору данной прямой. Тогда

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot a_x \\ y - y_0 = t \cdot a_y \end{cases}$$ – параметрическое уравнение,

а $\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}$ – каноническое уравнение прямой.

Можно написать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)\; и\, M_2(x_2;y_2)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Две прямые $L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ и $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ на плоскости либо пересекаются, либо параллельны, либо совпадают.

В первом случае нормальные векторы $\overline{n}_1(A_1;B_1)\; и\; \overline{n}_2(A_2;B_2)$ не коллинеарны; т.е. $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$ или $A_1\cdot B_2-B_1\cdot A_2\neq 0$. При этом условии система

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$$

имеет единственное решение, так как главный определитель $\Delta\neq 0$.

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$ и $\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$

Если прямые L_1 и L_2 совпадают, то нетрудно видеть, что $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ и угол между двумя прямыми L_1 и L_2 определяется углом между их нормальными векторами $\overline{n}_1(A_1;B_1)\; и\; \overline{n}_2(A_2;B_2)$: $\cos\varphi=\dfrac{\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Угол между двумя прямыми может быть найден с помощью угловых коэффициентов. Рассмотрим прямые L_1 $y=k_1x+b_1$ и L_2 ox $y=k_2x+b_2$, которые составляют с координатной осью ox углы $\alpha_1\; и\; \alpha_2$.

Если угол между прямыми L_1 и L_2 $\alpha=\alpha_1-\alpha_2$, тогда $tg\alpha=tg(\alpha_1-\alpha_2)=\dfrac{tg\alpha_1-tg\alpha_2}{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2}$, или $tg\alpha=\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$.

Если прямые параллельны, то $k_1=k_2$ – условие параллельности прямых.

Если прямые перпендикулярны, то $1+k_1k_2=0\; или\; k_2=-\dfrac{1}{k_1}$ – условие перпендикулярности векторов.

Пусть даны прямая L Ax + By + C = 0 и точка $\tilde{M}(\tilde{x};\tilde{y})$, не лежащая на данной прямой. Расстояние от точки до прямой можно вычислить по формуле $d=\dfrac{|A\tilde{x}+B\tilde{y}+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Кривые второго порядка.

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$

I. Эллипс.

Определение: Эллипсом называется множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть данное число 2*a*, большее, чем расстояние 2*c* между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Число *a* называется большая полуось, *b* – малая полуось, причем $a^2-c^2=b^2$.

Из уравнения следует, что $|x|\le a,\ |y|\le b$, т.е. все точки эллипса лежат внутри прямоугольника $x=\pm a\ \ y=\pm b$.

Эллипс имеет центр симметрии – начало координат и две оси симметрии – координатные оси. Если *a* = *b*, то уравнение принимает вид: $x^2+y^2=a^2$. Т.е. окружность есть частный случай эллипса.

Отношение расстояния между фокусами 2*c* к длине большой полуоси 2*a* называется эксцентриситет и обозначается $\varepsilon=\dfrac{a}{c}$. Т.к. $0\le c<a\Rightarrow 0\le\varepsilon<1$; т.к. $b^2=a^2-c^2\Rightarrow\left(\dfrac{b}{a}\right)^2=1-\varepsilon^2$, т.е. эксцентриситет определяет форму эллипса.

II. Гипербола

Определение: Гиперболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть данное положительное число 2*a*, меньшее, чем расстояние 2*c* между фокусами.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ называется каноническим уравнением гиперболы. Число a называется действительная полуось, а b – мнимая полуось, причем по определению $a^2-c^2=-b^2$.

Из уравнения (2) следует, что $|x|\geq a \Rightarrow x\geq a \; или \; x\leq -a$. Ось ох пересекает гиперболу в двух точках A_1(–a; 0) и A_2(a; 0) и называется действительной осью гиперболы. Ось оу не пересекает гиперболу и называется мнимой осью. Две прямые $y=\frac{b}{a}x \; и \; y=-\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Асимптоты гиперболы являются диагоналями прямоугольника со сторонами $x=\pm a;\; y=\pm b$.

Отношение расстояния между фокусами $2c$ к действительной оси $2a$ называется эксцентриситетом гиперболы и обозначается $\varepsilon=\frac{c}{a}.$ Т.к. $0<a<c\Rightarrow \varepsilon<1$, т.е. эксцентриситет определяет форму гиперболы $a^2-c^2=-b^2\Rightarrow\left(\frac{b}{a}\right)^2=\varepsilon^2-1.$

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ определяет гиперболу, сопряженную данной. У них меняются местами действительная и мнимая оси.

III. Парабола

Определение: Параболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, не проходящей через фокус, и называемой директрисой.

Расстояние от фокуса параболы до ее директрисы называется параметром (p>0). Эксцентриситет параболы принимается равным единице $(\varepsilon=1)$.

Каноническое уравнение параболы $y^2=2px$.

Ось ох является осью параболы, начало координат – вершиной, $x\geq 0$ уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}$.

Предел последовательности. Предел функции.

Числовой последовательностью называется функция $a_n = f(n)$, определенная на множестве натуральных чисел $\{a_n\}$.

Последовательность называется возрастающей, если для любого номера n выполняется $a_{n+1} > a_n$.

Последовательность называется убывающей, если для любого номера n выполняется $a_{n+1} < a_n$.

Возрастающие или убывающие последовательности называются монотонными.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху, если существует действительное число M, такое, что для $\forall n \ a_n \le M$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной снизу, если существует действительное число m, такое, что для $\forall n \ a_n \ge m$.

Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для любого числа $0 < \varepsilon < 1$ существует номер N, такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Свойства последовательностей, имеющих предел:

Последовательность, имеющая предел, ограниченна.

Последовательность может иметь только один предел.

Последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

Любая возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) числовая последовательность имеет предел.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$,

если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Если определения не выполняются, то предел не существует. Если функция неограниченно возрастает при изменении аргумента, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и называют бесконечно большой величиной.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$, т.е. $\forall$ ε> 0 $\exists$ δ> 0: $|x-a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$.

Основные свойства бесконечно малых величин.

Если $\alpha_1(x)$ *и* $\alpha_2(x)$ являются бесконечно малыми, то $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$ также есть бесконечно малая величина.

Функция *f(x)* называется ограниченной при $x \to a$, если $\exists\, M > 0$ *и* $\delta > 0: |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M$.

Произведение ограниченной при $x \to a$ функции на бесконечно малую есть бесконечно малая величина.

Произведение постоянной на бесконечно малую есть бесконечно малая величина.

Произведение двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

Если $\alpha(x)$ является бесконечно малой величиной, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой величиной.

Если $f(x)$ – бесконечно большая величина, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая величина.

Основные теоремы о пределах.

Если функция имеет предел, то ее можно представить как сумму постоянной, равной ее пределу, и бесконечно малой величины.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$– бесконечно малая величина при $x \to a$.

Если существует предел функции, то он единственный.

$\lim\limits_{x\to a} C = C$. Предел константы равен самой константе.

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)+f_2(x)\right) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x).$$

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x).$$

$$\lim_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot\lim_{x\to a} f(x).$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a}f_2(x)},\quad f_2(x)\neq 0.$$

Если в некоторой окрестности точки a выполняется $f(x)\le g(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)\le\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

Если в некоторой окрестности точки a выполняется $f(x)\le g(x)\le q(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}q(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$.

Замечательные пределы. Непрерывность функций.

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Следствия из первого замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2};\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1.$$

Второй замечательный предел.

Предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

Для функции непрерывного аргумента $\forall x\in R$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Следствия из второго замечательного предела.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+kx)^n=e^k.$$

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ две бесконечно малые величины при $x\to a$.

$\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми. Обозначение $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$.

Если существует предел отношения двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, то он равен пределу отношения соответствующих им эквивалентных бесконечно малых.

Таблица эквивалентных бесконечно малых величин при условии $x \to 0$

$\sin x \sim x$; $\qquad$ $\operatorname{tg} x \sim x$;

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$; $\qquad$ $\arcsin x \sim x$;

$arctgx \sim x$; $\qquad$ $\ln(1+x) \sim x$;

$e^x - 1 \sim x$; $\qquad$ $(1+x)^a - 1 \sim ax$.

Пусть функция определена на интервале $[a; b]$ и $x, x_0 \in [a; b]$.

Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, тогда $x = x_0 + \Delta x$, Δx называется приращением аргумента. Приращением функции, соответствующим данному приращению аргумента, назовем разность $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Функция называется непрерывной, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Другое определение непрерывности функции: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция, непрерывная в каждой точке интервала $(a;b)$, называется непрерывной на этом интервале.

Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.

***Точки разрыва функции*.**

Определяя понятие предела функции $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, подразумеваем, что $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$. Такие пределы называются односторонними (левый и правый). Таким образом, функция непрерывна в точке x_0, если выполняются условия: функция $f(x)$ определена в точке x_0 и

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$. Если одно из этих условий нарушено, то функция имеет разрыв в указанной точке.

а) Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, а функция неопределенна в точке x_0, то такой разрыв называется устранимым. Его можно устранить, доопределив функцию.

б) Если существуют $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, но они не равны между собой, то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода.

Все прочие точки разрыва называются точками разрыва второго рода.

Библиографический список

1. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для втузов: [в 2 т.]. Т. 1 / Н. С. Пискунов. – Изд. стер. – Москва : Интеграл-Пресс, 2009. – 544 с.: ил.
2. . Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии : учебник для вузов / Н. В. Ефимов. – Изд. 13-е, стер. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 238 с.
3. Шипачев, В. С. Высшая математика : Базовый курс: учеб. пособие для вузов / В. С. Шипачев. – 8-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2011. – 447 с.
4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – Москва : ОНИКС 21 век : Мир и Образование, 2003. – 416 с.

Содержание

Подписано в печать 23.12.2014. Усл. печ. л. 3,5 Тираж экз.
Печать офсетная. Бумага писчая. Заказ №____.

Отпечатано: РИО ВоГУ, г. Вологда, ул. С. Орлова, 6